Ministerul Educației Naționale

MATEMATICĂ

• Ion Cicu • Silvia Mareș • Ioana Iacob • Răzvan Ceucă • Andrei Băleanu

Clasa a VII-a

www.intuitext.ro

intuitext
grup SOFTWIN

Disciplina: **Matematică**
Clasa: **a VII-a**
Tipul programei școlare: **Programa şcolară pentru disciplina MATEMATICĂ, Clasele a V-a – a VIII-a**
Acest manual este realizat în conformitate cu **Programa școlară** aprobată prin
OM nr. 3393/28.02.2017

Număr de pagini: 192

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE						
Anul	Numele elevului	Clasa	Școala	An școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1						
2						
3						
4						

*Starea manualului se înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.*

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect. Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : clasa a VII-a / Ion Cicu, Silvia Mareş, Ioana Iacob, ... -

Bucureşti : Intuitext, 2019
ISBN 978-606-9030-03-5

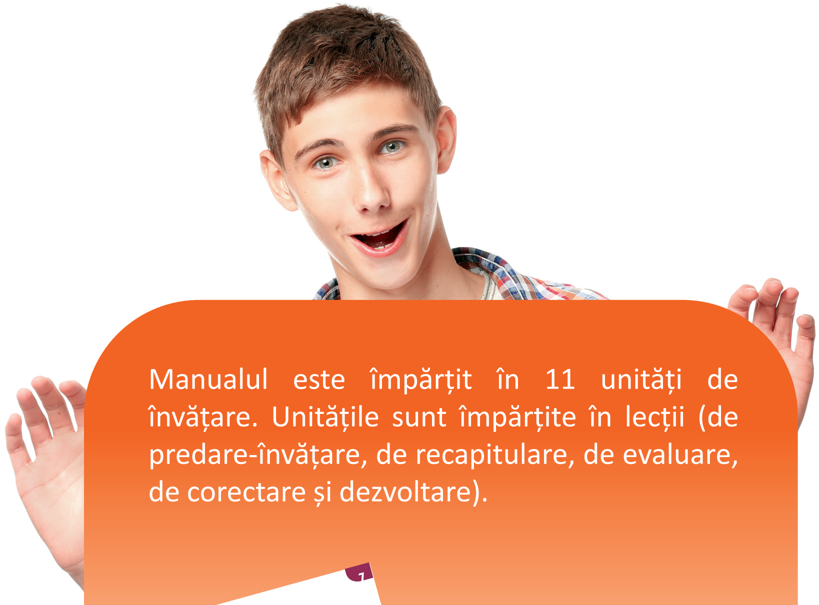
I. Cicu, Ion
II. Mareş, Silvia
III. Iacob, Ioana

51

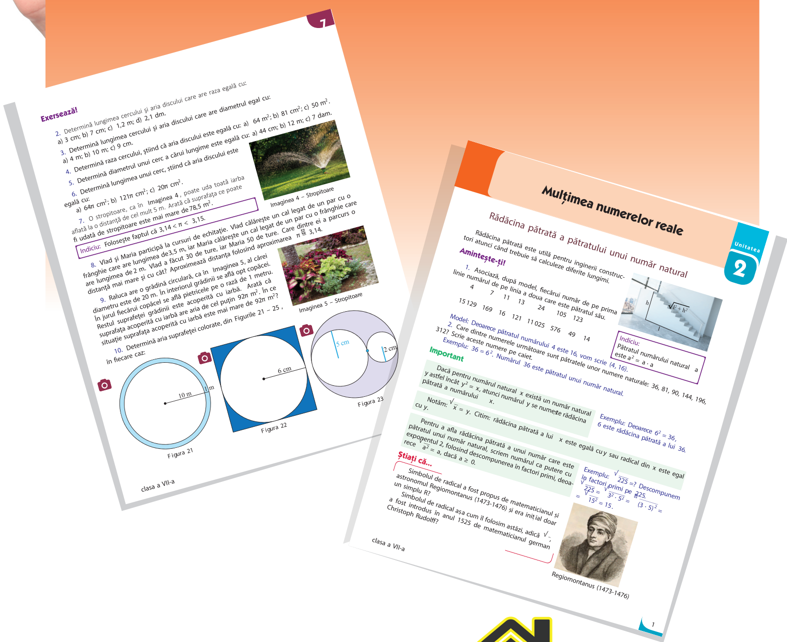
Editura INTUITEXT
București, b-dul Dimitrie
Pompeiu nr. 10A,
Clădirea Conect 1, etaj 1,
zona A, biroul nr. 2, sector 2

Departamentul vânzări:
Telefon: 0372.156.300
Fax: 021.233.07.63
vanzari@intuitext.ro
www.intuitext.ro

Referenți:
Prof. univ. dr. **Radu Gologan** – Universitatea Politehnica București
Conf. univ. dr. **Cătălin-Liviu Gherghe** – Universitatea București



Manualul este împărțit în 11 unități de învățare. Unitățile sunt împărțite în lecții (de predare-învățare, de recapitulare, de evaluare, de corectare și dezvoltare).



Amintește-ți!

Îți vei aminti ceea ce ai învățat.

Observă și descoperă!

Vei descoperi sau vei observa aplicații a ceea ce înveți în lecție.

Important

Aici îți sunt prezentate informațiile principale și sunt oferite exemple.

Exersează!

Vei realiza activitățile propuse cu ajutorul modelelor și a problemelor rezolvate.

Recapitulare

Te vei pregăti pentru evaluare, rezolvând exercițiile din *Recapitulare.*

Evaluare

Proba de evaluare îți va arăta cât de pregătit/pregătită ești la acea unitate.

Exersezi și progresezi

Vei realiza activitățile propuse pentru a-ți îmbunătăți pregătirea.

Acasă - Cuprinsul manualului

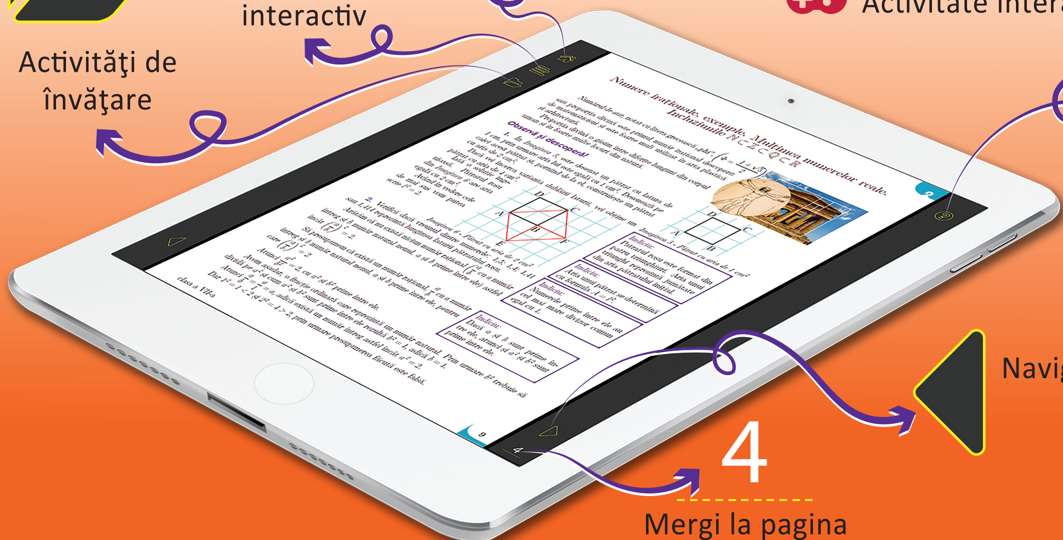
Cuprinsul interactiv

Activități de învățare

Imagine în manualul digital

Film sau animație în manualul digital

Activitate interactivă în manualul digital



Ajutor

Navigare între paginile manualului

4

Mergi la pagina

Cuprins

Competențe generale:

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice:

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$;
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare;
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame;
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date;
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date;
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date;
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată.

2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea şi aproximarea numerelor reale;
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluţiilor unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare;
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora;
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiţii şi proprietăţi ale acestora, în configuraţii geometrice date;
2.5. Descrierea proprietăților cercului şi ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc;
2.6. Stabilirea relaţiei de asemănare între triunghiuri;
2.7. Aplicarea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia.

3.1. Utilizarea unor algoritmi şi a proprietăţilor operaţiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale;
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare;
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale și reprezentări ale acestora;
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme;
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme;
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii;
3.7. Deducerea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic.

4.1. Folosirea terminologiei aferente noţiunii de număr real (semn, modul, opus, invers);
4.2. Redactarea rezolvării ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare;
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor;
4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noţiunilor legate de patrulatere;
4.5. Exprimarea proprietăţilor cercului şi ale poligoanelor în limbaj matematic;
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea;
4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relaţiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic.

5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale;
5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare;
5.3. Analizarea unor situaţii practice prin elemente de organizare a datelor;
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri şi a unor arii;
5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice;
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice;
5.7. Interpretarea unor relaţii metrice între elementele unui triunghi dreptunghic.

6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale;
6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare;
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic);
6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere;
6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri;
6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând asemănarea triunghiurilor;
6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând relaţii metrice în triunghiul dreptunghic.

La revedere, vacanță!

Unitatea 1

Recapitulare

1. Enumeră elementele mulțimilor:
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -5$ și $x < 2\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -3$ și $x < -2\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -3$ și $x < 4\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x < 4\}$.

2. Împarte numărul 1 200 în cinci părți direct proporționale cu numerele 2, 3, 4, 5 și 6.

3. Numerele a, b și c sunt invers proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Determină a, b și c pentru care relația $a^2 + b^2 + c^2 = 976$ este adevărată. Scrie toate soluțiile posibile.

4. Calculează:
a) $3 + (-2) - 5$; b) $6 - (-2) \cdot (-3)$; c) $5 : (-5) + (-5)$; d) $(-2)^3 - (-2)^2$;
e) $|-3| + |2|$; f) $|-5| - |-7|$; g) $\left|(-2)^2\right| - \left|(-2)^3\right|$; h) $||-4| - |+6||$;
i) $-1 + 3 \cdot \{-3 - 2 \cdot [-1 - (5 - 3)]\}^2$; j) $\left[(-3-1)^2 + 3 \cdot (-4) + (-2)^3 + 3 \cdot (-1)^4\right]^3$.

5. Trei autobuze pornesc din aceeași stație în același moment. Cursele lor au durata de 30, 45, respectiv 50 de minute. După cât timp se vor întâlni din nou autobuzele în această stație?

6. Efectuează: $1 - \frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left[-\frac{1}{5} + (-4) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : (-2)\right)\right] + \frac{1}{13}$.

7. Dintr-un siloz plin cu porumb s-a vândut în prima lună o cincime din cantitate. A doua lună s-a vândut un sfert din rest și au rămas 3 360 kg de porumb. Câte kilograme au fost la început?

8. Se consideră unghiul AOB și semidreapta OC bisectoarea lui. Se consideră OE bisectoarea unghiului AOC și OF bisectoarea unghiului BOC. Demonstrează că OC este și bisectoarea unghiului EOF.

9. Suplementul complementului unui unghi are măsura de 123°. Care este măsura unghiului?

10. Lucrați în pereche. În *Figura 1*, dreptele d și e sunt paralele, iar dreapta f este secantă. Completați spațiile punctate, folosindu-vă de figura alăturată:
a) Unghiurile $\widehat{1}$ și $\widehat{5}$ se numesc unghiuri ... .
b) Unghiurile $\widehat{1}$ și $\widehat{3}$ se numesc unghiuri ... .
c) Unghiurile $\widehat{2}$ și $\widehat{8}$ se numesc unghiuri ... .
d) Unghiurile $\widehat{3}$ și $\widehat{5}$ se numesc unghiuri ... .
e) Unghiurile $\widehat{4}$ și $\widehat{7}$ sunt unghiuri ... .
f) Unghiurile $\widehat{2}$ și $\widehat{5}$ sunt unghiuri ... .

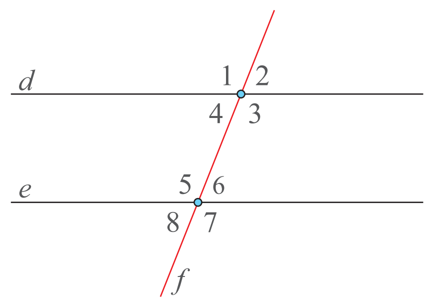


Figura 1

11. Se consideră $d \parallel e$, $f \parallel g$ și $d \perp f$. Demonstrează că $d \perp g$, $e \perp f$ și $e \perp g$.

12. Desenează cercurile $\mathcal{C}(A, 2 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(B, 4 \text{ cm})$. Precizează denumirea celor două cercuri dacă: a) $A = B$; b) $AB = 1$ cm; c) $AB = 2$ cm; d) $AB = 3$ cm; e) $AB = 4$ cm; f) $AB = 5$ cm; g) $AB = 6$ cm; h) $AB = 7$ cm. Precizează, în fiecare caz, câte puncte comune au cele două cercuri.

13. Un triunghi are un unghi cu măsura de $30°$. Dacă triunghiul are un unghi exterior cu măsura egală cu dublul unghiului adiacent cu el, calculează măsurile unghiurilor acestui triunghi.

14. Se consideră triunghiul ABC, BD bisectoarea unghiului ABC și BE bisectoarea unghiului ABD. Fie EM înălțime în triunghiul BEC. Dacă măsura unghiului DBC este de $30°$, iar măsura unghiului BDA este de $70°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC, măsura unghiului BEA și măsura unghiului DNM, unde punctul N reprezintă intersecția segmentelor BD și EM.

15. Se consideră triunghiurile LMN și XYZ și punctele G_1 și G_2, respectiv centrele lor de greutate. Dacă $\triangle LMG_1 \equiv \triangle XYG_2$, demonstrează că $\triangle LMN \equiv \triangle XYZ$.

16. În triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$, bisectoarea unghiului B și înălțimea din A se intersectează în T. Dacă măsura unghiului ACT este egală cu $15°$, determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Evaluare inițială

10p din oficiu

10p **1.** Asociază fiecare operație din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	**B**
a) $(-6) + (-3)$	1) -9
b) $(-6) \cdot (-3)$	2) -3
c) $(-6) : (-3)$	3) -2
d) $(-6) - (-3)$	4) $+2$
	5) $+18$

10p **2.** Completează, cu **A** dacă relația este adevărată, și cu **F**, dacă este falsă:

a) Două cercuri secante au exact trei puncte distincte în comun.

b) Două cercuri tangente au exact un punct în comun, indiferent dacă sunt tangente interioare sau tangente exterioare.

10p **3.** Completează enunțurile de mai jos:

a) Suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este de ... .

b) Cel mai mare divizor comun al numerelor 120 și 144 este ... .

10p **4.** Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, atunci:

a) $AB = MP$; b) $AC = MN$; c) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NMP$; d) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$.

15p **5.** Determină x din următoarea ecuație: $\frac{5}{4} \cdot \left[\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right) + 1\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3$.

15p **6.** Se consideră două unghiuri adiacente suplementare, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Fie OX și OY bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv BOC. Demonstrează că $OX \perp OY$.

10p **7.** Dacă trei numere naturale au suma egală cu 360 și sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5, află cele trei numere.

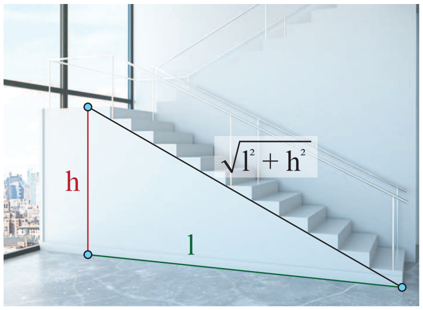
10p **8.** Fie ABC un triunghi și AM $(M \in BC)$ mediană. Dacă $\sphericalangle BMA = 90°$, demonstrează că triunghiul este isoscel.

Unitatea **2**

Mulțimea numerelor reale

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Rădăcina pătrată este utilă pentru inginerii constructori atunci când trebuie să calculeze diferite lungimi.



Amintește-ți!

1. Asociază, după model, fiecărui număr de pe prima linie numărul de pe linia a doua care este pătratul său.

4 7 11 13 24 105 123

15 129 169 16 121 11 025 576 49 14

Model: Deoarece pătratul numărului 4 este 16, vom scrie (4, 16).

Indiciu:
Pătratul numărului natural a este $a^2 = a \cdot a$

2. Care dintre numerele următoare sunt pătratele unor numere naturale: 36, 81, 90, 144, 196, 312? Scrie aceste numere pe caiet.

Exemplu: $36 = 6^2$. *Numărul 36 este pătratul unui număr natural.*

Important

Dacă pentru numărul natural x există un număr natural y astfel încât $y^2 = x$, atunci numărul y se numește **rădăcina pătrată a numărului** x.

Exemplu: Deoarece $6^2 = 36$, *6 este rădăcina pătrată a lui 36.*

Notăm: $\sqrt{x} = y$. Citim: rădăcina pătrată a lui x este egală cu y sau radical din x este egal cu y.

Pentru a afla rădăcina pătrată a unui număr care este pătratul unui număr natural, scriem numărul ca putere cu exponentul 2, folosind descompunerea în factori primi, deoarece $\sqrt{a^2} = a$, dacă $a \geq 0$.

Exemplu: $\sqrt{225} = ?$ *Descompunem în factori primi pe 225.*
$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{(3 \cdot 5)^2} =$
$= \sqrt{15^2} = 15.$

Știați că...

Simbolul de radical a fost propus de matematicianul și astronomul Regiomontanus (1436-1476) și era inițial doar un simplu R?

Simbolul de radical așa cum îl folosim astăzi, adică $\sqrt{}$, a fost introdus în anul 1525 de matematicianul german Christoph Rudolff?

Regiomontanus (1436-1476)

Observă și descoperă!

3. Copiază, pe caiet, *tabelul 1* și *tabelul 2* și completează căsuțele libere, după model:

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{a\cdot b}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$	$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$
25	4				
4	16				
36	4				

Tabelul 1

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}:\sqrt{b}$	$\sqrt{a:b}$
16	4	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{16}:\sqrt{4}=4:2=2$	$\sqrt{16:4}=\sqrt{4}=2$
36	9				
64	4				
100	25				

Tabelul 2

4. Compară rezultatele din ultimele două coloane, din fiecare dintre cele două tabele, și formulează o concluzie.

Important

Dacă a și b sunt pătratele a două numere naturale, atunci $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ și $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$, pentru $b\neq 0$. A doua relație se mai poate scrie și sub forma $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

Justificare: Dacă $\sqrt{a}=x$ și $\sqrt{b}=y$, atunci $x^2=a$ și $y^2=b$. Avem, $x^2\cdot y^2=a\cdot b$ sau $(x\cdot y)^2=a\cdot b$ (1).

Dacă $\sqrt{a\cdot b}=z$, atunci $z^2=a\cdot b$ (2).

Din (1) și (2) $(x\cdot y)^2=z^2$, de unde $x\cdot y=z$, adică $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

Exersează!

5. Urmărind pașii din justificarea pentru înmulțire, justifică afirmația: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$.

6. Scrie în dreptul fiecărui enunț litera **A**, dacă enunțul este adevărat sau litera **F**, dacă enunțul este fals.

a) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 81.
b) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 3.
c) Rădăcina pătrată a numărului 8^{100} este 4^{100}.
d) Rădăcina pătrată a numărului 8^6 este 8^3.

7. Care dintre numerele de mai jos sunt pătrate ale unor numere naturale? Scrie aceste numere pe caiet.

9, 16, 20, 100, 121, 200, 400 și 1 000.

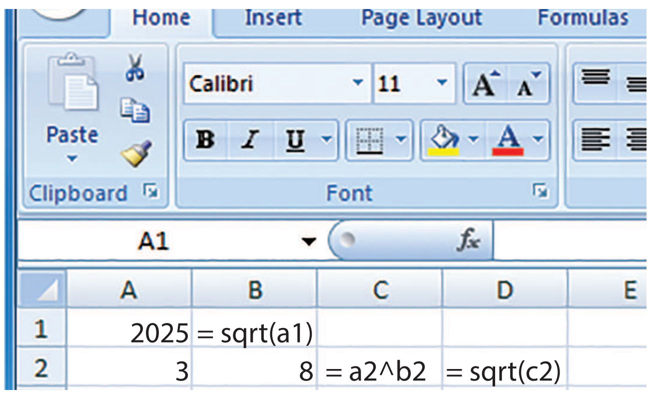
8. Copiază pe caiet și unește, prin săgeți, fiecare căsuță de pe prima linie cu căsuța din a doua linie astfel încât ele să conțină valori egale.

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{289}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{484}$	
22	13	18	11	0	9	8	2	17	1

9. Calculează rădăcina pătrată a următoarelor numere, după model:
a) $16 \cdot 9$; b) $81 \cdot 625$; c) $5^4 \cdot 17^{10}$; d) $2\,020^2 \cdot 2^{2\,020}$; e) $22^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6$; f) $5^6 \cdot 7^4 \cdot 10^8$.
Model: a) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)^2} = 2^2 \cdot 3 = 12.$

10. Calculează următorii radicali:
a) $\sqrt{2\,025}$; b) $\sqrt{256}$; c) $\sqrt{1\,024}$; d) $\sqrt{3^8}$; e) $\sqrt{5^8}$; f) $\sqrt{4^7}$; g) $\sqrt{9^3}$; h) $\sqrt{6^6 \cdot 3^2}$.
Verifică rezultatele obținute cu ajutorul calculatorului, folosind un utilitar de calcul tabelar, de exemplu Excel (*Imaginea 1*).

Imaginea 1 - Foaie de lucru în Excel

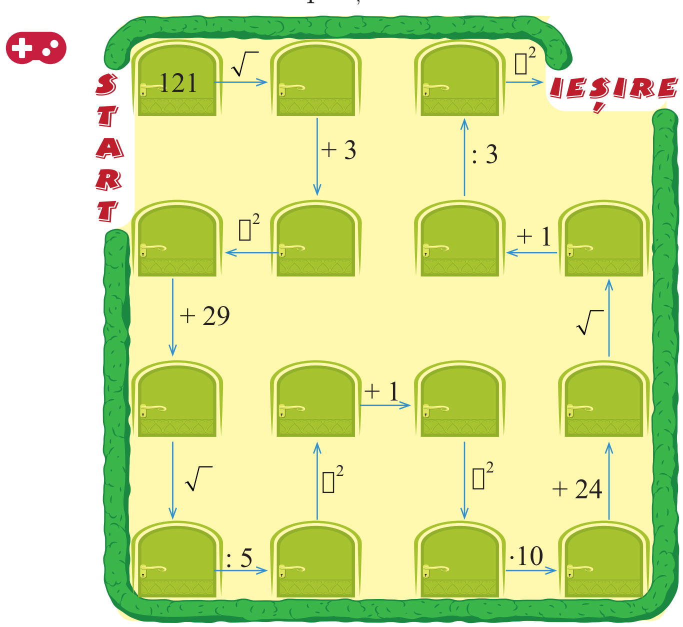


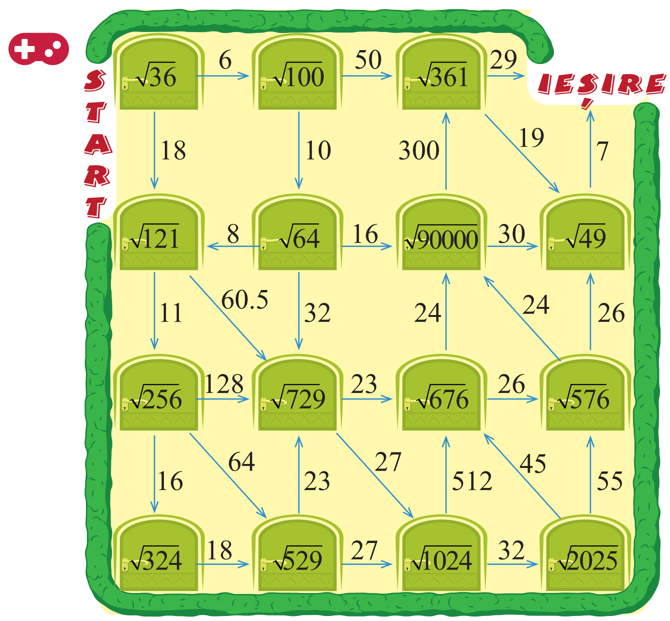
11. Calculează, folosind relația $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ sau relația $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; c) $\sqrt{50} : \sqrt{2}$; d) $\sqrt{1\,000} : \sqrt{10}$; e) $\sqrt{6^5} : \sqrt{6^3}$; f) $\sqrt{64} : \sqrt{2^3} : \sqrt{2}$; g) $\sqrt{5^3} : \sqrt{5}$; h) $\sqrt{18} : \sqrt{2}$; i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.

12. Compară numerele: a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{9+16}$; b) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ și $\sqrt{64+36}$; c) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$ și $\sqrt{25+144}$; d) $\sqrt{0} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{0+16}$.
e) Stabilește dacă relația $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ este adevărată pentru orice numere naturale a și b.
f) Oferă un exemplu de numere naturale a și b pentru care $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

13. a) Urmărește operațiile și sensul de deplasare, indicate de săgeți, pentru a calcula rezultatele fiecărei porți din labirint.

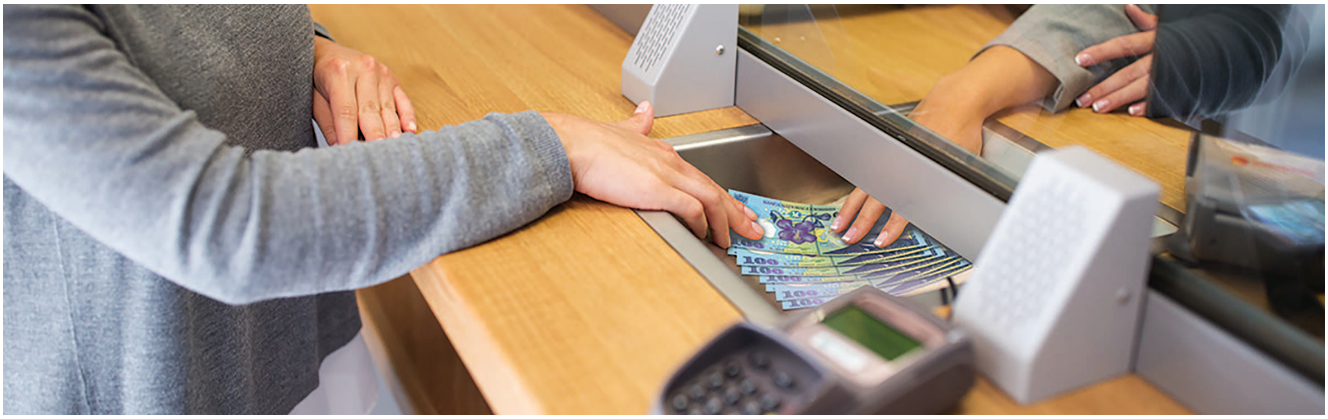
b) Trasează drumul către ieșirea din labirint, alegând săgețile pe care sunt scrise rezultatele corecte.





Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Rădăcina pătrată este utilă pentru cei care lucrează în bănci atunci când calculează dobânda.



Amintește-ți!

1. Transformă următoarele fracții zecimale finite în fracții ordinare: a) 0,57; b) 1,69; c) 2,25; d) 2,89; e) 4,41; f) 0,0081; g) 0,0121.

Exemplu: a) $0{,}57 = \frac{57}{100}$.

2. Scrie următoarele fracții sub forma $\left(\frac{a}{b}\right)^2$: a) $\frac{49}{100}$; b) $\frac{169}{100}$; c) $\frac{25}{36}$; d) $\frac{9}{25}$; e) $\frac{121}{144}$; f) $\frac{289}{100}$; g) $\frac{441}{100}$; h) $\frac{81}{10\,000}$; i) $\frac{9}{10\,000}$.

Exemplu: $\frac{49}{100} = \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

Important

- Pentru anumite numere raționale $\frac{p}{q}$, există numere raționale $\frac{a}{b}$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$.

- Există numere raționale care nu se pot scrie $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, de exemplu $\frac{1}{2}$ sau numerele negative.

Exemplu: Pentru $\frac{49}{100}$ *există numărul rațional* $\frac{7}{10}$ *astfel încât* $\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$.

• Dacă pentru numărul rațional $\frac{p}{q}$, există numărul rațional $\frac{a}{b} \geq 0$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$, atunci putem scrie $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}$ și citim: **rădăcina pătrată a numărului** $\frac{p}{q}$ **este numărul** $\frac{a}{b}$ sau **radical din** $\frac{p}{q}$ **este egal cu** $\frac{a}{b}$.

Deoarece $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$ deducem că $\frac{p}{q} \geq 0$.

• Dacă $\frac{m}{n} \geq 0$ este un număr rațional, atunci putem încadra numărul $\sqrt{\frac{m}{n}}$ între două numere naturale consecutive.

Exemplu:

a) Pentru $\sqrt{3}$. *Numărul 3 se află între pătratele consecutive a două numere naturale: 1, respectiv 4. Dacă* $1 < 3 < 4$, *atunci* $1 < \sqrt{3} < 2$.

b) Pentru $\sqrt{\frac{9}{2}}$. *Avem* $\frac{9}{2} = 4{,}5$. *Numărul 4,5 se află între pătratele consecutive a două numere naturale: 4, respectiv 9. Dacă* $4 < \frac{9}{2} < 9$, *atunci* $2 < \sqrt{\frac{9}{2}} < 3$.

Exersează!

3. Asociază, după model, fiecare număr rațional din coloana **A** cu rădăcina pătrată a lui, din coloana **B**.

Model: 1 – e , deoarece $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Coloana A	**Coloana B**
1. $\frac{4}{25}$	a) $\frac{1}{100}$
2. $\frac{1}{10\,000}$	b) $\frac{7^8}{9}$
3. $\frac{3^8}{5^2}$	c) $\frac{81}{5}$
4. $\frac{7^{16}}{81}$	d) $\frac{16}{625}$
	e) $\frac{2}{5}$

Știați că...

Determinarea rădăcinii pătrate era cunoscută încă din antichitate?

4. Calculează:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$; b) $\sqrt{\dfrac{1}{121}}$; c) $\sqrt{\dfrac{64}{169}}$; d) $\sqrt{\dfrac{100}{49}}$; e) $\sqrt{\dfrac{144}{361}}$;

f) $\sqrt{\dfrac{1}{400}}$; g) $\sqrt{\dfrac{225}{16}}$; h) $\sqrt{\dfrac{49}{900}}$; i) $\sqrt{\dfrac{1\,600}{81}}$; j) $\sqrt{\dfrac{9}{196}}$.

5. Încadrează între două numere naturale consecutive următoarele numere: $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{2{,}5}$ și $\sqrt{16{,}25}$.

Model: $4 < 5 < 9$ *implică* $2 < \sqrt{5} < 3$.

6. Încadrează numerele date între două numere naturale consecutive:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{111}$; c) $\sqrt{28}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{\dfrac{74}{5}}$;

f) $\sqrt{\dfrac{81}{2}}$; g) $\sqrt{405{,}23}$; h) $\sqrt{\dfrac{1}{325}}$; i) $\sqrt{\dfrac{85}{4}}$; j) $\sqrt{\dfrac{1\,234}{100}}$.

7. Pentru a pune încă o ancoră stâlpului din *Imaginea 2*, inginerul calculează și găsește că lungimea ancorei trebuie să fie $\sqrt{107}$ metri. Îi ajung 10 metri de sârmă pentru realizarea ancorei? Justifică răspunsul dat.

Imaginea 2 - Stâlp ancorat

8. Calculează, scriind mai întâi sub formă de fracție ordinară, după model:

a) $\sqrt{2{,}25}$; b) $\sqrt{0{,}16}$; c) $\sqrt{1{,}44}$; d) $\sqrt{0{,}49}$; e) $\sqrt{0{,}09}$; f) $\sqrt{0{,}0625}$.

Model: $\sqrt{2{,}25} = \sqrt{\dfrac{225}{100}} = \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5.$

9. Calculează:

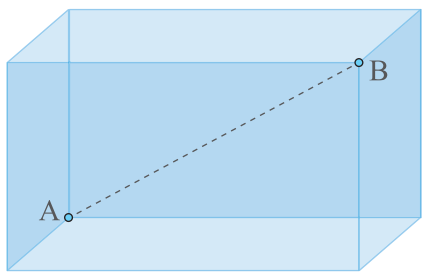
a) $\sqrt{\dfrac{5^4}{7^2}}$; b) $\sqrt{\dfrac{1}{3^8}}$; c) $\sqrt{\dfrac{10^6}{2^{10}}}$; d) $\sqrt{\dfrac{7^2}{3^6}}$; e) $\sqrt{\dfrac{8^4}{5^6}}$; f) $\sqrt{\dfrac{2^{12}}{3^{10}}}$.

10. Scrie în dreptul fiecărui enunț litera **A**, dacă enunțul este adevărat sau litera **F**, dacă enunțul este fals.

a) $2 < \sqrt{6} < 3$; c) $4 < \sqrt{11}$; e) $15 < \sqrt{250}$;

b) $12 < \sqrt{150} < 13$; d) $17 < \sqrt{300} < 18$; f) $50 < \sqrt{1\,000}$.

11. În acvariul din *Imaginea 3* cea mai mare lungime o are segmentul AB și este egală cu $\sqrt{47}$ cm. Poți introduce în acest acvariu o tijă metalică cu lungimea de 7,3 cm? Justifică răspunsul dat.



Imaginea 3 - Acvariu

Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Observă și descoperă!

Sara scrie pe tablă $\sqrt{18}$, iar Victor scrie $3\sqrt{2}$. Observă dialogul dintre cei doi.

Sara: Ai scris același lucru pe care l-am scris și eu.

Victor: Cum așa?

Sara: Să-ți explic! Ce înțelegi prin $3\sqrt{2}$?

Victor: Înțeleg $3 \cdot \sqrt{2}$.

Sara: Pot scrie $3 = \sqrt{9}$?

Victor: Desigur.

Sara: Atunci
$3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.

Imaginea 4 – Calcule pe tablă

- Urmărește cu atenție raționamentul Sarei și încearcă să ajungi de la $\sqrt{18}$ la $3\sqrt{2}$.

Important

- Orice număr rațional $x \geq 0$ se poate scrie $x = \sqrt{x^2}$.

- Pentru orice număr rațional x avem $\sqrt{x^2} = |x|$.

Justificare: Fără modul, adică, $\sqrt{a^2} = a$, am fi avut, de exemplu, $\sqrt{(-3)^2} = -3$. Dar $\sqrt{(-3)^2}$ am stabilit că este număr pozitiv.

- Pentru orice număr raţional $a \geq 0$, putem scrie $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ (se subînțelege că din moment ce b este sub radical avem $b \geq 0$).

Exemplu: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

- Procedeul prin care factorul a a fost introdus sub radical se numește **introducerea factorilor sub radical**.

- Pentru orice număr raţional $b \geq 0$, putem scrie $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

Exemplu: $\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$.

- Procedeul prin care un factor iese de sub radical se numește **scoaterea factorilor de sub radical**.

Exemplu: La scoaterea factorilor de sub radical putem proceda astfel:
Vreau să scot factori de sub radical pentru $\sqrt{720}$.

Pasul 1. Descompun numărul 720 în factori primi.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Pasul 2.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

> 2 Din doi factori egali cu 2 iese de sub radical un 2.

> 2 Din doi factori egali cu 2 iese de sub radical un 2.

> 3 Din doi factori egali cu 3 iese de sub radical un 3.

Pasul 3. De sub radical vor ieși doi factori egali cu 2 și un factor egal cu 3, iar sub radical rămâne factorul 5.

Scriu: $\sqrt{720} = 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

Exersează!

1. Asociază fiecărui radical din primul rând scrierea echivalentă de pe rândul al doilea, după model.

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{50}$ f) $\sqrt{27}$

A. $2\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$ E. $3\sqrt{2}$ F. $2\sqrt{2}$ G. $3\sqrt{5}$

Model: a) - D. deoarece $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

2. Introdu factorii sub radical: a) $5\sqrt{3}$; b) $4\sqrt{5}$; c) $6\sqrt{3}$; d) $8\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{5}$; f) $15\sqrt{2}$.

3. Scoate factorii de sub radical: a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{32}$; c) $\sqrt{72}$; d) $\sqrt{192}$; e) $\sqrt{150}$; f) $\sqrt{338}$.

4. a) Dacă $\sqrt{588} = a\sqrt{3}$ determină valoarea lui a.
b) Dacă $\sqrt{1\,875} = 25\sqrt{a}$ determină valoarea lui a.
c) Dacă $7\sqrt{5} = \sqrt{a}$ determină valoarea lui a.
d) Dacă $8\sqrt{6} = \sqrt{a}$ determină valoarea lui a.

5. Dacă $\sqrt{m} = a\sqrt{b}$ completează *Tabelul 3*, după model:

m	52	172	180	99	297	1125	363	288
a	2							
b	13							

Tabelul 3

6. Dacă $a\sqrt{b} = \sqrt{m}$ completează *Tabelul 4*, după model:

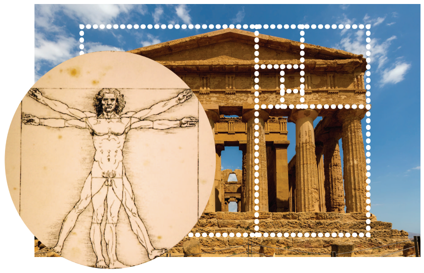
a	2	6	10	13	9	8	7	12
b	5	3	5	6	2	7	5	3
m	20							

Tabelul 4

Numere iraționale, exemple. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Numărul de aur, notat cu litera grecească „phi”, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sau proporția divină este primul număr irațional descoperit de matematicieni și este foarte mult utilizat în arta plastică și arhitectură.

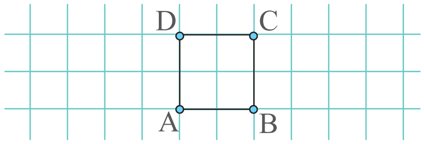
Proporția divină o găsim între diferite lungimi din corpul uman și în foarte multe locuri din natură.



Observă și descoperă!

1. În *Imaginea 5*, este desenat un pătrat cu latura de 1 cm, prin urmare aria lui este egală cu 1 cm^2. Desenează pe caiet acest pătrat și, pornind de la el, construiește un pătrat cu aria de 2 cm^2.

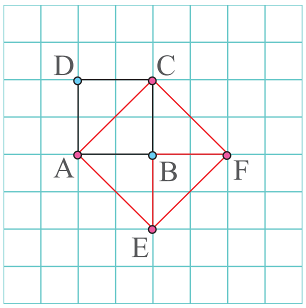
Dacă vei încerca varianta dublării laturii, vei obține un pătrat cu aria de 4 cm^2.



Imaginea 5 - Pătrat cu aria de 1 cm^2

Iată o soluție ingenioasă! Pătratul roșu din *Imaginea 6* are aria egală cu 2 cm^2.

Având în vedere cele de mai sus, vom putea scrie $l^2 = 2$.



Imaginea 6 - Pătrat cu aria de 2 cm^2

Indiciu:
Patratul roșu este format din patru triunghiuri. Aria unui triunghi reprezintă jumătate din aria pătratului inițial.

Indiciu:
Aria unui pătrat se determină cu formula $A = l^2$.

2. Verifică dacă vreunul dintre numerele: 1,5; 1,4; 1,41 sau 1,414 reprezintă lungimea laturii pătratului roșu.

Arătăm că nu există niciun număr rațional $\left(\dfrac{a}{b}\right.$ cu a număr întreg și b număr natural nenul, a și b prime între ele) astfel încât $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$.

Indiciu:
Numerele prime între ele au cel mai mare divizor comun egal cu 1.

Să presupunem că există un număr rațional, $\dfrac{a}{b}$ cu a număr întreg și b număr natural nenul, a și b prime între ele, pentru care $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$. Atunci $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$, de unde $a^2 = 2b^2$.

Cum $2b^2$ se divide cu 2 rezultă a^2 se divide cu 2, deci $a = 2p$, p număr natural. Atunci $4p^2 = 2b^2$, de unde $b^2 = 2p^2$, adică şi b se divide cu 2. Dacă a şi b se divid cu 2 înseamnă că nu sunt prime între ele, prin urmare presupunerea făcută este falsă.

Și totuși, există un număr care să reprezinte latura pătratului roșu. Îl vom nota $\sqrt{2}$ și citim **radical din 2**.

Știați că...

Babilonienii au estimat valoarea lui $\sqrt{2}$ în perioada 1800-1600 î.Hr. ca fiind 1,41421296, aproximând corect primele 5 zecimale din valoarea acestui număr? $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$

Important

• Există numere care nu pot fi scrise $\frac{a}{b}$ cu a număr întreg și b număr natural nenul, a și b prime între ele.

Exemplu: $\sqrt{2}$ *este un astfel de număr. Un alt exemplu este numărul* 0,10110111011110111110...

• Numerele care nu se pot scrie $\frac{a}{b}$, cu a număr întreg și b număr natural nenul, a și b prime între ele, se numesc **numere iraționale**.

• Toate numerele de forma $\sqrt{n}$, cu n număr natural, $n \neq k^2$, k număr natural, sunt numere iraționale.

• Numerele iraționale se scriu ca fracții zecimale cu un număr infinit de zecimale care nu se repetă periodic.

• Numerele iraționale, împreună cu numerele raționale, formează **mulțimea numerelor reale**, notată $\mathbb{R}$ (*Schema 1*).

• Mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale sunt disjuncte, adică nu există niciun număr care să fie și rațional și irațional.

• Mulțimea numerelor iraționale se va nota $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemplu:

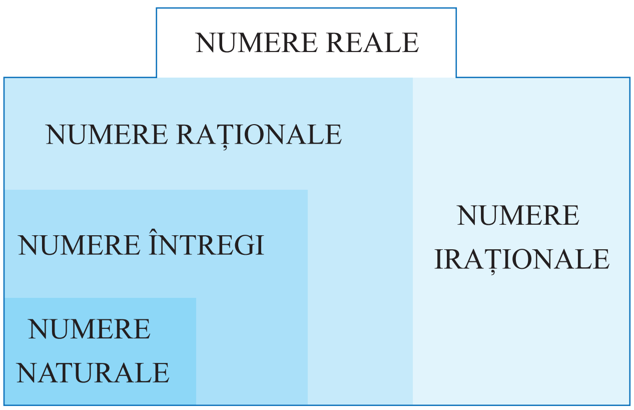
2 este număr natural, întreg, rațional și real.

-2 *este număr întreg, rațional, real, dar nu natural.*

$\frac{3}{4}$, 0,5 *și* 0,(15) *sunt numere raționale și reale, dar nu întregi sau naturale.*

$\sqrt{3}$ *este irațional și real.*

Observăm că toate numerele de mai sus sunt reale.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

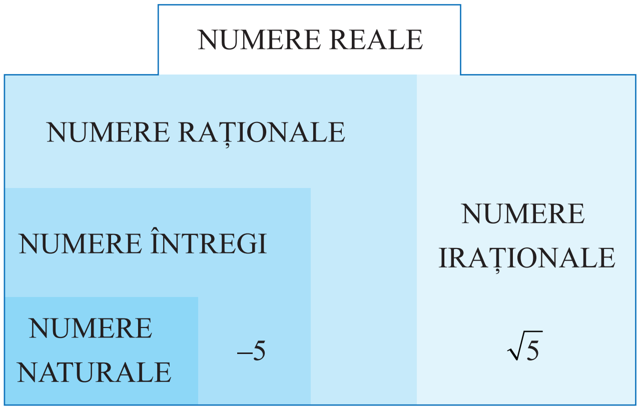
Schema 1 - Mulțimea numerelor reale

Exersează!

3. Copiază, pe caiet, *Schema 2* și scrie numerele date în căsuța potrivită:

$3;\ 1{,}4;\ \sqrt{7};\ -6{,}(2);\ \sqrt{9};\ \dfrac{13}{4};\ -3\sqrt{2}.$

Exemplu: -5 este întreg, dar nu natural, deci a fost scris în chenarul numerelor întregi, dar nu în cel al numerelor naturale.



Schema 2 - Mulțimea numerelor reale

4. Stabilește care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$; c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$; d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{Q}$;

e) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$; f) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$; g) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$; h) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

5. Asociază fiecărui număr din partea stângă, descrierea corespunzătoare din partea dreaptă:

a) $\sqrt{101}$	1) număr natural
b) $\sqrt{100}$	2) număr rațional, dar nu întreg
c) $\dfrac{3}{4}$	3) număr întreg, dar nu natural
d) -5	4) număr irațional
	5) număr real, dar nu rațional sau irațional

6. Scrie, pe caiet, câte trei exemple de:

a) numere naturale;
b) numere întregi;
c) numere întregi, dar nu naturale;
d) numere raționale;
e) numere raționale, dar nu întregi;
f) numere iraționale.

7. Stabilește care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false.

a) $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$; c) $-7 \in \mathbb{Q}$; d) $-5{,}5 \in \mathbb{R}$;

e) $\sqrt{12} \in \mathbb{R}$; f) $\sqrt{15} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; g) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} \in \mathbb{Q}$; h) $3{,}(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

i) $\sqrt{6{,}25} \in \mathbb{Q}$; j) $-\sqrt{\dfrac{5}{125}} \in \mathbb{Q}$; k) $\sqrt{2^{10}} \in \mathbb{Q}$; l) $\sqrt{2^{2\,019}} \in \mathbb{Q}$.

8. Care dintre elementele mulțimii $\left\{2{,}3;\ 1{,}(4);\ \sqrt{\dfrac{3}{4}};\ \sqrt{25}; \sqrt{90}\right\}$ sunt numere iraționale? Scrie-le pe caiet.

9. Determină mulțimile A și B, unde $A = \left\{2{,}3;\ 1{,}(4);\ \sqrt{9};\ \sqrt{\dfrac{3}{4}};\ \sqrt{25}; \sqrt{90}\right\} \cap \mathbb{Z}$ și

$B = \left\{2;\ 0{,}(4);\ \sqrt{3};\ \sqrt{\dfrac{3}{4}};\ \sqrt{5}; \sqrt{900}\right\} \setminus \mathbb{Z}.$

10. Lucrați în pereche. Distribuiți fiecare propoziție, din cele de mai jos, categoriei din *Tabelul 5* căreia îi aparține:

a) Dacă un număr e întreg, atunci e real.

b) Dacă un număr e rațional, atunci e întreg.

c) Dacă un număr e irațional, atunci nu e întreg.

d) Dacă un număr e irațional, atunci e real.

e) Dacă un număr e irațional, atunci e natural.

f) Dacă un număr e întreg, atunci e natural.

g) Dacă un număr e întreg, atunci e irațional.

h) Dacă un număr e real, atunci e irațional.

i) Dacă un număr e real, atunci e întreg.

Știați că...

Numărul π (PI):

- nu este număr raţional?

- reprezintă raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc?

- mai este numit și constanta lui Arhimede?

- în anul 250 î.Hr., Arhimede, în tratatul *Măsurarea cercului*, aproximează numărul π ca fiind între $3\frac{10}{71}$ și $3\frac{1}{7}$ (aproximări foarte bune!)?

- în anul 1706, William Jones introduce notația π pentru numărul PI?

- în anul 1761, Johann Heinrich Lambert demonstrează că numărul π este irațional?

- în anul 2016, Peter Trueb determină cu ajutorul unui super-computer primele 22,4 trilioane ($22{,}4 \times 10^{12}$) de zecimale ale numărului π?

Întotdeauna adevărat	Exemplu	**Uneori adevărat**	Exemplu	Contra-exemplu	**Niciodată adevărat**	Exemplu
a)	-7	**b)**	$\frac{12}{3}$	$\frac{3}{12}$		

Tabelul 5

11. Se consideră mulțimea $M = \left\{-4, -\sqrt{2}, -\sqrt{9}, \frac{12}{2}, \frac{12}{5}, \sqrt{\frac{4}{9}}, 5, \frac{3}{5}\right\}$

a) Calculează suma numerelor întregi din mulțimea M;

b) Calculează suma numerelor raționale care nu sunt întregi din mulțimea M.

12. Se consideră mulțimea $A = \{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}, n < 17\}$. Determină $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap \mathbb{R}$ și $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Compararea și ordonarea numerelor reale

Nu totdeauna avem nevoie de rezultate exacte. Uneori este suficient să estimăm rezultatul unor calcule. De aceea este necesar să putem compara numerele reale.

$\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{8}$

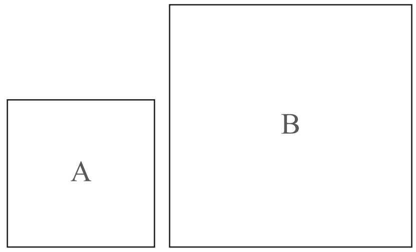
Observă și descoperă!

1. În *Imaginea 7* sunt desenate două pătrate A și B.

a) Care dintre cele două pătrate are aria mai mare?

b) Care dintre cele două pătrate are latura mai mare?

c) Dacă aria pătratului A este egală cu 2 cm^2, iar aria pătratului B este egală cu 3 cm^2, ce lungimi au laturile celor două pătrate?



Imaginea 7
Pătrate de arii diferite

2. Care dintre numerele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ este mai mare?

Important

• Dacă avem de comparat două numere de forma $\sqrt{x}$, cu $x \geq 0$, atunci este mai mic numărul care are sub radical un număr mai mic. Dacă $0 \leq a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Dacă $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, atunci $0 \leq a < b$.

Exemplu:
$\sqrt{123} < \sqrt{175}$ *deoarece* $123 < 175$.

• Dacă avem de comparat numere de forma $a\sqrt{b}$, unde $a \geq 0$, atunci introducem facorii sub radical şi apoi comparăm.

Exemplu:
$3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$ *deoarece* $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$, $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ *şi* $\sqrt{45} < \sqrt{50}$.

• Dacă pentru numerele reale x și y avem numerele întregi a, b, c, d astfel încât $a < x < b$, $c < y < d$ și $b \leq c$, atunci $x < y$.

Exemplu:
$1 < 1{,}02 < 2$ *și*
$2 < \sqrt{6} < 3$, *atunci* $1{,}02 < \sqrt{6}$.

Exersează!

3. Copiază, pe caiet, exercițiile următoare și scrie **A**, dacă afirmația este adevărată sau **F**, dacă afirmația este falsă.

a) $-3 > -5$; b) $-5 > 2$; c) $\sqrt{3} < \sqrt{7}$; d) $\sqrt{10} < 2\sqrt{3}$;

e) $-\sqrt{3} > -2$; f) $3\sqrt{7} > 7\sqrt{3}$; g) $-5\sqrt{2} > -4\sqrt{3}$; h) $3\sqrt{5} > 7{,}1$;

i) $\sqrt{\dfrac{4}{25}} < \dfrac{1}{2}$; j) $|-\sqrt{5}| < \left|\sqrt{5}\right|$; k) $|-3\sqrt{2}| > |-6|$; l) $|-\sqrt{2}| < -\left|\sqrt{2}\right|$.

4. Ordonează crescător următoarele numere reale:

a) $1;\ 2;\ 3;\ \sqrt{1};\ \sqrt{2};\ \sqrt{3}$; b) $\sqrt{7};\ 2{,}3;\ \sqrt{5};\ 2{,}5;\ \sqrt{6};\ 2{,}7$; c) $\sqrt{2{,}25};\ \dfrac{3}{2};\ \sqrt{2{,}56};\ 1{,}55;\ \dfrac{81}{50}$.

5. Ordonează crescător următoarele numere reale:

a) $\sqrt{15}$; $2\sqrt{5}$; $|-\sqrt{17}|$; $7\sqrt{2}$; 4;

b) $3\sqrt{5}$; 7; $|-5\sqrt{2}|$; $\sqrt{52}$; 8;

c) $4\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; -2; $|-7|$; -7;

d) $-3\sqrt{2}$; $(-2)^2$; -5; $-\sqrt{20}$; $-3\sqrt{3}$;

e) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $0{,}7$; $\sqrt{0{,}36}$; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{0{,}49}$;

f) $\sqrt{230}$; $11\sqrt{2}$; 12; $10\sqrt{3}$; $8\sqrt{5}$.

6. Ordonează crescător următoarele numere reale: $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{121}{12-1}}$; $\sqrt{4^2-3^2}$.

7. Află diferența dintre cel mai mic număr natural, mai mare decât $\sqrt{1\,073}$, și cel mai mare număr natural, mai mic decât $\sqrt{746}$.

Observă și descoperă!

8. Să vedem cum putem determina o parte dintre zecimalele unui număr irațional de forma $\sqrt{n}$ cu $n \neq k^2$, k număr natural. Să luăm, de exemplu pe $\sqrt{2}$.

Metoda 1	**Metoda 2**
Pasul 1: Îl încadrăm pe 2 între pătratele a două numere naturale consecutive ($1^2 < 2 < 2^2$) și astfel avem $1 < \sqrt{2} < 2$. **Pasul 2:** Comparăm $1{,}5^2$ cu 2. Avem $2{,}25 > 2$, de unde deducem că $1{,}5 > \sqrt{2}$, adică $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$. **Pasul 3:** Comparăm $1{,}4^2$ cu 2. Avem $1{,}96 < 2$, de unde deducem că $1{,}4 < \sqrt{2}$, adică $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.	**Pasul 1:** Scriu $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}}$. **Pasul 2:** Încadrez numărul 200 între pătratele a două numere naturale consecutive $14^2 < 200 < 15^2$. **Pasul 3:** Avem $\sqrt{\frac{14^2}{100}} < \sqrt{\frac{200}{100}} < \sqrt{\frac{15^2}{100}}$, adică $\frac{14}{10} < \sqrt{\frac{200}{100}} < \frac{15}{10}$, de unde $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

De aici, putem spune că $\sqrt{2}$ se aproximează prin lipsă cu o eroare mai mică de o zecime cu 1,4 sau se aproximează prin adaos cu o eroare mai mică de o zecime cu 1,5.

Putem continua procedeul, trecând acum la următoarea zecimală. Obținem, astfel, o aproximare prin lipsă, cu o eroare mai mică de o sutime, sau o aproximare prin adaos, cu o eroare mai mică de o sutime.

Exersează!

9. Compară pe 2 cu $1{,}41^2$ și $1{,}42^2$, pentru a găsi aproximarea prin lipsă cu o eroare mai mică de o sutime.

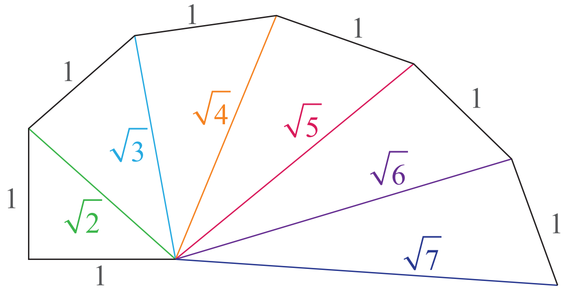
10. Găsește o aproximare prin lipsă, cu o eroare mai mică de o zecime, pentru numerele: $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{17}$.

11. Aproximează, prin lipsă, cu o eroare mai mică de o sutime, $3\sqrt{2}$ (aici folosește aproximarea lui $\sqrt{2}$) și $\sqrt{12}$.

Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări.
Modulul unui număr real (definiție, proprietăți)

Niciodată nu o să putem cunoaște valoarea exactă a unui număr irațional. Există, totuși, o categorie de numere iraționale pentru care putem construi segmente cu lungimea exact cât valoarea numărului irațional

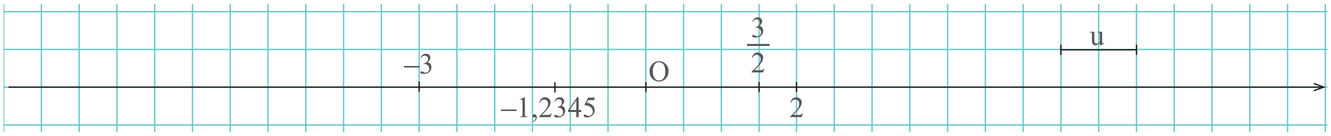
Vezi *Imaginea 8* cu **spirala lui Theodorus**.



Imaginea 8 - Spirala lui Theodorus

Amintește-ți!

1. În *Imaginea 9* sunt reprezentate, pe axa numerelor, numerele 2, -3, $\frac{3}{2}$ și $-1{,}2345$.



Imaginea 9 - Axa numerelor

Pentru a reprezenta numărul 2, au fost numărate, de la origine spre dreapta, două unități.

Pentru a reprezenta numărul întreg -3, au fost numărate, de la origine spre stânga, trei unități.

Pentru a reprezenta numărul rațional $\frac{3}{2}$, au fost numărate, de la origine spre dreapta, o unitate și jumătate, deoarece $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Pentru a reprezenta numărul rațional $-1{,}2345$, a fost folosită o aproximare prin adaos, cu o eroare mai mică decât o zecime, adică $-1{,}2$ și a fost numărat, de la origine spre stânga, ceva mai mult de o unitate, dar fără a trece de mijlocul celei de a doua unități.

2. a) Câte unități trebuie să numeri pentru a reprezenta, pe axa numerelor, numărul 7? În ce parte, față de origine, vei număra? Ce distanță este de la origine până la punctul corespunzător numărului 7?

b) Câte unități trebuie să numeri pentru a reprezenta, pe axa numerelor, numărul -8? În ce parte, față de origine, vei număra? Ce distanță este de la origine până la punctul corespunzător numărului -8?

c) Cum vei proceda pentru a reprezenta, pe axa numerelor, numărul $-\frac{5}{4}$? În ce parte, față de origine, vei număra? Ce distanță este de la origine până la punctul corespunzător numărului $-\frac{5}{4}$?

d) Cum vei proceda pentru a reprezenta, pe axa numerelor, numărul 2,(6)? În ce parte, față de origine, vei număra? Ce distanță este de la origine până la punctul corespunzător numărului 2,(6)?

3. Numerele iraționale se pot aproxima prin numere raționale. De exemplu, $1 < \sqrt{2} < 2$. Mai mult $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ și atunci spunem că putem aproxima numărul $\sqrt{2}$ cu 1,4 sau cu 1,5.

Aproximează, după modelul de mai sus, următoarele numere iraționale: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.

Important

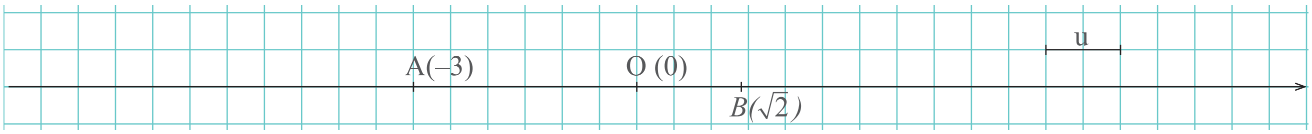
• Numerele iraționale se scriu ca fracții zecimale cu un număr infinit de zecimale care nu se repetă periodic.

• **Numerele iraționale se aproximează**, fie prin lipsă, fie prin adaos, **la numere raționale**.

• Pe axa numerelor, fiecărui număr real i se asociază un punct. Fiecare punct de pe axa numerelor corespunde unui număr real.

• Dacă x este un număr real, vom scrie $A(x)$ și vom citi **punctul** A **de abscisă** x.

Exemplu: Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor (Imaginea 10).



Imaginea 10 - Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

Numărului -3 i se asociază punctul A de abscisă -3. Distanța OA este de 3 unități.
Numărului $\sqrt{2}$ i se asociază punctul B de abscisă $\sqrt{2}$. Distanța OB este de $\sqrt{2}$ unități.

• Prin **modulul unui număr real (valoarea absolută a unui număr real)** înțelegem distanța de la originea axei numerelor până la punctul corespunzător numărului. Scriem $|x|$ și citim **modul de** x.

Exemplu: $|-3| = 3$ deoarece distanța OA este de 3 unități. $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ deoarece distanța OB este de $\sqrt{2}$ unități.

• Prin **numere reale opuse** înțelegem două numere reale, unul pozitiv, celălalt negativ, care au același modul.

Exemplu: 7 și -7 sunt numere opuse. $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$ sunt numere opuse.

• Dacă x este un număr pozitiv, modulul său este chiar x.

• Dacă x este un număr negativ, modulul său este opusul lui x.

• Modulul numărului 0 este 0.

• Putem scrie $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0; \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

Proprietăți ale modulului:

• Pentru orice două numere reale x și y avem $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

• Pentru orice două numere reale x și $y \neq 0$ avem $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

• Pentru orice două numere reale x și y avem $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului).

Exersează!

4. Aproximează numerele date, atunci când este cazul, și reprezintă-le pe axa numerelor, folosind o unitate de măsură de 1 centimetru:

$5;\ -3;\ 3{,}4;\ 3{,}(4);\ \sqrt{10};\ \sqrt{15};\ \sqrt{8};\ -\sqrt{2};\ -2\sqrt{3};\ \sqrt{\dfrac{64}{25}};\ -\sqrt{2{,}25};\ \sqrt{4{,}84}.$

5. Încadrează între doi întregi consecutivi următoarele numere și apoi reprezintă-le pe axa numerelor: $\sqrt{7};\ \sqrt{19};\ -\sqrt{99};\ \sqrt{320};\ -\sqrt{410};\ \sqrt{111};-\sqrt{903};\ -\sqrt{76};\ -\sqrt{501};\ \sqrt{600}.$

6. Scrie modulul numerelor:

$7;\ -111;\ 13{,}14;\ \dfrac{2}{5};\ -2{,}(5);\ \sqrt{21};\ \sqrt{35};\ \sqrt{18};\ -\sqrt{7};\ -3\sqrt{7};\ \sqrt{\dfrac{100}{121}};\ -\sqrt{6{,}25};\ \sqrt{2{,}56}.$

7. Verifică proprietățile modulului $\left(|x\cdot y| = |x|\cdot|y|,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ |x+y| \le |x|+|y|\right)$ pentru următoarele perechi de numere:

a) $x = 9$ și $y = -2$; b) $x = -3$ și $y = -2$; c) $x = \dfrac{1}{4}$ și $y = -4$; d) $x = -\dfrac{2}{3}$ și $y = \dfrac{3}{2}$.

8. Scrie opusul numerelor:

$7;\ -111;\ 13{,}14;\ \dfrac{2}{5};\ -2{,}(5);\ \sqrt{21};\ \sqrt{35};\ \sqrt{18};\ -\sqrt{7};\ -3\sqrt{7};\ \sqrt{\dfrac{100}{121}};\ -\sqrt{6{,}25};\ \sqrt{2{,}56}.$

9. Completează spațiile libere:

a) Modulul numărul $-\sqrt{7}$ este egal cu ... .

b) Numerele care au modulul egal cu 5 sunt ... .

c) Numerele întregi cu modulul mai mic sau egal cu 4 sunt ... .

d) Cel mai mic număr întreg cu modulul mai mic decât 10 este ... .

e) Numerele întregi cu modulul mai mic decât $\sqrt{8}$ sunt ... .

10. Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimilor date:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{5} < x < \sqrt{77}\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < \sqrt{11}\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 8\}$.

11. Problemă rezolvată Arată că dacă n este număr natural și $\sqrt{n}$ este număr rațional, atunci $\sqrt{n}$ este număr natural.

Rezolvare: Presupunem că $\sqrt{n}$ nu este număr natural. Atunci $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$ (1), cu a,b numere naturale $b \neq 1$ și a,b prime între ele. Din (1) avem $(\sqrt{n})^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, adică $n = \dfrac{a^2}{b^2}$. Cum a^2 și b^2 sunt prime între ele și $b^2 \neq 1$, rezultă că n nu este număr natural. Contradicție. Prin urmare $\sqrt{n}$ este număr natural.

12. Demonstrează că numărul $\sqrt{2n+3}$ este irațional, pentru orice valoare a lui n număr natural pentru care $5 < \sqrt{2n+3} < 7$.

13. Determină n număr natural pentru care numărul $\sqrt{2n+3}$ este rațional și $4 < \sqrt{2n+3} < 6$.

Recapitulare

1. Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:
a) $\sqrt{3} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; b) $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{3^2 + 4^2} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; d) $\sqrt{10{,}24} \in \mathbb{Q}$;
e) $\sqrt{2^3 \cdot 8^3} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; f) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; g) $\sqrt{1 + 3 + 5 + \ldots + 2\,019} \in \mathbb{Q}$.

2. Asociază fiecărui număr din coloana **A** descrierea corespunzătoare din coloana **B**, după model.

A	**B**
a) $\sqrt{36}$	1) număr natural
b) $\sqrt{42}$	2) număr rațional, dar nu întreg
c) $-\dfrac{5}{9}$	3) număr întreg, dar nu natural
d) -13	4) număr irațional
	5) număr real, dar nu rațional sau irațional

Model: $\sqrt{36}$ *este natural deoarece* $\sqrt{36} = 6$.

3. Reprezintă pe axa numerelor reale următoarele numere: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{2}$, $\sqrt{27}$, $3\sqrt{3}$, $-\sqrt{10}$, 5 și $\sqrt{15}$. Care este cel mai mic număr natural mai mare decât toate numerele enumerate mai sus? Dar cel mai mare număr întreg mai mic decât toate numerele din șir?

4. Introdu factorii sub radical: a) $5\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{5}$; c) $3\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{3}$; e) $3\sqrt{6}$; f) $6\sqrt{3}$.

5. Scoate factorii de sub radical: a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{84}$; c) $\sqrt{124}$; d) $\sqrt{675}$; e) $\sqrt{3\,072}$; f) $\sqrt{6\,300}$.

6. Compară numerele: a) 3 și $\sqrt{2}$; b) 5 și $2\sqrt{6}$; c) $4\sqrt{3}$ și 7; d) 14 și $8\sqrt{3}$; e) $5\sqrt{11}$ și 15; f) 9 și $4\sqrt{5}$; g) 8 și $3\sqrt{7}$; h) $7\sqrt{6}$ și $6\sqrt{7}$.

7. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| = a\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = a\}$, $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| = a\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = a\}$ și $E = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid |x| = a\}$, unde a este un număr real.

a) Pentru valorile $a = 1$, $a = -1$, $a = \dfrac{3}{2}$ și $a = \sqrt{2}$ reprezintă elementele acestor mulțimi pe axa numerelor reale.

b) Stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:
i) Dacă $a \in \mathbb{N}$, atunci $A = B = C = D$ și E este mulțimea vidă.
ii) Dacă $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, atunci A, B, C, D și E sunt toate egale cu mulțimea vidă.
iii) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci A, B, C și D coincid, iar E este nevidă.
iv) Pentru orice număr real a avem $A \subset B$, $B = C = D$ și $E = \varnothing$.

8. Determină numerele raționale x și y pentru care $16\sqrt{2} = \sqrt{x}$ și $\sqrt{y} = 12\sqrt{5}$.

9. Reprezintă pe axa numerelor numerele întregi pentru care $|x - 1| < \sqrt{7}$.

Evaluare

10p din oficiu

10p **1.** Încercuiește, dintre numerele de mai jos, pe acelea care reprezintă pătratul unui număr natural.

9, 26, 36, 100, 141, 256, 400, 1 000

10p **2.** Unește fiecare număr din coloana **A** cu descrierea corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
a) $\sqrt{23}$	1) număr natural
b) $\sqrt{49}$	2) număr rațional, dar nu întreg
c) $\dfrac{2}{7}$	3) număr întreg, dar nu natural
d) -3	4) număr irațional
	5) număr real, dar nu rațional sau irațional

10p **3.** Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

a) Rădăcina pătrată a numărului 81 este 9. ....

b) Rădăcina pătrată a numărului 8^{100} este 4^{100}. ....

10p **4.** Stabilește care dintre enunțurile următoare este adevărat.

a) $2 < \sqrt{3} < 3$ b) $\sqrt{11} > 3{,}3$

10p **5.** Scrie, în dreptul fiecărui enunț, litera **A**, dacă enunțul este adevărat, sau litera **F**, dacă enunțul este fals.

a) $\sqrt{25} + \sqrt{144} = \sqrt{25 + 144}$. ☐

b) $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$. ☐

10p **6.** Completează spațiile libere.

a) Modulul numărului $-\sqrt{7}$ este egal cu ....

b) Numerele care au modulul egal cu 5 sunt ....

10p **7.** Dacă $7\sqrt{3} = \sqrt{a}$ și $3\sqrt{7} = \sqrt{b}$, atunci $a - b =$ ....

10p **8.** Ordonează descrescător următoarele numere reale: $\sqrt{2^3}$, $\sqrt{12}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\left|-3\sqrt{3}\right|$.

10p **9.** Reprezintă, pe axa numerelor, numerele întregi x pentru care $|2x| < \sqrt{17}$.

Exersezi și progresezi

1. Compară numerele: a) $-3\sqrt{5}$ și $-5\sqrt{3}$; b) $-4\sqrt{2}$ și $-2\sqrt{4}$; c) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ și 0; d) $4\sqrt{5}-5\sqrt{4}$ și 0; e) $7\sqrt{6}-6\sqrt{7}$ și 0; f) $2\sqrt{3}+3\sqrt{5}+5\sqrt{2}$ și $\sqrt{23}-\sqrt{34}$.

2. Reprezintă pe axa numerelor reale, folosind aproximări, următoarele numere:
a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{29}$; d) $\sqrt{40}$; e) $\sqrt{41}$; f) $\sqrt{50}$; g) $\sqrt{52}$; h) $\sqrt{85}$.

3. Introdu factorii sub radicali: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{17}}$; $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{11}{13}}$; $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{125}{27}}$.

4. Verifică inegalitatea triunghiului pentru următoarele perechi de numere raționale:
a) $\left(-\frac{1}{2}\right)$ și $\left(+\frac{2}{3}\right)$; b) (-7) și $(+23)$; c) $\left(-\frac{3}{5}\right)$ și $\left(-\frac{5}{3}\right)$; d) $\left(+\frac{13}{6}\right)$ și $\left(-2\frac{1}{6}\right)$.
Exemplu: b) $|(-7)+(+23)| = |23-7| = 16 < 30 = 7+23 = |-7| + |+23|$.
Oferă, apoi, un exemplu de numere raționale pentru care are loc egalitate în inegalitatea triunghiului.

5. Fie mulțimea $A = \left\{\sqrt{\overline{x2y}} \mid x, y \text{ sunt cifre în sistemul de numerație cu baza } 10\right\}$. Determină $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$ și $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Este adevărată afirmația $A \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{Z} = A \cap \mathbb{Q}$?

6. Reprezintă, pe axa numerelor, numerele întregi care verifică: a) $|3x| < \sqrt{17}$; b) $|5x| < \sqrt{23}$; c) $\left|\frac{2x}{3}\right| \leq \sqrt{\frac{216}{36}}$; d) $\left|\frac{x}{2}\right| \leq \sqrt{5}$.

7. Fie $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{1\,000}\right\}$. Precizează: a) cel mai mic număr natural din A; b) cel mai mic număr irațional din A; c) cel mai mare număr natural din A; d) cel mai mare număr irațional din A; e) câte elemente raționale conține A; f) câte elemente iraționale mai mici decât 15 conține A.

8. Demonstrează că $\sqrt{n \cdot (n+1)}$ este un număr irațional, pentru orice valoare naturală nenulă a lui n.

9. **Lucrați în pereche**. Maria și Ioana au o cutie cu 100 de bomboane din care doresc să mănânce în timpul orei de matematică. Doamna profesoară le lasă să mănânce bomboane doar dacă vor folosi un joc matematic pentru a decide cât primește fiecare dintre ele. Pentru aceasta, doamna profesoară le-a propus următorul joc. Fiecare dintre ele își alege mai întâi câte o pereche de cifre nenule distincte cu care vor rămâne pentru tot restul jocului - mai întâi Ioana alege o cifră, apoi Maria două cifre, după care Ioana își alege ultima cifră. Apoi fiecare dintre ele își vor construi toate numerele de trei cifre pe care le pot forma cu ajutorul perechii de cifre alese. Pentru fiecare număr în parte, fetele vor calcula rădăcina pătrată a acestora, după care vor rotunji la ordinul unităților rezultatul obținut. În funcție de câți factori de doi conțin aceste rezultate, atâtea bomboane va primi fiecare. Spre exemplu, dacă Ioana își alege cifrele 2 și 5, atunci 255 și 522 reprezintă două posibile numere. Pentru acestea, Ioana va obține $\sqrt{255} \cong 15{,}96$ și $\sqrt{522} \cong 22{,}84$, deci după rotunjire numerele 16 și 23. Cum 16 are patru factori de 2, iar 23 niciunul, atunci Ioana va primi pentru aceste numere doar patru bomboane.

a) Câte bomboane va primi fiecare dintre fete dacă Ioana își alege perechea (3,4), iar Maria perechea (5,6)?

b) Dar dacă Maria își alege perechea (1,2), iar Ioana (4,8)?

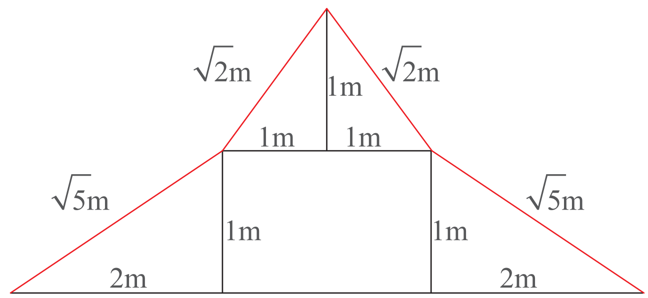
c) Câte bomboane rămân în cutie în fiecare dintre aceste cazuri?

Unitatea 3

Operații cu numere reale

Adunarea și scăderea numerelor reale

În fiecare zi suntem nevoiți să facem calcule. Cele mai multe calcule le facem cu numere raționale. Uneori, însă, suntem puși să operăm cu numere iraționale. O mare provocare!



Observă și descoperă!

1. Sara, Victor și Mihai primesc spre rezolvare următorul exercițiu:
Calculează $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$.
Observă cum a calculat fiecare dintre cei trei copii.

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$
$= 3 \cdot 1{,}41 + 5 \cdot 1{,}41 =$
$= 4{,}23 + 7{,}05 = 11{,}28$

Sara

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$
$= 3 \cdot 1{,}41 + 5 \cdot 1{,}41 =$
$= 1{,}41 \cdot (3 + 5) = 1{,}41 \cdot 8 =$
$= 11{,}28$

Victor

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$
$= \sqrt{2} \cdot (3 + 5) =$
$= 8\sqrt{2}$

Mihai

a) Care dintre cei trei copii crezi că a procedat corect?

b) Dacă trebuie să calculezi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ vei putea proceda așa cum a procedat Mihai sau cum a procedat Victor? Justifică răspunsul.

2. Sara și Victor au de calculat $\sqrt{12} + \sqrt{3}$. Observă cum au calculat cei doi copii, apoi rezolvă cerințele de mai jos.

$\sqrt{12} + \sqrt{3} = 3{,}46 + 1{,}73 = 5{,}19$

Sara

Pot scrie $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
Atunci $\sqrt{12} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Victor

a) Aproximează pe $\sqrt{3}$ prin lipsă cu o eroare mai mică decât o sutime.
b) Calculează $3\sqrt{3}$ folosind aproximarea găsită anterior.
c) Care dintre cei doi copii a procedat corect?

Important

• Adunarea și scăderea dintre un număr rațional și un număr irațional se efectuează folosind o aproximare a numărului irațional.

• Adunarea și scăderea între două numere de forma $a\sqrt{n}$, cu n număr natural, $n \neq k^2$, k număr natural, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalului, fie folosind una dintre următoarele reguli:

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n} = (a+b)\sqrt{n}$$

$$a\sqrt{n} - b\sqrt{n} = (a-b)\sqrt{n}$$

Exemple:
$4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$
$4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

• La adunarea și scăderea numerelor care conțin radicali **se scot factorii de sub radical**, dacă acest lucru este posibil.

Exemplu: $\sqrt{18} + \sqrt{32}$.
Avem $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$ *și* $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. *Atunci:*
$\sqrt{18} + \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

Adunarea numerelor reale are toate proprietățile adunării numerelor raționale:
• **este comutativă**: $x + y = y + x$, oricare ar fi numerele reale x și y.
• **este asociativă**: $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi numerele reale x, y și z.
• **are element neutru pe** 0: $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi numărul real x.
• **În raport cu adunarea, orice număr real** x **are un opus, pe** $-x$.
$x + (-x) = (-x) + x = 0$, oricare ar fi numărul real x.

Exersează!

3. Stabilește, în scris, dacă egalitățile de mai jos sunt adevărate (**A**) sau false (**F**).
a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$; b) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{10}$; c) $\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$;
d) $5\sqrt{13} - 2\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$; e) $3\sqrt{7} + \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$; f) $-5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$;
g) $6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$; h) $\sqrt{(-3)^2} = -3$; i) $\sqrt{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt{3}$;
j) $\sqrt{7 \cdot (-5)^2} = 5\sqrt{7}$; k) $\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} = -10\sqrt{3}$; l) $\sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{6}$.
Exemplu: a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ *- F*

4. Calculează:
a) $5\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$; b) $8\sqrt{5} - \sqrt{5}$; c) $3\sqrt{2} - 10\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$;
e) $-11\sqrt{11} - \sqrt{11}$; f) $-3\sqrt{7} + 8\sqrt{7}$; g) $10\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$; h) $-\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$.

5. Calculează, grupând termenii care conțin același radical, după model:
a) $3\sqrt{13} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{13} - 10\sqrt{5}$; b) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - \sqrt{5}$;
c) $-3\sqrt{2} - 4\sqrt{11} + 7\sqrt{11} - \sqrt{2}$; d) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{3} + \sqrt{7} + 5\sqrt{3}$;
e) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$; f) $-4\sqrt{7} - \sqrt{19} + \sqrt{19} + 4\sqrt{7}$.
Model: a) $3\sqrt{13} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{13} - 10\sqrt{5} = 3\sqrt{13} + 4\sqrt{13} + 2\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 7\sqrt{13} - 8\sqrt{5}$.

6. Calculează: a) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$; b) $\sqrt{162} - \sqrt{200}$; c) $\sqrt{125} + \sqrt{45} - 8\sqrt{5}$; d) $\sqrt{216} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$.

7. Problemă rezolvată. Explicitează următorul modul: $\left|4\sqrt{3}-7\right|$.
Rezolvare:

Cum gândesc	Cum scriu
Ca să eliminăm modulul, ar trebui să efectuez calculele, ceea ce nu este chiar ușor. E suficient însă să cunosc semnul rezultatului, iar pentru aceasta trebuie să compar $4\sqrt{3}$ cu 7. În acest scop, introduc factorii sub radical.	$\left\|4\sqrt{3}-7\right\| = \left\|\sqrt{48}-\sqrt{49}\right\|$
Acum este ușor de văzut că $\sqrt{48} < \sqrt{49}$, prin urmare rezultatul este negativ și din modul iese opusul numărului.	$\left\|4\sqrt{3}-7\right\| = \left\|\underbrace{\sqrt{48}-\sqrt{49}}_{-}\right\| = -\left(4\sqrt{3}-7\right) =$ $= -4\sqrt{3}+7$
Pentru a nu începe cu semnul minus (îl pot uita) prefer să comut termenii.	$\left\|4\sqrt{3}-7\right\| = \left\|\underbrace{\sqrt{48}-\sqrt{49}}_{-}\right\| = -\left(4\sqrt{3}-7\right) =$ $= -4\sqrt{3}+7 = 7-4\sqrt{3}$

8. Explicitează modulul: a) $\left|\sqrt{5}-\sqrt{7}\right|$; b) $\left|3-\sqrt{7}\right|$; c) $\left|\sqrt{5}-3\right|$; d) $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{7}\right|$; e) $\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right|$; f) $\left|4\sqrt{5}-9\right|$; g) $\left|5\sqrt{5}-4\sqrt{5}\right|$.

9. Calculează: a) $\left|1{,}4-\sqrt{2}\right|$; b) $\left|\sqrt{3}-1{,}7\right|$; c) $\left|4-3\sqrt{2}\right|-3\sqrt{2}$; d) $\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$; e) $\left|5\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right|-\left|6-3\sqrt{3}\right|$; f) $\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|$; g) $\left|8-3\sqrt{7}\right|+\left|2\sqrt{7}+\left|2-\sqrt{7}\right|\right|$.

10. În *Imaginea 1* este reprezentată schematic harta unei regiuni dintr-o țară. Fiecare oraș este reprezentat de câte un punct din imagine, iar fiecare segment reprezintă un drum care conectează două orașe.

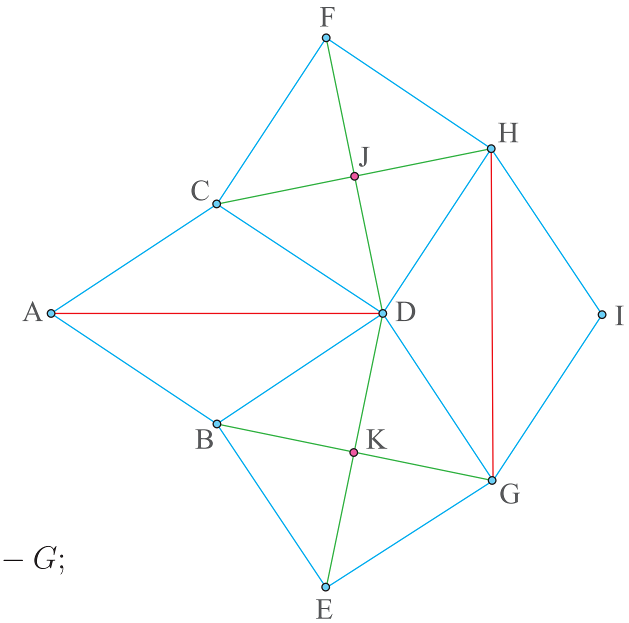
Toate segmentele albastre sunt congruente și au o lungime de $10\sqrt{13}$ km.

Cele două segmente roșii sunt și ele congruente și au lungimea de 60 km.

Segmentele verzi sunt considerate de tipul CJ și au o lungime de $5\sqrt{26}$ km.

Un curier realizează următoarele trasee:
- luni traseul $A-B-D-K-E-G-I$;
- marți traseul $I-H-J-F-C-A-D$;
- miercuri traseul $D-K-B-A-D-C-H-G$;
- joi traseul $G-I-H-J-D-A-B$;
- vineri traseul $B-K-G-D-H-F-C-A$.

Care este distanța totală parcursă de curier?



Imaginea 1 – Schema hărții unei regiuni

Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

Observă și descoperă!

1. Sara, Victor, Mihai și Ioana au de calculat $4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}$. Observă cum procedează fiecare pentru a efectua calculul.

Sara

$4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} =$
$= (4\cdot 1{,}4)\cdot(5\cdot 1{,}7) =$
$= 5{,}6\cdot 8{,}5 = 47{,}6$

$$\begin{array}{r} 5,6\ \times \\ 8,5 \\ \hline 280\ \\ 448\ \ \\ \hline 47,60\ \end{array}$$

Victor

$4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} =$
$= (4\cdot 1{,}41)\cdot(5\cdot 1{,}73) =$
$= 5{,}64\cdot 8{,}65 = 48{,}786$

$$\begin{array}{r} 5,64\ \times \\ 8,65 \\ \hline 2820\ \\ 3384\ \ \\ 4512\ \ \ \\ \hline 48,7860\ \end{array}$$

Sara, Victor și Mihai folosesc aproximări pentru a efectua calculele.

Mihai

$4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} =$
$= (4\cdot 1{,}414)\cdot(5\cdot 1{,}732) =$
$= 5{,}656\cdot 8{,}66 = 48{,}98096$

$$\begin{array}{r} 5,656\ \times \\ 8,66 \\ \hline 33936\ \\ 33936\ \ \\ 45248\ \ \ \\ \hline 48,98096\ \end{array}$$

Ioana

$4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} =$
$= \sqrt{4^2\cdot 2}\cdot\sqrt{5^2\cdot 3} =$
$= \sqrt{4^2\cdot 2\cdot 5^2\cdot 3} =$
$= 4\cdot 5\sqrt{2\cdot 3} = 20\sqrt{6} =$
$= 20\cdot 2{,}449 = 48{,}98$

Ioana nu folosește aproximări în efectuarea calculelor, ci la finalul acestora.

a) Care dintre copii au obținut cele mai bune aproximări?
b) Dintre Mihai și Ioana, care crezi că a calculat mai repede?

Important

Înmulțirea și împărțirea între un număr rațional și un număr irațional se efectuează folosind o aproximare a numărului irațional.

Înmulțirea și împărțirea a două numere de forma $a\sqrt{n}$, cu n număr natural, $n \neq k^2$, k număr natural, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalului, fie folosind una dintre următoarele reguli:

$$a\sqrt{n}\cdot b\sqrt{m} = a\cdot b\sqrt{n\cdot m}$$

$$(a\sqrt{n}) : (b\sqrt{m}) = (a : b)\sqrt{n : m}$$

Exemple: $4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{10}$.
$\left(28\sqrt{6}\right) : \left(7\sqrt{3}\right) = (28 : 7)\left(\sqrt{6} : \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{2}$.

ATENȚIE! Dacă este scris $a\sqrt{n} : b\sqrt{m}$, fără paranteze, nu se aplică regula de mai sus. Aici se respectă ordinea operațiilor, de la stânga spre dreapta, adică $a\cdot\sqrt{n} : b\cdot\sqrt{m}$.

Înmulțirea numerelor reale are toate proprietățile înmulțirii numerelor raționale:

- **este comutativă**: $x \cdot y = y \cdot x$, oricare ar fi numerele reale x și y;
- **este asociativă**: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, oricare ar fi numerele reale x, y și z;
- **are element neutru pe 1**: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, oricare ar fi numărul real x;
- **este distributivă față de adunare și scădere**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ și $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$, oricare ar fi numerele reale x, y și z.

În raport cu înmulțirea, orice număr real x, diferit de zero, are un invers, pe $\frac{1}{x}$.

$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, oricare ar fi numărul real $x \neq 0$.

Exersează!

2. Calculează:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$; b) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$; c) $\sqrt{18} : \sqrt{6}$; d) $8\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} : \left(2\sqrt{10}\right)$;
e) $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{7}$; f) $\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2}$; g) $\left(6\sqrt{9}\right) : \left(3\sqrt{3}\right)$; h) $\left(105\sqrt{20}\right) : \left(5\sqrt{10}\right)$;
i) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$; j) $8\sqrt{9} \cdot 6\sqrt{8} : \left(3\sqrt{6}\right)$; k) $10\sqrt{12} : \left(5\sqrt{4}\right) \cdot 3\sqrt{2}$; l) $8\sqrt{6} : \left(4\sqrt{2}\right) : \left(2\sqrt{3}\right)$.

3. Calculează, scoțând factori de sub radical, după model:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}$; b) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{72}$; c) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{90}$; d) $6\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{15}$;
e) $\sqrt{280} : \sqrt{5}$; f) $\left(120\sqrt{150}\right) : \left(30\sqrt{3}\right)$; g) $\left(630\sqrt{90}\right) : \left(14\sqrt{5}\right)$; h) $11\sqrt{320} : \sqrt{5}$;
i) $5\sqrt{162} \cdot 3\sqrt{10}$; j) $\frac{280\sqrt{160}}{35\sqrt{20}}$; k) $\frac{242\sqrt{338}}{11\sqrt{2}}$; l) $\frac{510\sqrt{405}}{15\sqrt{5}}$.

Model: c) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{90} = \sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} = 15\sqrt{60} = 30\sqrt{15}$.

4. Calculează:

a) $\sqrt{16} : \sqrt{2} + \sqrt{18}$; b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} - 2\sqrt{75}$; c) $\sqrt{120} : \sqrt{10} - \sqrt{15} : \sqrt{5}$;
d) $\left(\sqrt{8} + \sqrt{50}\right) \cdot 3\sqrt{2} - 10$; e) $\sqrt{20} + \left(3\sqrt{10}\right) : \left(3\sqrt{2}\right) - \sqrt{5}$; f) $\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} + 8\sqrt{20} : 2$;
g) $\sqrt{20} : \sqrt{2} + 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}$; h) $-\sqrt{45} + \sqrt{30} \cdot \sqrt{2} : \left(2\sqrt{3}\right)$; i) $\sqrt{100} : \sqrt{2} - \sqrt{40} : \sqrt{5}$.

5. Calculează:

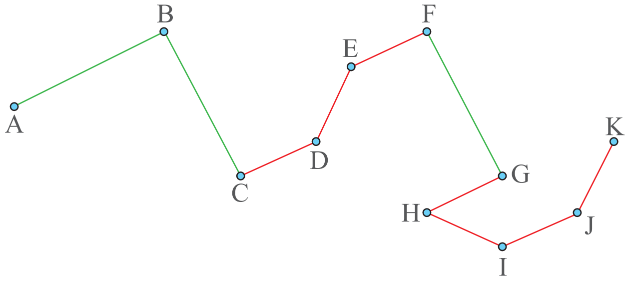
a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{6} - 2\sqrt{10}\right)$; c) $3 \cdot \left(\sqrt{20} + \sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{5} + 3\right)$;
d) $\left(\sqrt{18} + \sqrt{12}\right) \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{216}$; e) $\sqrt{20} + 3\sqrt{10} \cdot \left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$; f) $\sqrt{6} \cdot \left(3\sqrt{10} + 8\sqrt{20} : 2\right)$.

6. Cât este perimetrul unui pătrat a cărui latură are lungimea $3\sqrt{5}$ cm?

7. Lățimea unui dreptunghi are $6\sqrt{2}$ cm. Determină perimetrul acestui dreptunghi, ştiind că lungimea sa este de trei ori mai mare decât lăţimea.

8. Un șofer își dorește să parcurgă un traseu, ca cel din *Imaginea 2*. El cunoaște faptul că lungimile drumurilor AB, BC și FG sunt egale cu $10\sqrt{20}$ km, iar celelalte lungimi de drumuri sunt egale cu $2\sqrt{125}$ km.

El observă, pe harta interactivă de pe telefonul său, că sunt anumite porțiuni de drum în care traficul este îngreunat, iar acele porțiuni sunt marcate cu roșu.



Imaginea 2 – Schema unui traseu

Drumurile marcate cu verde reprezintă porțiunile de drum în care el poate circula normal.

De-a lungul timpului, el a observat că raportul dintre valoarea distanței parcursă, exprimată în kilometri, și valoarea volumului de carburant consumat de mașina sa, exprimat în litri, este aproximativ $\sqrt{222}$ atunci când traficul este normal și $\sqrt{125}$ atunci când traficul este îngreunat (raportul este mai mic în ultimul caz deoarece mașina este nevoită să frâneze și să accelereze de mai multe ori, deci consumă mai mult carburant).

a) Care este lungimea traseului pe care șoferul și-a propus să îl parcurgă?

b) Dacă prețul unui litru de carburant este de 6 lei, cât va cheltui șoferul pe carburant pentru a parcurge acel traseu?

9. Efectuează următoarele operații: a) $\sqrt{2^0}\cdot\sqrt{2^1}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2^{10}}$; b) $\sqrt{3^0}\cdot\sqrt{3^1}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{3^{10}}$.

10. Folosindu-te de exemplul următor, calculează celelalte produse:

Exemplu: Dorim să calculăm $\sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}$.

Pentru aceasta, observăm că $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$, *pentru orice* $n\in N^*$. *Prin urmare, avem:*

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

a) $\sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2\,019}}$;

b) $\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2\,019}}$;

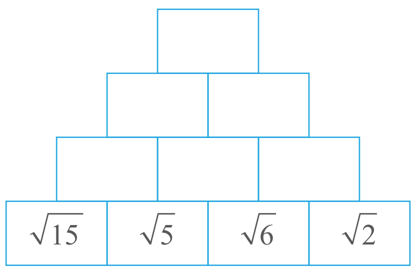
c) $\sqrt{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{11}}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{23}}$;

d) $\sqrt{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{2-\frac{1}{9}}$.

Joc

Piramida numerelor reale.

Completează fiecare căsuță cu rezultatul înmulțirii sau împărțirii numerelor din cele două căsuțe aflate sub ea, astfel încât, în vârful piramidei să obții un număr natural.



Puteri cu exponent număr întreg. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

Observă și descoperă!

1. Sara îi spune lui Victor: *Sunt convinsă că poți calcula atât* 2^5 *cât și* 2^{-5}. *Dar* $\left(\sqrt{2}\right)^5$ *sau* $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}$ *poți calcula?*

Observă cum a procedat Victor pentru a-i oferi Anei un răspuns.

Cum a gândit Victor	Cum a scris Victor
Ridicarea la putere este de fapt o înmulțire repetată; repetată de atâtea ori cât ne arată exponentul.	$\left(\sqrt{2}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)$
Știu să înmulțesc radicalii; se înmulțesc numerele de sub radical.	$\left(\sqrt{2}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$

a) Folosește procedeul lui Victor și calculează $\left(\sqrt{3}\right)^2$ și $\left(\sqrt{13}\right)^2$.

b) Cum crezi că va proceda Victor pentru a calcula $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}$?

Indiciu:
Amintește-ți că, dacă a este număr rațional nenul și n număr natural, atunci $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Important

- Dacă $a \geq 0$ este un număr real și n este un număr natural, atunci $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$.

Exemplu: $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$.

- Dacă $a \geq 0$ este un număr real, atunci $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemplu: $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

- Dacă $a > 0$ este un număr real și n este un număr natural, atunci $(\sqrt{a})^{-n} = \dfrac{1}{(\sqrt{a})^n}$.

Exemplu: $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$.

Regulile de calcul cu puteri de la numere raționale sunt valabile și **pentru numere reale**:
- $x^0 = 1$, oricare ar fi x număr real nenul;
- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, oricare ar fi x număr real nenul, iar n și m numere întregi;
- $x^n : x^m = x^{n-m}$, oricare ar fi x număr real nenul, iar n și m numere întregi;
- $(x^n)^m = x^{n\cdot m}$, oricare ar fi x număr real nenul, iar n și m numere întregi;
- $x^n \cdot y^n = (x\cdot y)^n$, oricare ar fi x și y numere reale nenule, iar n număr întreg;
- $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$, oricare ar fi x, y numere reale nenule, iar n număr întreg.

Exersează!

2. Calculează: a) $\left(\sqrt{3}\right)^5$; b) $\left(\sqrt{7}\right)^3$; c) $\left(\sqrt{6}\right)^3$; d) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; e) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; f) $\left(\sqrt{15}\right)^2$; g) $\left(\sqrt{61}\right)^2$.

3. Scrie sub formă de putere:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3$; b) $\left(\sqrt{7}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^{12}$; c) $\left(\sqrt{6}\right)^3 : \left(\sqrt{6}\right)^2$;

d) $\left(\sqrt{6}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{6}\right)^{-11}$; e) $\left(\sqrt{11}\right)^2 : \left(\sqrt{11}\right)^5$; f) $\left(\sqrt{15}\right)^3 : \left(\sqrt{15}\right)^4$;

g) $\left(\sqrt{61}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{61}\right)^{-5}$; h) $\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^5$; i) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^3$;

j) $\left(\sqrt{6}\right)^3 : \left(\sqrt{2}\right)^3$; k) $\left(\sqrt{15}\right)^5 : \left(\sqrt{5}\right)^5$; l) $\left(\sqrt{12}\right)^{-7} : \left(\sqrt{6}\right)^{-7}$;

m) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^5\right)^3$; n) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-3}\right)^3$; o) $\left(\sqrt{3}\right)^{3^3}$.

4. Calculează, după model:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-5}$; b) $\left(\sqrt{7}\right)^3$; c) $\left(\sqrt{2}\right)^7$; d) $\left(3\sqrt{5}\right)^2$;

e) $\left(2\sqrt{5}\right)^3$; f) $\left(-7\sqrt{3}\right)^2$; g) $\left(-5\sqrt{2}\right)^3$; h) $\left(-\sqrt{3}\right)^5$;

i) $\left(\sqrt{7}\right)^{-2}$; j) $\left(\sqrt{5}\right)^4$; k) $\left(-\sqrt{3}\right)^{-5}$; l) $\left(-3\sqrt{2}\right)^{-2}$.

Model: a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-5} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5} = \dfrac{1}{\sqrt{3^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^4 \cdot 3}} = \dfrac{1}{3^2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{9\sqrt{3}}$.

Observă și descoperă!

5. Sara și Victor au de calculat $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Fiecare a procedat ca mai jos:

Sara	Victor
$^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{3} + {}^{3)}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}}$ Sara	$\dfrac{1}{3} + {}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$ Victor
Sara a procedat corect spunând că numitorul comun este $3\sqrt{3}$.	Victor a procedat corect spunând $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$, deci este suficient să amplific a doua fracție cu $\sqrt{3}$.

a) Dacă ar fi nevoie să calculezi valoarea aproximativă a rezultatului calculului $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, pe care dintre cele două rezultate le-ai folosi, pe cel dat de Sara sau pe cel dat de Victor?

b) Argumentează alegerea făcută.

Important

Dacă o fracție are la numitor un număr de forma $a\sqrt{b}$, cu a și b numere reale nenule, $b > 0$, atunci, prin amplificarea fracției cu $\sqrt{b}$, dispare radicalul de la numitor. Acest procedeu se numește **raționalizarea numitorului**.

$^{\sqrt{b})}\dfrac{1}{a\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}}{ab}$, oricare ar fi a și b numere reale nenule, $b > 0$.

Exemplu: $^{\sqrt{5})}\dfrac{1}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

Exersează!

6. Raţionalizează numitorii şi simplifică, dacă este posibil, după model:

a) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; e) $\frac{-3}{\sqrt{5}}$; f) $\frac{14}{-\sqrt{7}}$;

g) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; h) $-\frac{21}{\sqrt{7}}$; i) $-\frac{5}{\sqrt{11}}$; j) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; k) $\frac{11}{-\sqrt{5}}$; l) $\frac{12}{-\sqrt{3}}$.

Model:
a) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

7. Lucraţi în perechi. Scoateţi factorii de sub radical și, dacă este posibil, simplificaţi şi apoi raţionalizaţi numitorii, după model:

a) $\frac{18}{\sqrt{72}}$; b) $\frac{10}{\sqrt{75}}$; c) $-\frac{22}{\sqrt{242}}$; d) $\frac{14}{\sqrt{147}}$; e) $\frac{19}{\sqrt{32}}$; f) $\frac{-20}{\sqrt{125}}$;

g) $\frac{8}{\sqrt{54}}$; h) $\frac{3}{-\sqrt{72}}$; i) $\frac{-7}{\sqrt{200}}$; j) $\frac{26}{\sqrt{507}}$; k) $\frac{-9}{\sqrt{800}}$; l) $\frac{12}{\sqrt{243}}$.

Model: a) $\frac{18}{\sqrt{72}} = \frac{18}{6\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. Efectuează următoarele operații:

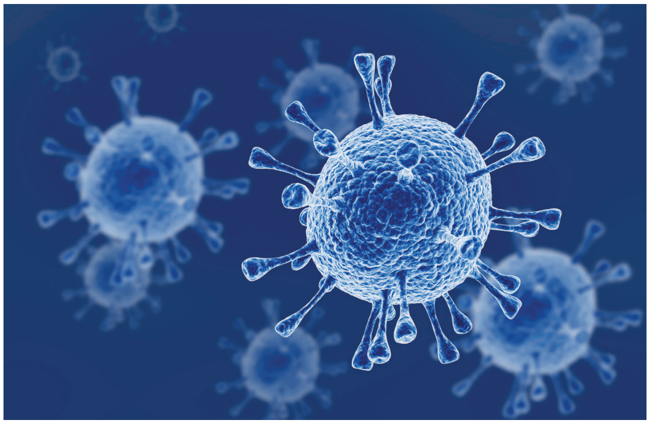
a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{1}{\sqrt{50}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{48}} + \frac{1}{\sqrt{75}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \frac{1}{\sqrt{48}} \cdot \frac{1}{\sqrt{75}}$.

9. O populație de bacterii are următoarele proprietăți: la fiecare trei minute, numărul acestora crește de aproximativ $\sqrt{2}$ ori, iar la fiecare 15 minute, din cauza unor factori externi, numărul acestora scade de aproximativ $\sqrt{5}$ ori.

Dacă, inițial, numărul bacteriilor a fost estimat la un milion de astfel de bacterii, care va fi numărul lor după o oră?

Ce poți spune despre numărul bacteriilor: crește sau scade pe măsură ce timpul trece?



Imaginea 3 – Populație de bacterii

10. Efectuează următoarele operații:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{10}$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-10}$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{10}$; d) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-10}$.

Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive

Ecranul unui televizor, formatul imaginii de film sau imaginile video au legătură cu media geometrică.

Observă și descoperă!

1. Un automobil are de parcurs o distanță în 10 ore.
Tabelul 1 ne arată cu ce viteză s-a deplasat automobilul în fiecare din cele 10 ore.

Ora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Viteza (km/h)	40	30	40	60	60	50	40	40	80	60

Tabelul 1

Conform datelor din *Tabelul 1*, răspunde la următoarele întrebări:
a) Câte ore a mers automobilul cu viteza de 60 km/h?
b) În a câta oră a avut automobilul cea mai mare viteză?

2. Sara și Victor calculează distanța parcursă de automobil în cele 10 ore. Observă cum a procedat fiecare.

$40+30+40+60+60+50+40+40+80+60 = 500$

Sara a adunat cele 10 numere.

$40 \cdot 4 + 30 + 60 \cdot 3 + 50 + 80 =$
$= 160 + 30 + 180 + 50 + 80 = 500$
Victor a observat că numărul 40 apare de patru ori, iar numărul 60 apare de trei ori.

Dacă s-ar fi deplasat cu o viteză constantă, pe aceeași distanță (500 km), în același interval de timp (10 ore), care ar fi fost această viteză?

Important

• Prin **media aritmetică** a mai multor numere înțelegem suma numerelor împărțită la câte numere sunt.

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

unde a_1, a_2, ..., a_n sunt numere reale.

Exemplu: Media aritmetică a numerelor 40, 30, 40, 60, 60, 50, 40, 40, 80 *și* 60 *este:*

$$\frac{40+30+40+60+60+50+40+40+80+60}{10} = \frac{500}{10} = 50.$$

• Dacă într-o situație dată, un număr a apare de p ori, atunci spunem că **numărul** a **are ponderea** p.

Exemplu: În problema cu automobilul numărul 40 *are ponderea* 4*, numărul* 60 *are ponderea* 3*, iar celelalte numere au ponderea* 1.

• Prin **media aritmetică ponderată** a numerelor a_1, a_2, ..., a_k având ponderile p_1, p_2, ..., p_k înțelegem suma dintre fiecare număr înmulțit cu ponderea lui împărțită la suma ponderilor.

$$m_{ap} = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_k \cdot p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k},$$

unde a_1, a_2, ..., a_k sunt numere reale și p_1, p_2, ..., p_k sunt respectiv ponderile acestor numere.

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numerelor 40 *cu ponderea* 4*,* 60 *cu ponderea* 3 *și a numerelor* 30*,* 50*, respectiv* 80 *cu ponderea* 1 *fiecare este:*

$$m_{ap} = \frac{40 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 30 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 1}{4+3+1+1+1} = \frac{500}{10} = 50.$$

• Prin **media geometrică** a două numere reale pozitive înțelegem radical din produsul lor.

$$m_g = \sqrt{a \cdot b},$$

unde a și b sunt numere reale pozitive.

Exemplu: Media geometrică a numerelor 2 *și* 18 *este:*

$$m_g = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$

Exersează!

3. Calculează media ponderată a numerelor:

a) 7, 15 şi 12 cu ponderile 6, 4, respectiv 5;

b) 3, 7, 5 şi 2 cu ponderile 4, 3, 7, respectiv 9;

c) 11, 9 şi 4 cu ponderile 2, 3, respectiv 4.

4. Un baschetbalist a marcat într-un sezon, câte 18 puncte în 7 meciuri, câte 10 puncte în 6 meciuri, câte 12 puncte în 10 meciuri şi câte 5 puncte în 3 meciuri. Care este media punctelor marcate de baschetablist într-un meci din acel sezon?

5. Calculează media geometrică a următoarelor numere:

a) 25 şi 16; b) 8 şi 10; c) 8 şi 16; d) 15 şi 27; e) 100 şi 3;

f) $\frac{6}{5}$ şi $\frac{8}{15}$; g) $\frac{4}{21}$ şi $\frac{7}{3}$; h) $5\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{34}$; i) $1\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2}$; j) $5\frac{1}{4}$ şi 3.

6. Media geometrică a două numere este 52. Află al doilea număr, ştiind că primul este 26.

7. Media geometrică a două numere este 56. Află al doilea număr, ştiind că primul este 14.

8. Calculează media geometrică a numerelor:

a) $5\sqrt{3}$ şi $15\sqrt{3}$; b) $10\sqrt{5}$ şi $8\sqrt{5}$; c) $3\sqrt{7}$ şi $6\sqrt{7}$;

d) $4\sqrt{27}$ şi $\sqrt{48}$; e) $\sqrt{15}$ şi $\sqrt{135}$; f) $5\sqrt{32}$ şi $3\sqrt{18}$.

9. O companie nouă încheie primul an financiar cu un profit de 20 000 de lei. După un alt an, profitul companiei crește cu 69%. În următorul an, profitul acesteia crește cu doar 44%.

a) Calculează care sunt profiturile în ultimii doi ani.

b) Calculează media aritmetică a procentelor care reprezintă creșterile profiturilor. Dacă aplici această creștere de două ori profitului inițial, obții rezultatul obținut la punctul a)?

c) Verifică acum următoarea afirmație: „Dacă profitul crește cu 69%, atunci e o situație echivalentă cu cea în care profitul se înmulțește cu 1,69".

d) Calculează media geometrică a numerelor 1,69 și 1,44. Transformă noul coeficient obținut în raport procentual (precum în cazul afirmației de la punctul c)) și aplică această creștere de două ori profitului inițial. Coincide acum noul rezultat cu cel obținut la punctul a)?

e) Care dintre cele două instrumente – media aritmetică și media geometrică – a fost potrivită pentru descrierea creșterii medii în acest caz?

10. Lucrați în pereche. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate **A** și care sunt false **F**:

a) Media geometrică a numerelor 169 și 225 este cuprinsă între 169 și 225.

b) Media ponderată a numerelor 169 și 225 cu ponderile 225 și 169 este cuprinsă între 169 și 225.

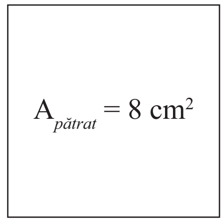
c) Media geometrică a numerelor 169 și 225 este mai mare decât media aritmetică ponderată a numerelor 169 și 225 cu ponderile egale între ele.

d) Media aritmetică ponderată a numerelor $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ și $\sqrt{72}$ cu ponderile 6, 2 și 1 este mai mică decât 3.

Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Uneori suntem puși în situația de a găsi un număr al cărui pătrat este cunoscut.

Gândește-te că trebuie să determini lungimea laturii unui pătrat a cărui arie este cunoscută.



Observă și descoperă!

1. În *Figura 1* punctul O este originea unei axe a numerelor, $DO \perp Ox$ și $DO = 4u$.

Ce abscisă trebuie să aibă un punct A de pe axa numerelor pentru ca $DA = 5u$?

Pentru a răspunde la întrebare, Victor procedează astfel:

Alege $A(x)$ un punct pe axa numerelor și atunci, în triunghiul dreptunghic OAD, din *Figura 2*, are $DO = 4u$, $DA = 5u$ și $OA = xu$.

Din teorema lui Pitagora $x^2 + 4^2 = 5^2$.

De aici $x^2 = 9$ și Victor trage concluzia că abscisa punctului A este 3.

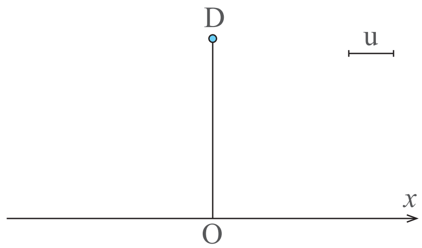


Figura 1

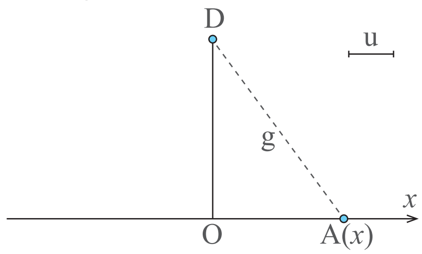


Figura 2

2. Este posibil ca punctul A să aibă și altă abscisă? Justifică răspunsul dat.

Important

Dacă avem de rezolvat ecuația $x^2 = a$, unde a este un număr real, gândim astfel:

- Dacă $a < 0$, ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor reale; pentru orice număr real x, avem $x^2 \geq 0$.
- Dacă $a = 0$, ecuația are o singură soluție, $x = 0$; 0 este singurul număr real pentru care $0^2 = 0$.
- Dacă $a > 0$, ecuația are două soluții în mulțimea numerelor reale; $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$.

Justificare:

Dacă $a > 0$, din $x^2 = a$ rezultă $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$. De aici $|x| = \sqrt{a}$.

Putem avea $x = \sqrt{a}$, dacă $x > 0$ sau $x = -\sqrt{a}$, dacă $x < 0$.

Indiciu: Am folosit:

$A = B \Leftrightarrow \sqrt{A} = \sqrt{B}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Exersează!

3. **Lucrați în pereche**. Alegeți varianta corectă:

a) Soluţia negativă a ecuaţiei $x^2 = 5$ este:

A. $x^2 = -5$; B. $x = -25$; C. $x = -\sqrt{5}$; D. $x = \sqrt{5}$.

b) Numărul de soluţii ale ecuaţiei $x^2 = -7$ este:

A. 0; B. 3; C. 1; D. 2.

c) Care din următoarele ecuaţii are două soluţii reale?

A. $x^2 = -13$ B. $x^2 = 13$ C. $x^2 = 0$ D. $x^2 + 13 = 0$.

d) Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 = a$, unde a este un număr real pozitiv este:

A. a; B. $-a$; C. a^2; D. 0.

4. Determină soluţiile reale ale următoarelor ecuaţii:

a) $x^2 = 36$; b) $x^2 = -5$; c) $x^2 = 0$; d) $x^2 = 8$;
e) $x^2 = 162$; f) $x^2 - 5 = 90$; g) $-x^2 = -18$; h) $-x^2 = 35$;
i) $x^2 + 35 = 250$; j) $5x^2 = 250$; k) $-3x^2 = -1\,029$; l) $4x^2 - 13 = 203$.

5. Află lungimea laturii unui pătrat care are aria egală cu: a) 35 cm^2; b) 50 cm^2; c) 63 cm^2; d) 100 cm^2.

6. Aria unui pătrat este 72 cm^2. Latura pătratului se măreşte de două ori. De câte ori se măreşte aria? Dar dacă latura pătratului se măreşte de trei ori, aria de câte ori se măreşte? Ce observi?

7. În *Imaginea 4* avem reprezentată o masă pe care se află un glob de sticlă. După cum poţi observa, pisica Kiddo se află și ea prin preajmă. Cum, de obicei, pisicile nu se pot abține în a arunca obiecte de pe masă, Kiddo împinge orizontal globul de pe masă.

Stăpânul dorește să prindă globul, însă nu are foarte mult timp la dispoziție. Din fizică cunoaștem legătura dintre înălțime și timp la căderea liberă; $h = g\dfrac{t^2}{2}$, unde h reprezintă înălțimea, t reprezintă timpul în care globul ajunge jos și g reprezintă accelerația gravitațională, cu valoarea aproximativă $g = 9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Imaginea 4 – Pisica împinge o bilă de pe masă

Dacă înălțimea mesei este de 1 m, calculează cât timp va dura până când globul va atinge podeaua.

Dar dacă globul de sticlă ar fi împins de la înălțimea de 100 de metri?

Recapitulare

1. Scoate factorii de sub radical:

a) $\sqrt{6^2}$; b) $\sqrt{(-5)^2}$; c) $\sqrt{3^8}$; d) $\sqrt{72}$;

e) $\sqrt{81}$; f) $\sqrt{3^5}$; g) $\sqrt{7^3 \cdot 3^2 \cdot 2^7}$; h) $\sqrt{(-7)^4}$;

i) $\sqrt{9\,800}$; j) $\sqrt{10\,125}$; k) $\sqrt{6\,300}$; l) $\sqrt{3\,150}$.

2. Calculează şi scoate de sub radical factorii de la rezultat, atunci când este posibil:

a) $3\sqrt{5}+\sqrt{5}$; b) $3\sqrt{5}-\sqrt{5}$; c) $3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$; d) $3\sqrt{5}:\sqrt{5}$;

e) $7\sqrt{5}-12\sqrt{5}$; f) $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$; g) $\left(10\sqrt{15}\right):\left(5\sqrt{3}\right)$; h) $\left(18\sqrt{21}\right):\left(6\sqrt{7}\right)$.

3. Calculează:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; b) $\left(-\sqrt{2}\right)^2$; c) $\left(-\sqrt{2}\right)^3$; d) $\left(5\sqrt{7}\right)^2$;

e) $\left(-2\sqrt{3}\right)^3$; f) $\left(-\sqrt{11}\right)^0$; g) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$; h) $\left(3\sqrt{2}\right)^4$;

i) $\left(-5\sqrt{3}\right)^2$; j) $\left(11\sqrt{11}\right)^2$; k) $\left(-5\sqrt{2}\right)^3$; l) $\left(-\sqrt{7}\right)^5$.

4. Raţionalizează numitorul:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{-5}{3\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{11}{-3\sqrt{11}}$; e) $-\dfrac{15}{2\sqrt{5}}$; f) $-\dfrac{90}{\sqrt{6}}$.

5. Calculează: a) $5\sqrt{18}+3\sqrt{2}-\sqrt{98}$; b) $7\sqrt{5}+2\sqrt{125}-\sqrt{20}$; c) $4\sqrt{7}-3\sqrt{28}+\sqrt{7}$.

6. Calculează, raționalizând numitorul:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}-\sqrt{27}$; b) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}+\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-2\sqrt{50}$; c) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}+\dfrac{7}{3\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

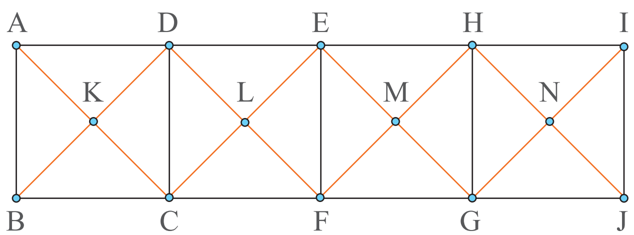
7. Calculează media geometrică a numerelor:

a) 6 şi 8; b) 10 şi 15; c) $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{27}$; d) $2\sqrt{45}$ şi $3\sqrt{20}$; e) $7\sqrt{5}$ şi $\sqrt{125}$.

8. Rezolvă ecuaţiile:

a) $x^2=25$; b) $x^2=-16$; c) $3x^2=0$; d) $x^2+5=15$; e) $x^2:3=15$.

9. În *Imaginea 5* este reprezentată schematic o secțiune a unei grinzi de oțel în care segmentele de aceeași culoare sunt congruente. Dacă lungimea segmentului AB este de 1,53 m, lungimea segmentului AK este de $0{,}765\sqrt{2}$ m, iar dacă prețul unui metru liniar de oțel folosit pentru această grindă este de 59,41 lei, calculează costul aproximativ pentru achiziționarea materialelor necesare pentru construcția unei astfel de grinzi.



Imaginea 5 – Secțiune a unei grinzi

Evaluare

10p din oficiu

10p **1.** Asociază fiecare operație din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	**B**
a) $4\sqrt{3}+\sqrt{3}$	1) $2\sqrt{9}$
b) $5\sqrt{8}-\sqrt{2}$	2) $5\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$	3) 5
d) $2\sqrt{8}:2\sqrt{2}+3$	4) $9\sqrt{2}$
e) $\left(\sqrt{2}\right)^2$	5) 6
	6) 2

10p **2.** Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

a) $\sqrt{(-5)^2}=-5$; ☐

b) Media geometrică a numerelor $4\sqrt{5}$ şi $\sqrt{125}$ este 10. ☐

10p **3.** Completează enunțurile de mai jos:

a) Dacă scoți factorii de sub radical, atunci $\sqrt{32}\cdot 2\sqrt{162}=\ldots$.

b) $\left(-\sqrt{5}\right)^{-2}=\ldots$.

10p **4.** Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Ecuația $-5x^2=-250$

A. nu are soluții în $\mathbb{R}$; B. are soluția $x=5$;

C. are soluțiile 5 și -5; D. are soluțiile $5\sqrt{2}$ și $-5\sqrt{2}$.

10p **5.** Determină numărul întreg x pentru care $\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}+\left|3-\sqrt{8}\right|$ este număr natural.

10p **6.** Media geometrică a două numere este egală cu 56. Determină al doilea număr, ştiind că primul este egal cu 14.

10p **7.** Calculează, raționalizând numitorii $\dfrac{4-3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{3\sqrt{6}-2}{3\sqrt{3}}+\dfrac{3+2\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}$.

20p **8.** Un teren în formă de dreptunghi are dimensiunile egale cu $\sqrt{8}$ m, respectiv $5\sqrt{2}$ m.

a) Află aria suprafeței terenului.

b) Arată că lungimea gardului necesar pentru a împrejmui terenul este mai mare de 19 m.

Exersezi și progresezi

1. Calculează:

a) $5\sqrt{3}+7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$; c) $-\sqrt{7}-4\sqrt{7}+3\sqrt{7}$;

d) $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}+\sqrt{6}$; e) $\left(6\sqrt{12}\right):\left(3\sqrt{3}\right)-5$; f) $3\sqrt{2}+7\sqrt{6}:\sqrt{3}$;

g) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}:\dfrac{2}{\sqrt{6}}+\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$; h) $\dfrac{\sqrt{45}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{2}{5}$; i) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}:\dfrac{4}{\sqrt{21}}$.

2. Determină numerele reale x, y și z știind că:

a) $\left|x-\sqrt{2}\right|+\left|y+\sqrt{3}\right|+|z-3|=0$;

b) $||x|-1|+\left|y-\left|1-\sqrt{3}\right|\right|+|2-z|=0$.

3. Un teren are forma unui dreptunghi $MNPQ$ cu $MN=8\sqrt{5}$ m şi $MQ=4\sqrt{3}$ m.

a) Află lungimea gardului ce înconjoară terenul.

b) Arată că lungimea gardului terenului este mai mare de 49 m.

4. Completează pătratele magice de mai jos, ştiind că sumele de pe fiecare linie, coloană, respectiv, diagonală sunt aceleaşi.

a)

$\dfrac{6}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{108}$
	$5\sqrt{3}$	
		$4\sqrt{12}$

b)

		$7\sqrt{8}$
$\sqrt{242}$	$13\sqrt{2}$	
$\dfrac{24}{\sqrt{2}}$		

5. 5 litri de apă cu temperatura de 180°C se amestecă cu 4 litri de apă cu temperatura de 270°C. Ce temperatură va avea amestecul?

6. Un producător are 80 kg de mere de calitatea a doua la prețul de 2 lei kilogramul și 120 kg de mere de calitatea întâi la prețul de 5 lei kilogramul. Pentru a le vinde mai ușor, amestecă merele din cele două calități.

Cu ce preț trebuie să vândă merele pentru a obține aceeași sumă de bani ca atunci când le-ar vinde separat?

7. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $2x^2=98$; b) $\dfrac{x^2}{4}=36$; c) $3x^2=9$; d) $4x^2=20$; e) $\dfrac{x^2}{3}=\dfrac{75}{2}$; f) $x^2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

Unitatea **4**

Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

În viața de zi cu zi ne punem de foarte multe ori întrebarea: „ceva este egal cu altceva?”

De exemplu: Nota mea este egală cu nota ta? Înălțimea mea este egală cu înălțimea ta? Venitul meu lunar este egal cu venitul tău lunar? Vârsta Mariei este egală cu vârsta lui Sandu?

Iată de ce este util să știm mai multe lucruri despre egalități.

Observă și descoperă!

1. Sara și Victor au sume de bani egale. Mama dă fiecăruia câte 100 de lei. Acum Sara are 250 de lei. Ce sumă de bani are Victor?

2. Sara și Victor au câte 150 de lei fiecare. Dacă fiecare dintre ei cheltuiește aceeași sumă de bani, care dintre ei va rămâne cu o sumă mai mare?

Important

• O afirmaţie care conţine o egalitate poate fi adevărată sau falsă.

Exemplu: Afirmaţia $5+2=3+4$ *este adevărată, iar afirmaţia* $3+7=5+4$ *este falsă.*

• Într-o egalitate, o parte dintre termeni pot fi litere care țin locul unor numere reale. În astfel de situații trebuie specificate mulțimile în care literele iau valori. Dacă nu se specifică mulțimea, atunci se consideră că literele sunt numere reale.

Exemple:

▷ $a+7=2+5+a$, *unde* a *este număr real;*

▷ $3+b+a=a+4+b$, *unde* a *și* b *sunt numere naturale;*

▷ $x+4=2\cdot 2+x$ *(aici se consideră că* x *este număr real).*

• Afirmaţiile cu egalități care conțin litere și sunt adevărate pentru orice valoare a literelor din mulțimile specificate se numesc **identități**.

Exemple:

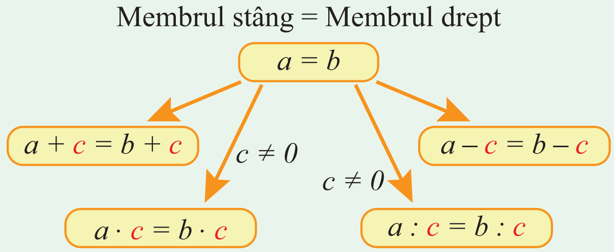
▷ *Afirmaţia* $a+(b+c)=(a+b)+c$, *unde* a, b, c *sunt numere reale este o identitate; adunarea numerelor reale este asociativă.*

▷ *Afirmaţia* $3a+4a=a(3+4)$ *este o identitate; am scos factorul comun.*

▷ *Afirmaţia* $a+3=23$, *unde* a *este număr real nu este o identitate; de exemplu, pentru* $a=1$ *afirmaţia* $1+3=23$ *este falsă.*

• Două relații de egalitate care conțin litere sunt **echivalente**, dacă sunt adevărate sau false pentru aceleași valori ale literelor. Scriem $E_1 \Leftrightarrow E_2$ și citim „egalitatea unu este echivalentă cu egalitatea doi”.

• Putem transforma o egalitate într-o egalitate echivalentă, folosind operaţiile aritmetice, după cum urmează:



Exersează!

3. Copiază, pe caiet, afirmaţiile de mai jos şi completează spaţiile libere pentru a obţine egalităţi echivalente cu cele date:

a) Dacă $\triangle = \bigcirc$, atunci $\triangle + \square = \bigcirc + \ldots$. b) Dacă $\triangle + \diamond = \diamond + \square$, atunci $\triangle = \ldots$.

c) Dacă $\square - \triangle = \bigcirc - \triangle$, atunci $\square = \ldots$. d) Dacă $\bigcirc - \square + \triangle = \triangle + \bigcirc - \triangledown$, atunci $\ldots = \triangledown$.

e) Dacă $\bigcirc = \square$, atunci $\triangle + \bigcirc - \triangledown = \square - \triangledown + \ldots$.

f) Dacă $\triangle + \diamond = \bigcirc + \square$, atunci $\triangledown + \triangle + \diamond = \bigcirc + \triangledown + \ldots$.

Exemplu: a) Dacă $\triangle = \bigcirc$, atunci $\triangle + \square = \bigcirc + \square$

4. Urmează indicaţiile date pentru a obţine egalităţi echivalente, după model:

a) $x + 2y + 14 = 3x + y + 2 \;|-y-2$ b) $3x^2 + 5y^2 - xy = 7x^2 + y^2 - xy \;|+xy$

c) $xy - x^2 + y = x^2 - y \;|-x^2+y$ d) $5a^2 + 3ab - b^2 = 7b^2 - 8 \;|-7b^2$

e) $3ab + b^2 - 5 = 7 - ab \;|+ab-7$ f) $-7ab - 3 + 5a^2 = 10 \;|+3$

Model:

a) $x+2y+14 = 3x+y+2 \;|-y-2 \Leftrightarrow x+2y+14-y-2 = 3x+y+2-y-2 \Leftrightarrow x+y+12 = 3x.$

5. Se consideră x și y două numere reale. a) Dacă $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$, arată că $49x^2 = 9y^2$. b) Dacă $25x^2 = 16y^2$, atunci este adevărată relația $5x = 4y$? Justifică răspunsul dat, oferind eventual un contraexemplu.

Observație:
Nu orice transformare pe care o aplicăm unei identități conduce la o egalitate echivalentă!

6. Sara încearcă să îl păcălească pe Victor arătându-i acestuia o demonstrație că numărul natural 2 este egal cu 3. Victor simte că ceva este în neregulă și încearcă să găsească greșeala. Ajută-l pe Victor, descoperind greșeala în raționamentul următor.

Plecând de la $x = 2$, Sara obține:

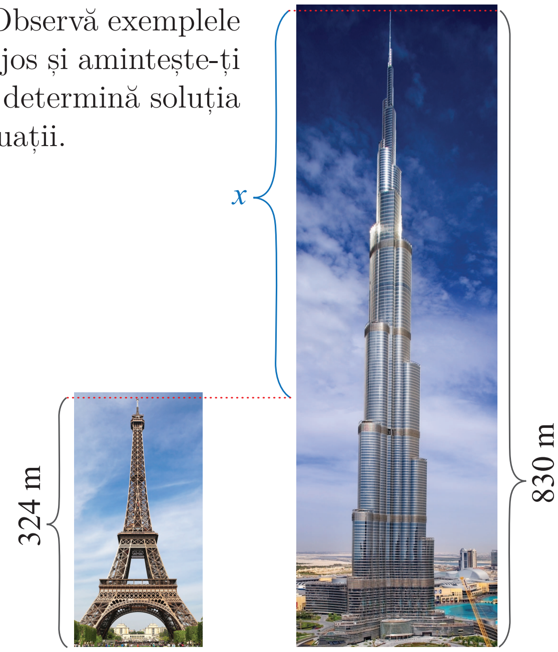
$3x - 2x = 2$	Scriindu-l pe x ca $3x - 2x$.
$3x - 2x = 6 - 4$	Scriindu-l pe 2 ca $6 - 4$.
$3x = 2x + 6 - 4$	Adunând $2x$ în ambii membri.
$2x + 6 - 4 = 3x$	Inversând ordinea scrierii membrilor.
$2x - 4 = 3x - 6$	Scăzând 6 din ambii membri.
$2(x - 2) = 3(x - 2)$	Aplicând metoda factorului comun.
$2 = 3$	Împărțind prin $(x - 2)$ relația anterioară.

Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii. Ecuaţii echivalente

Lumea-i plină de necunoscut. Cum îl aflăm?

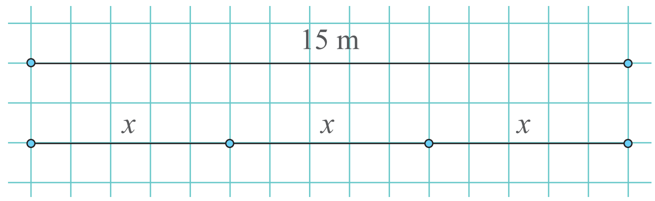
Amintește-ți!

1. Observă exemplele de mai jos și amintește-ți cum se determină soluția unei ecuații.



$x + 324 = 830 \quad |-324$

$x = 830 - 324; \quad x = 506.$



$3x = 15 \quad |:3$

$x = 5$

Important

• **Ecuația** este o egalitate care conține una sau mai multe litere și care este adevărată pentru anumite valori date literelor.

Exemple de ecuații:
$3x + 2 = 11$ *și*
$2x + 3y = 5.$

• Ecuația fiind o egalitate, semnul „=" trebuie să apară o singură dată.

• O parte dintre literele care apar într-o ecuație se numesc **necunoscute**.

• Termenii care nu conțin necunoscuta se numesc **termeni liberi**.

coeficientul necunoscutei

$4x + 7 = 0, \; x \in \mathbb{R}$

necunoscuta — termenul liber — mulțimea în care necunoscuta ia valori

coeficienții necunoscutei — necunoscuta

$5x - 3 = 4x + 1, \; x \in \mathbb{R}$

termenii care conțin necunoscuta — termenii liberi — mulțimea în care necunoscuta ia valori

• Numim **soluție a ecuației** un număr din mulțimea în care necunoscuta ia valori, care, pus în locul necunoscutei, face ca egalitatea să fie adevărată.

Exemplu: Numărul 4 *este soluție a ecuației* $5x - 20 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *deoarece* $5 \cdot 4 - 20 = 0$ *este o afirmaţie adevărată* $(0 = 0)$. *Numărul* 2 *nu este soluție a ecuației* $5x - 20 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *deoarece* $5 \cdot 2 - 20 = 0$ *este o afirmaţie falsă* $(-10 = 0)$.

• A rezolva o ecuație înseamnă să îi determinăm soluțiile, urmând o schemă logică.

Exemplu: Rezolvă ecuația $4x + 12 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: $4x + 12 = 0 \,|-12 \Leftrightarrow 4x = -12 \,|: 4 \Leftrightarrow x = -3$. *Soluția este* -3.

Exemplul de mai jos ne arată **pașii de urmat pentru aducerea ecuației la forma** $ax + b = 0$, în vederea rezolvării.

Cerința: Să rezolvăm ecuația: $\dfrac{x-2}{4} + \dfrac{2}{3} = x - \dfrac{4}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pas 1. Eliminăm numitorii (dacă există). *Pentru aceasta, înmulțim ecuația cu numitorul comun al termenilor.*

Numitorul comun este 12, deci înmulțim ecuația cu 12.

$$\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} = x - \frac{4}{3} \,\Big|\cdot 12 \Leftrightarrow 12\cdot\frac{x-2}{4} + 12\cdot\frac{2}{3} = 12x - 12\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x-2) + 8 = 12x - 16$$

Pas 2. Desființăm parantezele (dacă există). *Pentru aceasta, folosim distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere* $(a(b \pm c) = ab \pm ac)$.

$$3(x-2) + 8 = 12x - 16 \Leftrightarrow 3x - 6 + 8 = 12x - 16$$

Pas 3. Separăm termenii. *Aducem toți termenii în membrul stâng și egalăm cu zero.*

$$3x - 6 + 8 = 12x - 16 \Leftrightarrow 3x - 12x - 6 + 8 + 16 = 0$$

Pas 4. Efectuăm calculele în membrul stâng.

$$-9x + 18 = 0$$

Pas 5. Am ajuns la forma $ax + b = 0$ **și putem determina soluția.**

$$-9x + 18 = 0 | -18 \Leftrightarrow -9x = -18 \,|:(-9) \Leftrightarrow x = 2$$

Pas 6. Scriem soluția.

Numărul 2 este soluție a ecuației.

Exersează!

2. Copiază, pe caiet, şi completează *Tabelul 1*:

Ecuaţia	$2x-5=0$	$\frac{1}{2}x-4=0$	$2{,}(5)x-9=0$	$-7x-3=0$	$-5x+1{,}2=0$
Coeficientul lui x					
Termenul liber					

Tabelul 1

3. Lucraţi în pereche. Verificaţi dacă -3 este soluţie pentru ecuaţiile următoare:

a) $2x+6=0$; b) $-2x+6=0$; c) $\frac{2}{3}x+7=5$; d) $\sqrt{5}x+7\sqrt{5}=4\sqrt{5}$;

e) $5x-15=0$; f) $\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}=0$; g) $\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}=0$; h) $\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

4. Rezolvă, în mulţimea numerelor reale, ecuaţiile:

a) $x+5=0$; b) $2x-3=6$; c) $-x+9=7$; d) $\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}=11$;

e) $-\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}=8$; f) $5x-4=0$; g) $-7x-14=0$; h) $\frac{1}{2}x-7=11$;

i) $-x-3=\frac{5}{2}$; j) $3x+4=-2$; k) $\frac{6}{5}x+\frac{2}{3}=-11$; l) $-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}=-\frac{11}{2}$.

5. Determină mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii:

a) $-2(x-3)+3(2-x)=x$; b) $3(x+2)-5(x-1)=3-6x$;

c) $3x-5\left(x+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-4x$; d) $(2x+1)(\sqrt{2}+1)=7\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$;

e) $\frac{x+3}{2}+\frac{x-2}{4}=\frac{5}{6}$; f) $\frac{2x-3}{8}-\frac{3x-2}{4}=\frac{x+1}{2}$;

g) $\frac{5x+1}{3}-\frac{2x-1}{6}+\frac{3x}{2}=1$; h) $\frac{x+2}{5}-\frac{x-2}{10}+\frac{2x-3}{2}=x$.

6. Determină soluţiile următoarelor ecuaţii:

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{1}{4}=x$; b) $\frac{5}{3}-\frac{3-x}{6}=\frac{x+1}{2}$; c) $\frac{2x-3}{3}+\frac{3x-2}{2}=\frac{1}{6}$;

d) $\frac{x+1}{1}+\frac{x+2}{2}+\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{4}=4$; e) $\frac{x+2}{1}+\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\ldots+\frac{x+19}{18}+\frac{x+20}{19}=19$.

7. Determină numărul real a pentru care următoarele ecuaţii cu necunoscuta x au soluţia 2.

a) $ax+4=0$; b) $3x-4a=0$; c) $(a-3)x+2a=2$; d) $(2a-3)x+a-4=x+3a$.

Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Observă și descoperă!

1. Sara și Victor încearcă să găsească două numere reale, astfel încât, punând pe unul dintre ele în locul lui x și pe celălalt în locul lui y, egalitatea $2x + y = 6$ să devină adevărată.

Numerele -1 și 8 fac ca egalitatea să fie adevărată.
$2 \cdot (-1) + 8 = 6$ este o egalitate adevărată.

Numerele 4 și -2 fac ca egalitatea să fie adevărată.
$2 \cdot 4 + (-2) = 6$ este o egalitate adevărată.

a) Care dintre cei doi copii are dreptate?

b) Găsește și alte perechi de numere care să facă egalitatea adevărată.

c) Câte astfel de perechi crezi că există?

d) Verifică dacă numerele a și $6 - 2a$, unde a este un număr real oarecare, puse în locul lui x, respectiv y fac ca egalitatea să fie adevărată.

Important

• O ecuație de forma $ax + by = c$, în care a, b și c sunt numere reale date, $a \neq 0$ și $b \neq 0$ se numește **ecuație liniară cu două necunoscute**.

• Prin **soluție** a ecuației liniare cu două necunoscute înțelegem orice pereche (m, n) de numere reale cu proprietatea că înlocuind pe x cu m și pe y cu n obținem o egalitate adevărată.

• O ecuație liniară cu două necunoscute are o infinitate de soluții.

• Un ansamblu de două astfel de ecuații se numește **sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute**.

• Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute se scrie $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sunt numere reale date.

• Prin **soluție** a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute înțelegem o pereche (m, n) de numere reale cu proprietatea că, înlocuind pe x cu m și pe y cu n, obținem două egalități adevărate.

Exemplu: Perechea $(1, 4)$ *este soluție a sistemului de ecuații* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$, *deoarece* $2 \cdot 1 + 4 = 6$ *este o egalitate adevărată și* $1 + 4 = 5$ *este de asemenea o egalitate adevărată. Perechea* $(3, 0)$ *nu este soluție a sistemului* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$ *deoarece* $2 \cdot 3 + 0 = 6$ *este o egalitate adevărată, iar* $3 + 0 = 5$ *este o egalitate falsă.*

• **A rezolva un sistem** înseamnă să îi determinăm soluțiile, urmând o schemă logică.

• Două sisteme de ecuații se numesc **echivalente** dacă au aceleași soluții. În acest caz scriem $S_1 \Leftrightarrow S_2$ și citim „sistemul unu este echivalent cu sistemul doi".

Exemplu: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x + y = 5 \end{cases}$ *Ambele au ca soluție perechea* $(1,4)$. *Verifică!*

• Avem două metode pentru a obține un sistem de ecuații echivalent cu un sistem de ecuații dat.

▷ Înmulțim fiecare ecuație a sistemului dat cu un număr arbitrar, diferit de zero. Obținem un sistem de ecuații echivalent cu sistemul dat.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \,|\cdot m \\ a_2x + b_2y = c_2 \,|\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ma_1x + mb_1y = mc_1 \\ na_2x + nb_2y = nc_2 \end{cases}$$

Exemplu: $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \,|\cdot 2 \\ 3x - 2y = -5 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 28 \\ 9x - 6y = -15 \end{cases}$ *Ambele sisteme au soluția* $(1,4)$. *Verifică!*

▷ Înlocuim una dintre ecuațiile sistemului cu ecuația obținută prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații inițiale. Obținem un sistem echivalent cu sistemul dat.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Exemplu: $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = 9 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$ *Ambele au soluția* $(1,4)$. *Verifică!*

Exersează!

2. Verifică dacă perechea de numere reale $(x,y) = (-1,5)$ este soluţie a următoarelor ecuaţii:
a) $3x - y = -8$; b) $-4x + 3y = 19$; c) $3x + y = 8$; d) $2x + y = 3$.

3. Verifică dacă perechea de numere reale $(x,y) = (3,4)$ este soluţie a sistemelor de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y = -5 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

4. Completează spaţiile libere, astfel încât fiecare ecuație din primul sistem de ecuații să fie echivalentă cu o ecuație din al doilea sistem de ecuații.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + y = 8 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 6x - ...y = ... \\ ...x + 3y = ... \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x + ...y = 22 \\ 8x + ...y = ... \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x + 30y = ... \\ ...x - ...y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + y = 7 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x + ...y = 14 \\ 12x + ...y = ... \end{cases}$

Model: a) $6x : 3x = 2$, *deci prima relaţie a fost înmulţită cu* 2.
$3y : y = 3$, *deci a doua relaţie a fost înmulţită cu* 3. $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \,|\cdot 2 \\ x + y = 8 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 18 \\ 3x + 3y = 24 \end{cases}$

5. Se consideră ecuația $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{6}$.
a) Dacă $x = \sqrt{3}$, determină numărul real y. b) Dacă $x = 0$, determină numărul real y.
c) Dacă $y = 0$, determină numărul real x. d) Dacă $y = \sqrt{2}$, determină numărul real x.

6. Se consideră ecuația $x\sqrt{5} + y\sqrt{7} = \sqrt{245}$. Determină câte o soluție a ecuației exprimată prin: a) numere naturale; b) numere iraționale.

Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute prin metoda substituției

1. Sara și Victor ne explică cum au găsit în lecția trecută soluții ale ecuației $2x + y = 6$.

Am înlocuit pe y cu 8, apoi am scris
$2x + 8 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 - 8 \Leftrightarrow 2x = -2\,|:2 \Leftrightarrow x = -1$
Perechea $(-1{,}8)$ este o soluție.

Am înlocuit pe x cu 4, apoi am scris
$2 \cdot 4 + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - 8 \Leftrightarrow y = -2$
Perechea $(4, -2)$ este o soluție.

a) Care dintre cei doi copii a ales o cale mai simplă? Justifică alegerea făcută!

b) Folosind același model, găsește o soluție diferită de cele două.

Important

Metoda substituției este o modalitate (un algoritm) de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

Pașii în rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute prin această metodă sunt:

▷ **Pasul 1.** Se alege o ecuație și în ea una dintre necunoscute se consideră număr cunoscut.

▷ **Pasul 2.** Din ecuația aleasă la **Pasul 1** se exprimă cealaltă necunoscută cu ajutorul necunoscutei considerată număr.

▷ **Pasul 3.** Expresia găsită la **Pasul 2** se înlocuiește în cealaltă ecuație. Obținem o ecuație cu o singură necunoscută.

▷ **Pasul 4.** Rezolvăm ecuația obținută la **Pasul 3.**

▷ **Pasul 5.** Înlocuim soluția obținută la **Pasul 4** în expresia obținută la **Pasul 2** și efectuăm calculele.

▷ **Pasul 6.** Scriem soluția sistemului.

Exemplu: Rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$.

Rezolvare: $\underbrace{\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 1}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 2}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3x - 2(4 - 2x) = -1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3x + 4x = -1 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 7x = 7 \quad |:7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x = 1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 4}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y = 4 - 2 \cdot 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 5}}$$

Pasul 6. Soluția sistemului este perechea de numere $(1, 2)$.

Exersează!

2. În ecuaţiile de mai jos, exprimă necunoscuta y în funcţie de x, după model:

a) $3x + y = 4$; b) $-2x + y = 9$; c) $5x - y = 14$; d) $4x + 3y = 10$;

e) $-x - 2y = 11$; f) $-5x - 7y = -24$; g) $x + 7y = 15$; h) $-5x + 3y = -1$.

Model: d) $4x + 3y = 10 \Leftrightarrow 3y = 10 - 4x \Leftrightarrow y = \dfrac{10 - 4x}{3}$.

3. Rezolvă următoarele sisteme de ecuaţii prin metoda substituţiei:

a) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = -3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = -11 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 4y = 21 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 7x - 6y = 19 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

4. Elimină numitorii și apoi rezolvă, prin metoda substituției, următoarele sisteme de ecuații, după model:

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{9}x - \dfrac{2}{3}y = 0 \\ \dfrac{7}{9}x + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{45} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{15} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{6}y = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{6}{25}x - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{7}y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{13}y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

Model: a) $\begin{cases} \dfrac{7}{9}x - \dfrac{2}{3}y = 0 \quad \Big| \cdot 9 \\ \dfrac{7}{9}x + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3} \quad \Big| \cdot 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 6y = 0 \\ 7x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x}{6} \\ 7x + \dfrac{7x}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x}{6} \\ 14x + 7x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

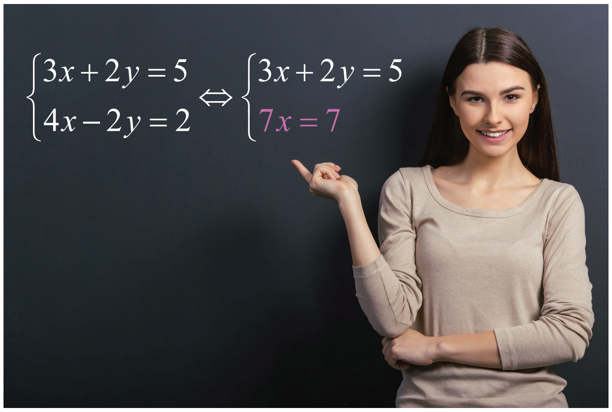
Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute prin metoda reducerii

Observă și descoperă!

1. Sara a scris pe tablă că cele două sisteme sunt echivalente.

a) Verifică echivalența celor două sisteme, știind că al doilea sistem are soluția $(1, 1)$.

b) Explică modul în care Sara a obținut ecuația a doua din al doilea sistem (ecuația scrisă colorat).



Important

Metoda reducerii este o modalitate (un algoritm) de rezolvare a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

Pașii în rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute prin aceasta metodă sunt:

▷ **Pasul 1.** Se alege necunoscuta pe care dorim să o reducem. Ecuațiile sistemului se înmulțesc cu numere potrivite, astfel încât necunoscuta aleasă să aibă coeficienții numere opuse.

▷ **Pasul 2.** Una dintre ecuațiile sistemului se păstrează, iar cealaltă se înlocuiește cu ecuația obținută prin adunarea ecuațiilor de la **Pasul 1.** (Aceasta are o singură necunoscută.)

▷ **Pasul 3.** Rezolvăm ecuația cu o necunoscută obținută la **Pasul 2.**

▷ **Pasul 4.** Înlocuim soluția găsită la **Pasul 3** și aflăm cealaltă necunoscută.

▷ **Pasul 5.** Scriem soluția sistemului.

Exemplu: Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$.

Rezolvare: $\underbrace{\begin{cases} 2x+3y=5 & |\cdot 2 \\ 3x-2y=1 & |\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=10 \\ 9x-6y=3 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 1}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 13x=13 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 2}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x=1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2\cdot 1+3y=5 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=5-2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=3 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}}_{\textbf{Pasul 4}}$$

Pasul 5. Soluția sistemului este $(1, 1)$.

Exersează!

2. Înmulţeşte a doua ecuaţie cu un număr, astfel încât coeficientul lui y în a doua ecuație să fie opusul coeficientului lui y din prima ecuație, după model:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 20 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y = 11 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 9y = -7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 22y = 7 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Model: a) $\begin{cases} 2x + 6y = 20 \\ 5x + 3y = 14\,|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 20 \\ -10x - 6y = -28 \end{cases}$

3. Înmulţeşte fiecare dintre ecuaţiile sistemului, astfel încât coeficientul lui x din ecuațiile obținute să devină cel mai mic multiplu comun al coeficienţilor lui x din cele două ecuaţii inițiale, după model:

a) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y = 16 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 8x + 5y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -6x + 13y = -1 \\ 15x - 9y = -21 \end{cases}$

Model: a) $\left.\begin{matrix} 6 = 2 \cdot 3 \\ 4 = 2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow [6, 4] = 2^2 \cdot 3 = 12,$ *atunci* $\begin{cases} 6x - y = 4\,|\cdot 2 \\ 4x - 5y = -6\,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 2y = 8 \\ 12x - 15y = -18 \end{cases}$

4. Rezolvă următoarele sisteme de ecuaţii prin metoda reducerii:

a) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = -3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = -11 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 4y = 21 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 7x - 6y = 19 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

5. Folosește metoda reducerii, pentru a rezolva următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{11}x + \dfrac{1}{7}y = \dfrac{2}{77} \\ \dfrac{1}{143}x - \dfrac{1}{91}y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{13}{5}x + 2y = 1 \\ \dfrac{1}{5}x + \dfrac{32}{13}y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -\dfrac{7}{15}x + \dfrac{1}{3}y = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{143}{210} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9x - 7y = 1 \\ -7x + 9y = -\dfrac{121}{63} \end{cases}$

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii liniare

Multe probleme practice pot fi modelate matematic, astfel încât să conducă la rezolvarea unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare. De aceea este util să putem rezolva ecuații sau sisteme de ecuații.

Amintește-ți!

1. Victor are de rezolvat următoarea problemă: „*Pentru* 3 *caiete și* 4 *pixuri, Alin a plătit* 24 *de lei. Pentru* 5 *caiete și* 4 *pixuri de același fel, Sara a plătit* 32 *de lei. Câți lei costă un caiet și câți lei costă un pix?*”

El își amintește că trebuie să folosească metoda comparației, dar a uitat o parte dintre pașii ce trebuie parcurși. Ajută-l pe Victor, răspunzând la întrebările de mai jos:

a) De unde apare diferența dintre sumele plătite de cei doi copii?

b) Cât este această diferență?

c) Câți lei costă un caiet?

d) Cât plătește Alin pentru 3 caiete? Dar pentru 4 pixuri?

e) Câți lei costă un pix?

Important

• Problema se poate rezolva și cu ajutorul sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute.

Cum gândesc?	Ce fac?	Cum scriu?
Pentru a ajunge la un sistem de ecuații am nevoie de două necunoscute.	Notez cu x și y mărimile care urmează să fie aflate.	Notez cu x câți lei costă un caiet. Notez cu y câți lei costă un pix.
Pentru a ajunge la sistem trebuie să transform informațiile din problemă în relații matematice	Citesc în problemă „*Pentru* 3 *caiete și* 4 *pixuri, Alin a plătit* 24 *de lei.*”	$3x + 4y = 24$
	Citesc în problemă „*Pentru* 5 *caiete și* 4 *pixuri, Sara a plătit* 32 *de lei.*”	$5x + 4y = 32$

Ambele afirmații trebuie să fie adevărate, așadar cele două ecuații formează un sistem de ecuații.	Scriu sistemul de ecuații.	$\begin{cases} 3x+4y=24 \\ 5x+4y=32 \end{cases}$
Rezolv sistemul, folosind una dintre cele două metode cunoscute.	Rezolv sistemul de ecuații.	$\begin{cases} 3x+4y=24 & \vert\cdot(-1) \\ 5x+4y=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-4y=-24 \\ 5x+4y=32 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=24 \\ 2x=8 & \vert:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=24 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 12+4y=24 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=12 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases}$
Interpretez rezultatul.	Fiind vorba de sume de bani, mă asigur că valorile găsite pentru x și y sunt pozitive.	Un caiet costă 4 lei. Un pix costă 3 lei.

Exersează!

2. Maria a organizat o petrecere într-un restaurant. Închirierea localului a costat 320 de lei. Costurile mâncării au fost de 11,5 lei de persoană. Câte persoane au participat la petrecere, dacă Maria a cheltuit 573 de lei?

3. Sara a fost la supermarket şi cu jumătate din banii pe care îi avea a cumpărat legume. Cu un sfert din suma iniţială a cumpărat fructe. Câţi bani a avut iniţial Oana, ştiind că i-au rămas 27 de lei?

4. O ladă plină cu făină cântăreşte 90 kg. Dacă golim jumătate din cantitatea de făină, lada şi făina rămasă vor cântări 55 kg. Cât cântăreşte lada goală?

5. Pentru a împrejmui o grădină sub formă de dreptunghi, cu lungimea de două ori mai mare decât lăţimea, sunt necesari 44 de metri de sârmă. Care sunt dimensiunile grădinii?

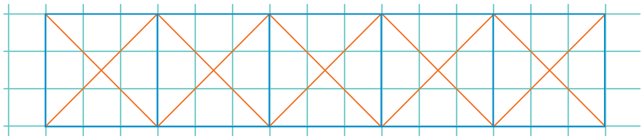
6. O companie de taxi are afişate următoarele tarife:
Preţ de pornire: 3 lei
Preţ pe distanţă: 2,5 lei/km
Determină ce lungime a avut o cursă cu taxiul pentru care un client a plătit 20,5 lei.

7. Mihai a cumpărat 20 de caiete de matematică la preţurile de 3, respectiv 5 lei. Câte caiete de fiecare tip a cumpărat Mihai, ştiind că acestea au costat 74 de lei?

8. La un film au fost vândute 120 de bilete. Ştiind că preţul unui bilet pentru copii este de 7 lei, iar pentru un adult este de 15 lei şi s-au încasat 1 280 de lei, calculează câţi copii au vizionat acel film.

9. Într-o puşculiţă sunt 180 de monede de 10, respectiv de 50 de bani. Determină câte monede de fiecare tip sunt, ştiind că în puşculiţă sunt 48 de lei.

10. Un constructor trebuie să realizeze o grindă metalică precum cea din *Imaginea 1*. Inițial, el are la dispoziție o bară de oțel, dreaptă, lungă de 30 m, din care va trebui să taie mai multe bucăți de diferite lungimi pentru a realiza grinda.



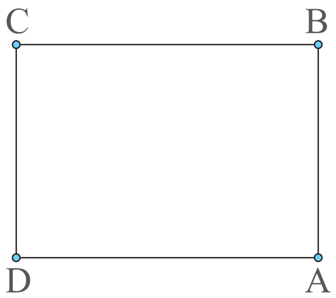
Imaginea 1 - Schița unei grinde metalice

Grinda ce trebuie construită reprezintă alipirea a cinci pătrate cu laturile reprezentate prin segmente de culoare albastră, în care avem trasate ambele diagonale, reprezentate prin segmente portocalii. Astfel, constructorul știe că lungimea unui segment albastru este de 1 m, iar cele portocalii de $\sqrt{2}$ m. El taie, mai întâi, toate bucățile pentru laturile pătratelor din bara de 30 m. Rămâne constructorul cu suficient material încât să construiască și bucățile pentru diagonalele pătratelor? Justifică răspunsul dat.

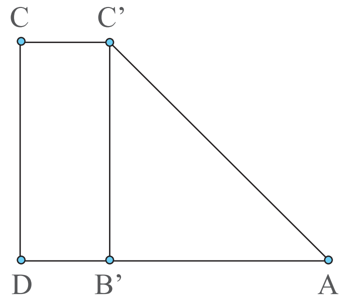
11. O foaie de hârtie sub formă dreptunghiulară are dimensiunile l și L, exprimate în mm. Cele două dimensiuni reprezintă soluția sistemului: $\begin{cases} l\sqrt{2} - L = 0 \\ 2l + 2L = 420(1+\sqrt{2}) \end{cases}$.

a) Rezolvă sistemul dat.

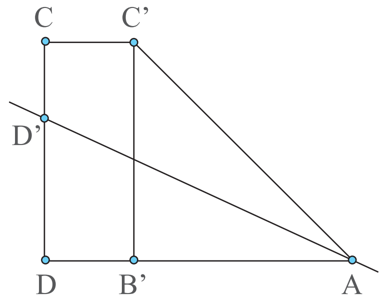
b) Aproximează, la cel mai apropiat număr natural, valoarea lungimii L. Ai obținut, astfel, dimensiunile unei foi A4, care are proprietatea că raportul dintre lungime și lățime este de $\sqrt{2}$. Nu te-ai convins? Ia o foaie de hârtie de tip A4 și încearcă următorul procedeu:



i) *Figura 1*



ii) *Figura 2*



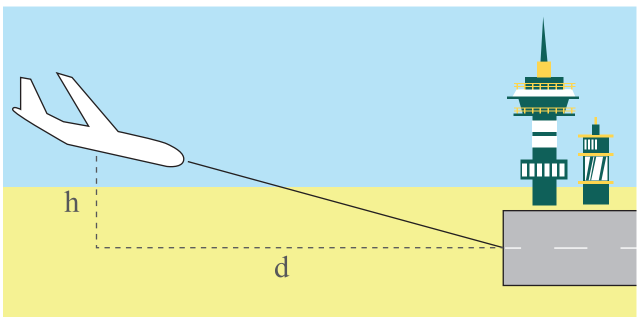
iii) *Figura 3*

i) Notează colțurile foii cu $ABCD$, precum în *Figura 1*.

ii) Pliază foaia după bisectoarea unghiului BAD, ca în *Figura 2*. Dacă $AB = l$, atunci $AC' = l\sqrt{2}$ (teorema lui Pitagora).

iii) Pliază, acum, după bisectoarea unghiului DAC' și vei observa cum punctele C' și D se suprapun. Astfel ai observat că $L = l\sqrt{2}$.

12. Un avion se află la înălțimea h față de sol și distanța d față de cel mai apropiat aeroport, ca în *Imaginea 2*. Distanța aeriană pe care o are de parcurs este dată de relația $\sqrt{h^2+d^2}$. Pilotul avionului constată că mai are 6 000 litri de carburant. Pilotul trebuie să păstreze 2 000 de litri în eventualitatea în care ratează aterizarea și încă 1 000 de litri pentru manevrarea avionului de pe pistă până în zona de debarcare. Dacă $h = 8{,}75$ km, $d = 19h$ și știind că, la final au mai rămas 1 000 de litri de carburant calculează cât consumă avionul pentru fiecare kilometru parcurs în aer.



Imaginea 2 - Un avion pregătit de aterizare

Recapitulare

1. Verifică dacă $x = 5$ este soluție a următoarelor ecuații:

a) $3x + 1 = 16$; b) $-x + 13 = 18$; c) $3x + 1 = x + 11$; d) $\frac{3x}{5} - 1 = \frac{x-1}{2}$;

e) $-5x + 7 = x - 10$; f) $9x - 13 = 6x + 2$; g) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{9}{2} + \frac{2x}{3}$; h) $\frac{3x-1}{2} + 1 = 2x - 2$.

2. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a) $5x + 1 = 16$; b) $14 - 3x = 31$; c) $-2x + 6 = 14$; d) $x + 10 = 17 - 3x$;

e) $-2x + 16 = 7x - 3$; f) $7 - 3x = 5 + 2x$; g) $-7x + 5 - x = 14$; h) $4x + 13 = -x + 25 + 6x$.

3. Determină soluțiile următoarelor ecuații: a) $\frac{x+3}{2} - \frac{3x-2}{12} = -\frac{x}{4} - \frac{5+2x}{6}$;

b) $-\frac{x+8}{12} + \frac{2x-1}{20} - \frac{1}{4} = -\frac{x+2}{15}$; c) $\frac{x}{6} - \frac{2x+1}{3} + \frac{3}{4} = -\frac{35}{12} - \frac{x-4}{2}$.

4. Determină câte două perechi distincte de soluții pentru fiecare din următoarele ecuații:

a) $7x + 3y = 5$; b) $x\sqrt{7} + y\sqrt{3} = 10$.

5. Rezolvă următoarele sisteme de ecuaţii prin metoda substituţiei şi prin metoda reducerii:

a) $\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = -11 \\ -2x - 7y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 11x + 3y = 20 \\ -2x + 5y = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - 5y = -23 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$

6. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații: a) $\begin{cases} x\sqrt{5} - y\sqrt{11} = 16 \\ x\sqrt{11} + y\sqrt{5} = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{7} + y\sqrt{24} = 19 \\ x\sqrt{28} + y\sqrt{6} = 20 \end{cases}$

7. Un cicloturist a parcurs drumul dintre Iaşi şi Braşov în trei zile astfel: în prima zi a parcurs o treime din drum, a doua zi cu 10 km mai mult şi în ultima zi restul de 92 km. Care este distanţa dintre Iaşi şi Braşov?

8. Suma dintre un număr, triplul şi sfertul său este 260. Determină numărul.

9. În condiții perfecte, numărul bacteriilor de pe mâinile noastre se poate multiplica de un milion de ori, în numai șase ore. O spălare pe mâini eficientă se presupune că elimină 99% dintre aceste bacterii.

a) De câte ori se multiplică numărul bacteriilor în doar trei ore?

b) Compară următoarele două situații, calculând numărul final de bacterii, știind că inițial sunt N_0 bacterii:

i) ne spălăm pe mâini o dată după trei ore, după care, încă o dată, după alte trei ore;

ii) ne spălăm pe mâini doar o singură dată, după șase ore.

Imaginea 3 - Bacterii

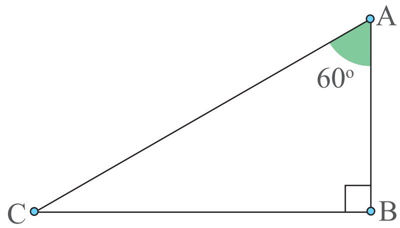


Figura 4

10. Sara conduce o mașină din localitatea A până în localitatea C, trecând prin localitatea B, ca în *Figura 4*. Atunci când pleacă, ea dorește să afle distanța parcursă până în localitea B, deoarece ea știe că triunghiul determinat de cele trei localități este dreptunghic, cu unghiul drept B și cu măsura unghiului BAC egală cu 60°. Având în vedere că în localitatea B se întâlnește cu Victor, ea uită să verifice exact ce distanță a parcurs și își amintește de-abia la mijlocul distanței dintre B și C. Ea constată atunci că a parcurs $5(\sqrt{3} + 2)$ km. Ce distanță a parcurs Sara din localitatea A până în localitatea B?

Evaluare

10p din oficiu

1. Asociază ecuațiilor din coloana **A** soluția din coloana **B**.

	A	**B**
5p	a) $-3x+1=x+13$	1) $x=1$
5p	b) $2\sqrt{2}x+\sqrt{8}=\sqrt{2}x+3\sqrt{2}$	2) $x=\sqrt{2}$
		3) $x=-3$

2. Completează cu **A**, dacă afirmația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

5p a) -2 este soluție a ecuației $\dfrac{x-3}{2}=x+1$;

5p b) Dacă $-2x+3y=11$, atunci $y=\dfrac{2x+11}{3}$.

3. Completează enunțurile de mai jos, pentru a obține enunțuri adevărate:

5p a) O pereche de numere naturale care verifică ecuația $2x+5y-10=0$ este ... .

5p b) Dacă $3x+2=0$, atunci $x=$... .

10p **4.** Alege varianta corectă de răspuns:

Dacă $(-1;\,2)$ este soluție a ecuației $2x+ay=-8$, atunci numărul a este egal cu:

A. -2 B. -3 C. 3 D. 2

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

10p a) $4(x+3)=3x+15$;

10p b) $\dfrac{2x-3}{3}-2\,(x+1)=\dfrac{-3x-2}{2}$.

6. Rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+5y=-9 \\ -2x-y=-1 \end{cases}$

10p a) prin metoda substituției;

10p b) prin metoda reducerii.

10p **7.** Într-un bloc sunt 20 de apartamente cu 2 și 3 camere, având, în total, 48 de camere. Determină câte apartamente cu 2 camere, respectiv câte apartamente cu 3 camere sunt în acest bloc.

Exersezi și progresezi

1. Completează spaţiile libere pentru a obţine ecuaţii echivalente:

a) $2a+17=0\,|\cdot 2 \Leftrightarrow 4a+...=...$; b) $5a-12=0\,|+3 \Leftrightarrow ...-...=...$;

c) $3a+17=0\,|\cdot ... \Leftrightarrow 9a+...=...$; d) $-4x+5=0\,|-... \Leftrightarrow -4x-1=-6$;

e) $2x+5=0\,|-7 \Leftrightarrow ...+...=...$; f) $8a+10=0\,|:... \Leftrightarrow ...+5=...$;

g) $2a+5=0\,|\cdot ... \Leftrightarrow -6a+...=...$; h) $-3x-2=0\,|\cdot(-3) \Leftrightarrow$ ....

2. Pentru fiecare din ecuaţiile de mai jos, numeşte coeficientul necunoscutei şi termenul liber:

a) $3x+2=0$; b) $-5x+7=0$; c) $12x-3=0$; d) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}=0$; e) $-\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}=0$.

3. Asociază fiecărei ecuaţii din coloana din stânga soluţia corespunzătoare din coloana din dreapta:

a) $3x+y=4$; i) $(x,y)=(-1,2)$;
b) $2x+5y=-1$; ii) $(x,y)=(1,2)$;
c) $-x-7y=-13$; iii) $(x,y)=(2,-1)$;
d) $4x-y=10$; iv) $(x,y)=(1,1)$;
v) $(x,y)=(0,-10)$.

4. Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, ecuaţiile:

a) $-x+5=0$; b) $-2x-6=0$; c) $-3x+10=0$; d) $-13-5x=2$; e) $4x-7=11$.

5. Rezolvă sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} -x-y=7 \\ x+3y=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=-8 \\ -3x+4y=23 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-y=-15 \\ -3x+y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -4x+5y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$

6. Suma dintre un număr, jumătatea sa şi dublul său este 245. Determină numărul.

7. Suma a două numere este 67. Determină numerele, ştiind că împărţind unul dintre ele la celălalt obţinem câtul 8 şi restul 4.

8. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații: a) $\begin{cases} x+y=2\sqrt{2} \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=\sqrt{5}+\sqrt{7} \\ 2x-3y=-\sqrt{5}+\sqrt{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ x+y=2\sqrt{2}+3\sqrt{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y=\sqrt{3}+\sqrt{5} \end{cases}$

9. Determină numerele reale x și y care verifică sistemul de ecuații:

$\begin{cases} x+y=2\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+...+\sqrt{49}\right) \\ x-y=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+...+\sqrt{50}\right) \end{cases}$ Stabilește semnul lui y.

10. Compune pentru colega ta/colegul tău de bancă un sistem de ecuații pe care să îl rezolve, folosind următorul model: i) Alege un număr prim p. ii) Stabilește ca soluțiile să fie de tipul $x=m\sqrt{p}$ și $y=n\sqrt{p}$, cu $m,n\in\mathbb{N}$. iii) Calculează două expresii de tipul $ax+by$ și reține rezultatele r_1 și r_2. iv) Trimite sistemul de ecuații în care doar coeficienții a și b și rezultatele din cele două expresii calculate la punctul iii) sunt vizibile. v) Compară rezultatul obținut de tine și cel obținut de cealaltă persoană.

Exemplu: i) Aleg $p=17$. ii) Aleg soluțiile $x=2\sqrt{17}$ și $y=5\sqrt{17}$. iii) Spre exemplu, avem $x+y=7\sqrt{17}=\sqrt{833}$ și $3x-y=\sqrt{17}$. iv) Trimit sistemul $\begin{cases} x+y=\sqrt{833} \\ 3x-y=\sqrt{17} \end{cases}$ v) Verific dacă cealaltă persoană a calculat corect.

Elemente de organizare a datelor

Unitatea **5**

Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale

Observă și descoperă!

1. Sara, cu prietenii ei, Corina, Dan, Victor și Alin sunt în tabără. Într-o seară se organizează un concurs de dans. Cei cinci prieteni hotărăsc să participe și ei cu o pereche de dansatori la acest concurs.

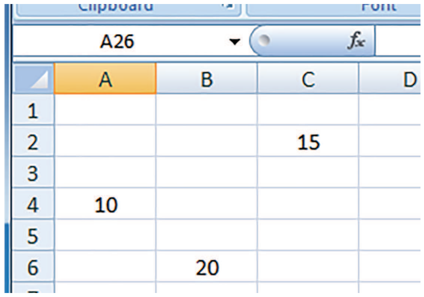
a) Care sunt perechile care se pot forma, știind că fiecare pereche este formată dintr-un băiat și o fată?

b) Câte perechi se pot forma? Există o legătură între numărul băieților, numărul fetelor și numărul perechilor ce se pot forma?

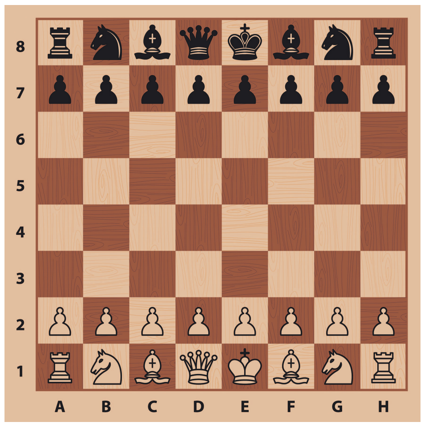
2. În *Imaginea 1* este o foaie de calcul din Excel. Pentru a indica poziția numărului 10 Sara spune: „numărul aflat în coloana A, pe linia 4".

Cum vei indica poziția numărului 15? Dar poziția numărului 20?

3. Pe o tablă de șah profesională, *Imaginea 2*, sunt trecute, pe una dintre laturi, literele A, B, C, D, E, E, G, H, iar pe cealaltă latură, numerele de la 1 până la 8. Care este scopul acestor notații?



Imaginea 1
Foaie de calcul din Excel



Imaginea 2 – Tablă de șah

Important

• Prin **produsul cartezian** a două mulțimi A și B, notat $A \times B$, înțelegem mulțimea tuturor perechilor (a,b), în care a este element al mulțimii A și b este element al mulțimii B.

• $A \times B = \{(a,b)\,|a \in A \text{ și } b \in B\}$

Exemplu: $A = \{1,2,3\}$ *și* $B = \{a,b\}$, *atunci* $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ *și* $B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$.

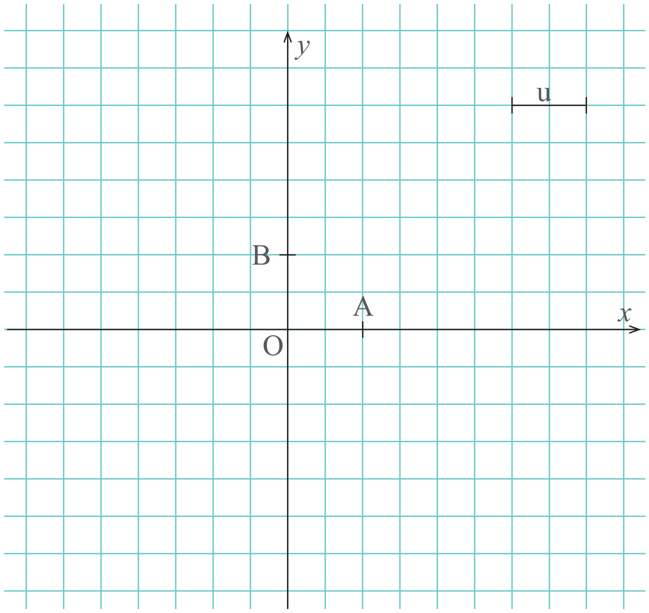
Evident $A \times B \neq B \times A$.

• Numim **sistem de axe ortogonale în plan**, două axe perpendiculare, cu aceeași origine și aceeași unitate de măsură.

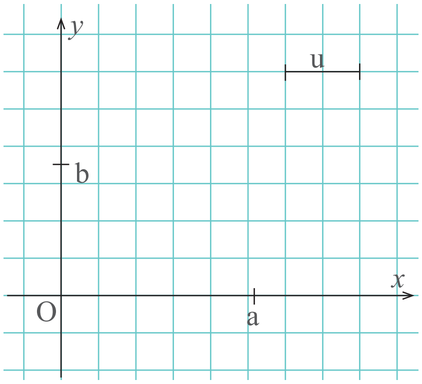
• Axa Ox se numește axa absciselor. Pe axa absciselor numerele pozitive se reprezintă în dreapta originii, iar numerele negative în stânga originii.

• Axa Oy se numește axa ordonatelor. Pe axa ordonatelor numerele pozitive se reprezintă deasupra originii, iar numerele negative sub origine.

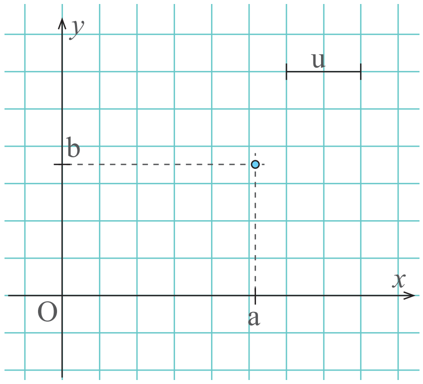
• Folosind un sistem de axe ortogonale în plan, oricărei perechi de numere (a,b) din produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem un punct din plan și oricărui punct din plan îi corespunde o pereche de numere (a,b) din produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



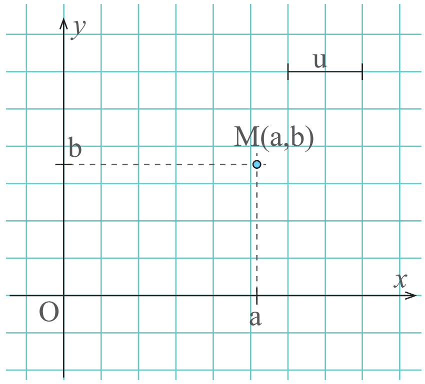
Cum asociem unei perechi de numere (a,b) un punct din plan folosind un sistem de axe ortogonale?



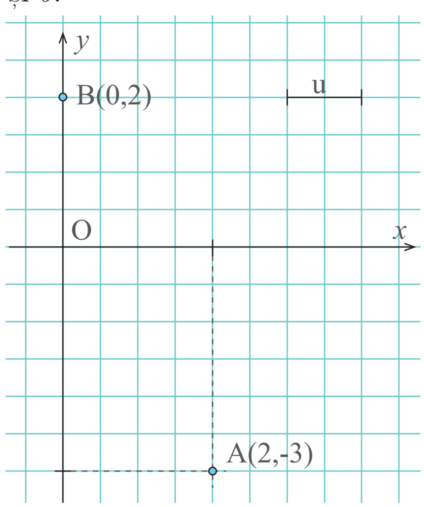
Primul număr din pereche, adică a, îl reprezentăm pe axa absciselor, adică Ox (la dreapta originii, dacă este pozitiv, sau la stânga originii, dacă este negativ).
Al doilea număr din pereche, adică b, îl reprezentăm pe axa ordonatelor, adică Oy (deasupra originii, dacă este pozitiv, sau sub origine, dacă este negativ).



Prin punctul obținut pe axa Ox, construim o paralelă la axa Oy, iar prin punctul obținut pe axa Oy, construim o paralelă la axa Ox. Punctul aflat la intersecția celor două paralele este punctul corespunzător perechii (a,b).



Scriem: $M(a,b)$. Citim: Punctul M **de coordonate** a și b.

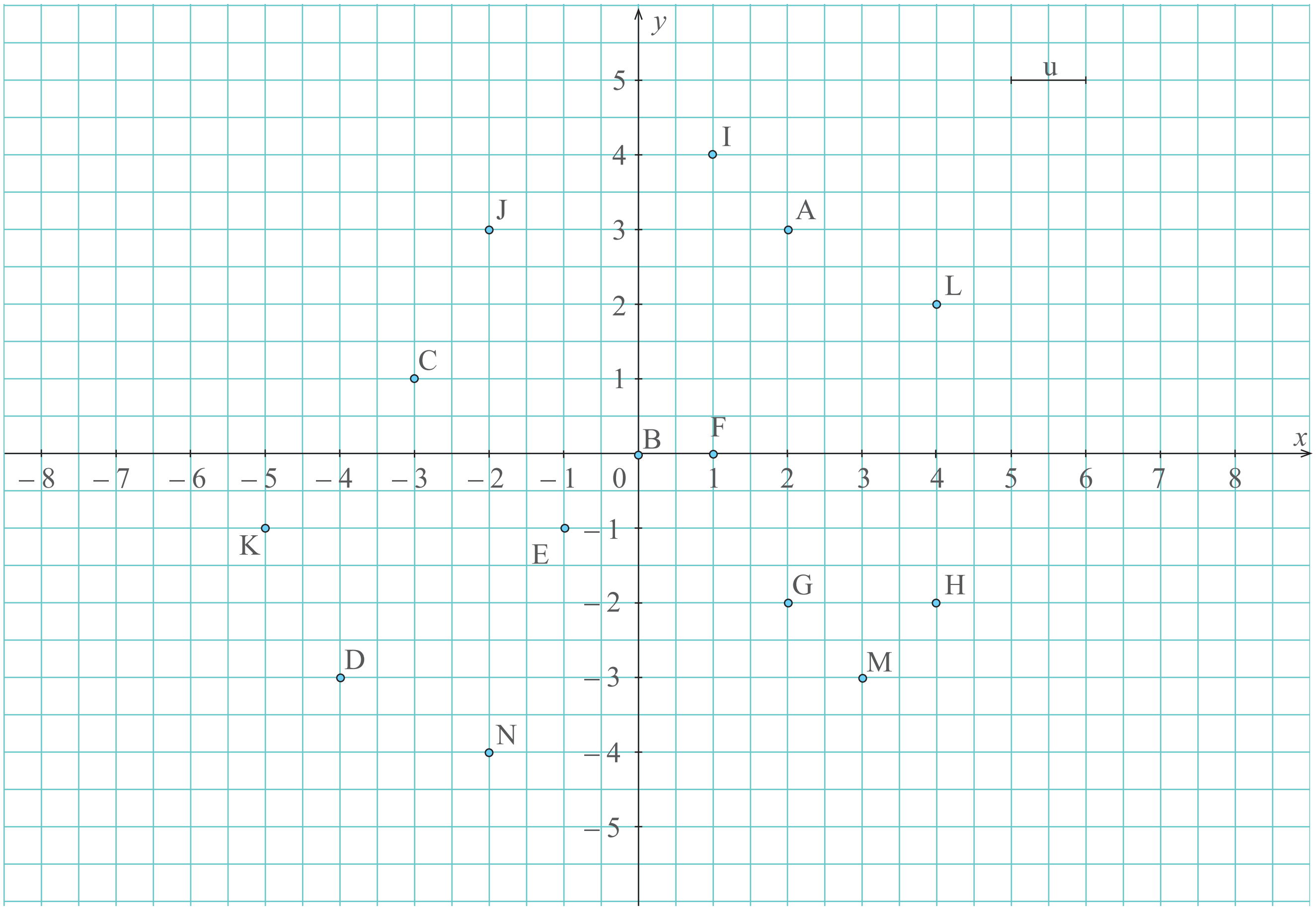


Exersează!

4. Problemă rezolvată. Să reprezentăm punctele $A(2,-3)$ și $B(0,2)$, într-un sistem de axe ortogonale.

5. Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale în plan, următoarele puncte: $A(3,4)$; $B(1,5)$; $C(0,5)$; $D(0,-5)$; $E(-1,-1)$; $F(-5,0)$; $G(0,-4)$; $H(-3,0)$; $I(-6,6)$.

6. Scrie, pe caiet, perechile de numere reale corespunzătoare punctelor din *Imaginea 3*:



Imaginea 3 - Puncte în plan

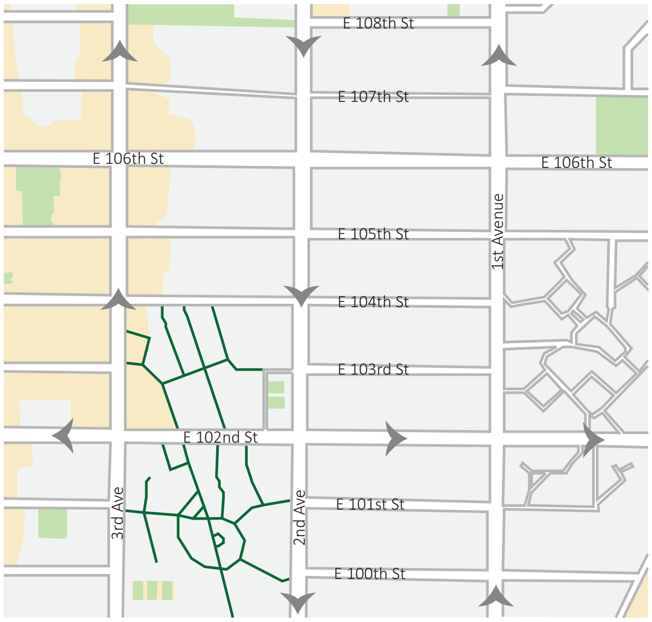
7. Într-un sistem de axe ortogonale în plan, xOy, reprezintă punctele $A\,(0,-2)$; $E\,(-1,1)$; $H\,(-2,0)$; $R\,(1,1)$ și $T\,(2,0)$. Construiește, apoi, segmentele TR, RO, EO, HE, AH și AT.

8. Scrie produsul cartezian al următoarelor mulţimi:
a) $A=\{5,1,2,3\}$ şi $B=\{2\}$;
b) $A=\{-5,2\}$ şi $B=\{-1,1\}$;
c) $A=\{5,6,7,8\}$ şi $B=\{5,6,7,8\}$;
d) $A=\{-3\}$ şi $B=\{1,0,9\}$.

9. Lucrați în pereche. Reprezentați, într-un sistem de axe ortogonale, produsul cartezian $A\times B$ în următoarele cazuri:
a) $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{0,2\}$, b) $A=\{-1,0,2\}$ și $B=\{-2,1,2\}$.

10. Determină cardinalul produsului cartezian al mulţimilor date:
a) $M=\{1,2,3\}$ şi $N=\{11,12,13,14,15\}$;
b) $N=\{1,2,3,...,20\}$ şi $P=\{5,6,9\}$;
c) $D=\{11,12,13,...,19\}$ şi $E=\{10,20,30,...,90\}$;
d) $A=\{1,2,3,...,100\}$ şi $B=\{a,b,c\}$.

11. Un grup de 6 elevi se află în excursie în orașul New York. În *Imaginea 4* este reprezentată harta unei zone din Manhattan unde se află toți cei șase elevi. Mai exact, Mălina și Cezara sunt la intersecția dintre străzile E 102^{nd} St și 3^{rd} Avenue, Delia și Ilinca se află la intersecția dintre străzile E 102^{nd} St și 1^{rd} Ave, iar Alex și Teo sunt la intersecția dintre străzile E 108^{th} St și 1^{st} Avenue. Acești elevi doresc să se întâlnească la o librărie din apropiere, aflată la intersecția dintre străzile E 105^{th} St și 2^{nd} Ave. Dacă toți elevii se deplasează cu aceeași viteză, demonstrează că toți elevii vor ajunge în același timp la librărie, știind că distanța pe orizontală (dintre două bulevarde) este de trei ori mai mare decât distanța pe verticală (dintre două străzi).

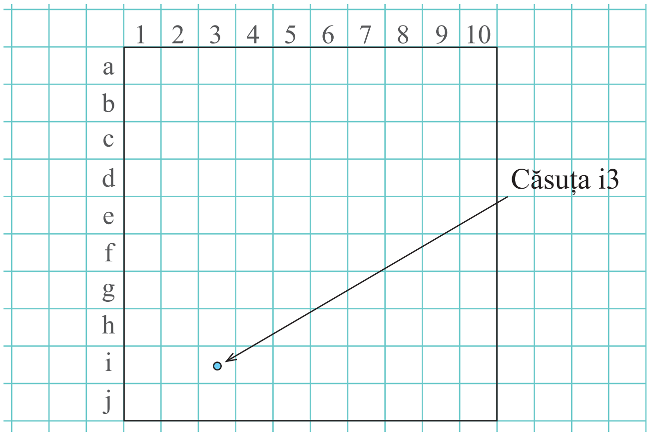


Imaginea 4 - Harta unei zone din Manhattan

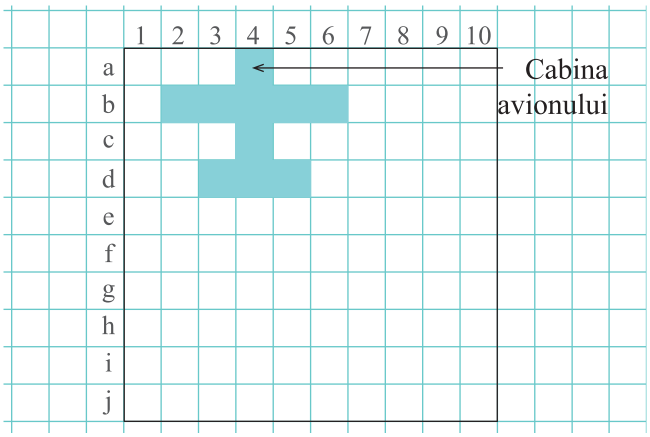
12. Jocul Avioane este o aplicație amuzantă a produsului cartezian, respectiv a unui sistem de axe ortogonale. „Tabla" de joc este o foaie de hârtie de matematică pe care este desenat un pătrat 10 × 10, ca în *Imaginea 5*. Fiecare „căsuță" din pătratul 10 × 10 se identifică cu o literă și un număr.

Se joacă de către două persoane.

Fiecare persoană are o „tablă" și în interiorul ei desenează 3 avioane ca cel din *Imaginea 6*, pe care partenerul de joc nu le vede. Avioanele nu au voie să se suprapună sau să iasă din conturul pătratului. Fiecare jucător va încerca să ghicească unde sunt avioanele adversarului, pentru a le distruge. Astfel, fiecare jucător nominalizează, pe rând, o căsuță (spre exemplu i3), iar adversarul îi va răspunde „aer", dacă nu a lovit avionul, „lovit", dacă a atins avionul, sau „doborât", dacă este lovită cabina avionului. Va câștiga cel care nimerește cabinele tuturor celor trei avioane ale adversarului.



Imaginea 5 – „Tabla" de joc pentru Avioane



Imaginea 6 – Avion desenat

Încearcă și tu acest joc alături de colegul tău de bancă!

Dacă ți-a plăcut acest joc, poți căuta mai multe informații despre el pe Internet. Se poate juca și pe telefon.

Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

Atunci când mergeți în vacanță cu mașina, folosiți diferite sisteme de navigație pentru a vă orienta. Toate aceste sisteme de navigație au în spate un sistem de axe ortogonale și multe calcule matematice.

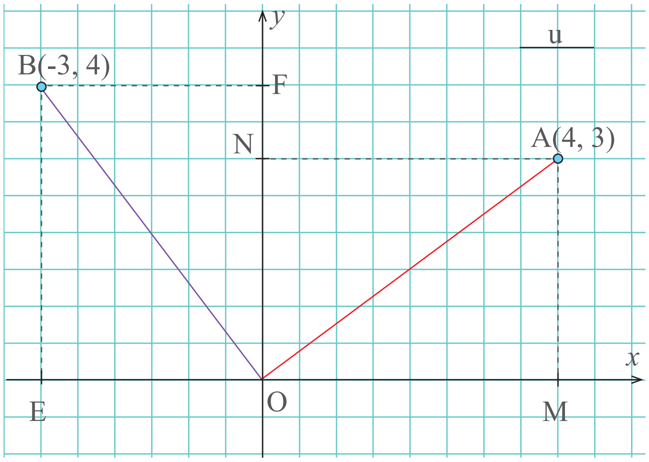
Observă și descoperă!

1. În *Imaginea 7*, folosind un sistem de axe ortogonale în plan, Sara a reprezentat punctele $A(4{,}3)$ și $B(-3{,}4)$.

Determină lungimile segmentelor OM, ON, OE și OF.

Dacă lungimea segmentului OF este de 4 unități, ce lungime are segmentul BE?

Sara determină lungimea segmentului OA, utilizând teorema lui Pitagora, astfel: în triunghiul dreptunghic MOA, $OA^2 = OM^2 + AM^2$, adică $OA^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, de unde $OA = 5$ unități.



Imaginea 7 – Puncte în plan

2. Determină, prin același procedeu, lungimea segmentului OB.

Important

Dacă într-un sistem de axe ortogonale avem punctele $A(x_1,y_1)$ și $B(x_2,y_2)$ putem determina lungimea segmentului AB folosind formula:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

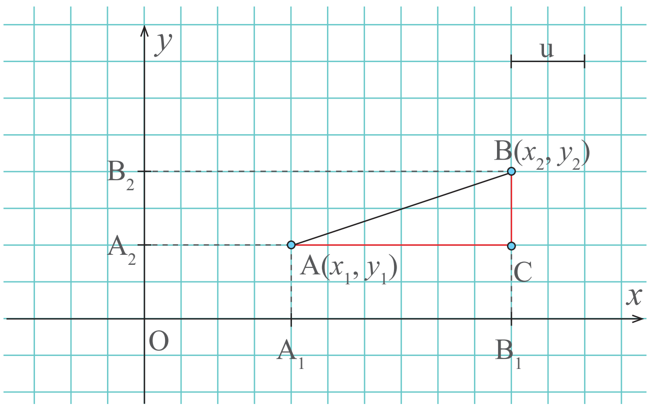
Justificarea formulei:

$OA_1 = x_1$ unități, $OB_1 = x_2$ unități, de unde $A_1B_1 = x_2 - x_1$ și atunci $AC = x_2 - x_1$.

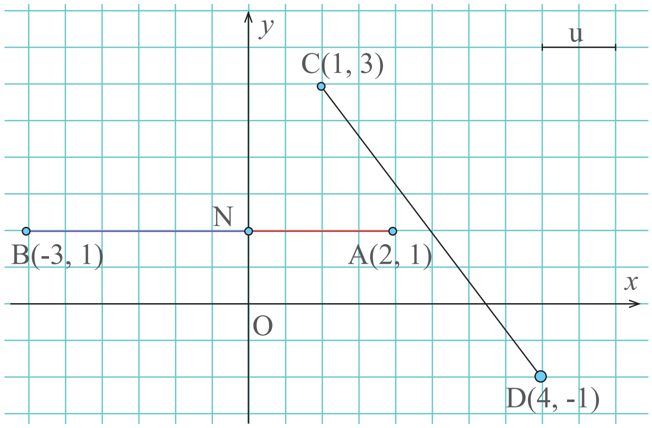
$OA_2 = y_1$ unități, $OB_2 = y_2$ unități, de unde $A_2B_2 = y_2 - y_1$ și atunci $BC = y_2 - y_1$.

Acum, cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, adică $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, de unde

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Exersează!



Imaginea 8 – Puncte în plan

3. Problemă rezolvată. Se consideră punctele $A(2{,}1)$, $B(-3{,}1)$, $C\,(1{,}3)$ și $D\,(4,-1)$. Reprezintă punctele într-un sistem de axe ortogonale și calculează distanțele AB și CD.

Rezolvare. În *Imaginea 8* sunt reprezentate cele patru puncte.

Observăm, în reprezentarea punctelor în sistemul de axe ortogonale, că $AB = AN + BN$. Cum $AN = 2$ (unități) și $BN = 3$ (unități) rezultă $AB = 5$ (unități). Avem, conform formulei, $CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, unde $x_2 = 4$, $x_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_1 = 3$. Înlocuim și obținem $CD = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ (unități).

4. Calculează lungimea segmentului AB în fiecare dintre cazurile:

a) $A(1{,}5)$; $B(4{,}5)$; b) $A(2,-5)$; $B(2{,}7)$; c) $A(3{,}1)$; $B(-1{,}4)$;
d) $A(-2,-5)$; $B(3{,}7)$; e) $A(5{,}4)$; $B(-3,-2)$; f) $A(1,-8)$; $B(-5{,}0)$.

5. Calculează perimetrul triunghiului determinat de cele trei puncte date:

a) $A(0{,}5)$; $B(3{,}1)$; $C(3{,}9)$;
b) $D(1{,}6)$; $E(6,-6)$; $F(6{,}6)$;
c) $M(3{,}3)$; $N(-5,-5)$; $P(7{,}7)$.

6. Considerăm punctele $A(3{,}2)$, $B(6{,}6)$, $C(-1{,}4)$ și $D(0,-3)$, determină lungimile segmentelor determinate de cele patru puncte. Care dintre aceste segmente are lungimea cea mai mică? Dar cea mai mare?

7. Să ne amintim, mai întâi, faptul că având trei puncte distincte date, dacă unul dintre segmentele determinate de cele trei puncte are lungimea egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente, atunci cele trei puncte sunt coliniare. În caz contrar, cele trei puncte formează un triunghi. Folosindu-te de această propoziție matematică, stabilește care dintre următoarele triplete de puncte sunt coliniare:

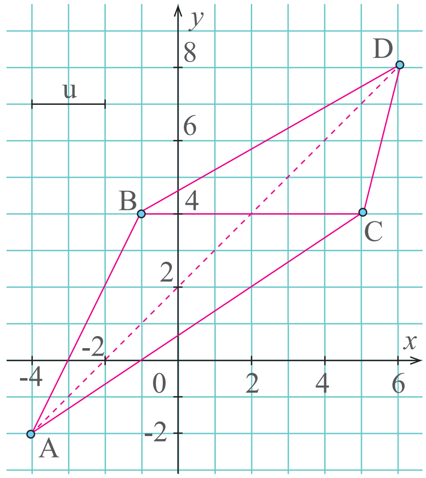
a) $A\,(1{,}0)$, $B\,(2{,}1)$ și $C\,(3{,}2)$;
b) $D\,(-3{,}2)$, $E\,(5,-6)$ și $F\,(2,-3)$;
c) $G\,(2{,}7)$, $H\,(0{,}1)$ și $I\,(4{,}11)$.

8. Lucrați în pereche. Stabiliți natura fiecărui patrulater $ABCD$ din situațiile următoare:

a) $A\,(0{,}1)$, $B\,(2{,}3)$, $C(4{,}1)$ și $D(2,-1)$;
b) $A(1{,}3)$, $B(7{,}5)$, $C(8{,}2)$ și $D(2{,}0)$;
c) $A(-2{,}2)$, $B(3{,}1)$, $C(6{,}3)$ și $D(1{,}4)$;
d) $A(-1,-1)$, $B(7{,}0)$, $C(11{,}7)$ și $D(3{,}6)$.

Indiciu:
Calculați lungimea fiecărei laturi, apoi lungimea fiecărei diagonale.

9. În *Imaginea 9* sunt reprezentate schematic localitățile A, B, C și D. Segmentele din imagine reprezintă drumurile ce conectează localitățile respective. Linia punctată reprezintă un posibil tunel realizat între localitățile A și D. Dacă $A(-4,-2)$, $B(-1{,}4)$, $C(5{,}4)$ și $D(6{,}8)$, iar o unitate de distanță reprezintă 10 km, calculează care ar fi distanța cea mai mică pe care ar trebui să o parcurgă o mașină din localitatea A în localitatea D, înainte de construcția tunelului. Cu cât s-ar micșora această distanță dacă totuși tunelul ar fi construit?



Imaginea 9 – Localități... în plan

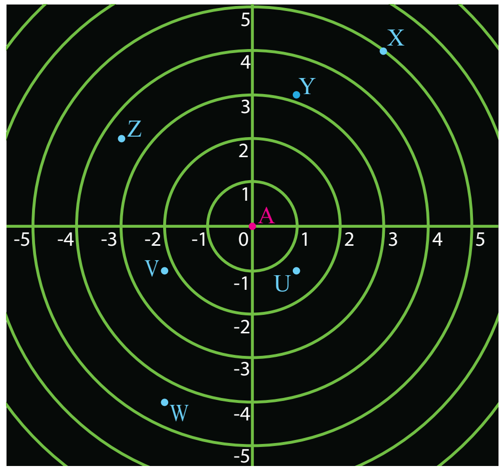
10. Radarul unui submarin A este redat de *Imaginea 10*. Știind că o unitate de distanță este de 100 m, că A este în originea sistemului de axe ortogonale și că $U(1,-1)$, $V(-2,-1)$, $W(-2,-4)$, $X(3{,}4)$, $Y(1{,}3)$ și $Z(-3{,}2)$:

a) determină, prin calcul, distanțele de la celelalte submarine la submarinul A;

b) care dintre celelalte submarine se află cel mai aproape și care cel mai departe față de submarinul A?

c) folosește-te de cercurile trasate pe radar pentru a oferi mai repede un răspuns pentru primele două întrebări;

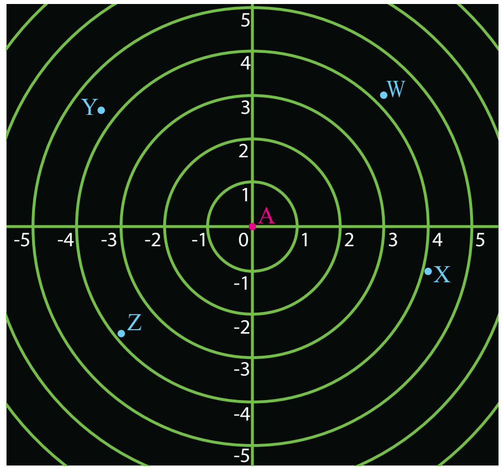
d) dacă eliminăm submarinul A de pe radar, care vor fi cele mai apropiate două submarine acum? În acest caz, mai sunt utile cercurile desenate în figură?



Imaginea 10 – Radarul unui submarin

11. Un avion A de mici dimensiuni trebuie să aterizeze de urgență din cauza unei defecțiuni a computerului de bord. Piloții sunt însă norocoși și au, încă, radarul complet funcțional. În *Imaginea 11*, punctele W, X, Y și Z reprezintă cele mai apropiate patru aeroporturi unde avionul poate ateriza.

Cunoscând coordonatele punctelor $W(3{,}3)$, $X(4,-1)$, $Y\left(-2\sqrt{3},\sqrt{7}\right)$ și $Z\left(-3,-\sqrt{6}\right)$, pe ce aeroport va ateriza avionul, dacă acesta trebuie să ajungă pe cel mai apropiat aeroport dintre cele patru?



Imaginea 11 – Radarul unui avion

Observație: în ultimele două probleme, observăm cum originea sistemului de axe ortogonale nu este neapărat fixă, staționară, ci, în aplicații reale, originea poate fi reprezentată de un obiect mobil, fie el automobil, submarin, avion etc. Aceasta este o metodă des întâlnită atunci când sunt studiate mișcările corpurilor de orice fel, mașini, avioane, oameni sau chiar planete!

Reprezentarea şi interpretarea unor dependenţe funcţionale prin tabele, diagrame şi grafice. Poligonul frecvenţelor

Observă și descoperă!

1. Sara dorește să analizeze rezultatele obținute de colegii ei la un test de matematică. Pentru aceasta îl întreabă pe fiecare coleg ce notă a obținut și completează *Tabelul 1*:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	0	0	1	3	3	5	7	4	3	2

Tabelul 1

A. Observă datele din *Tabelul 1* și răspunde la următoarele întrebări:

a) Câți elevi sunt în clasa Sarei?

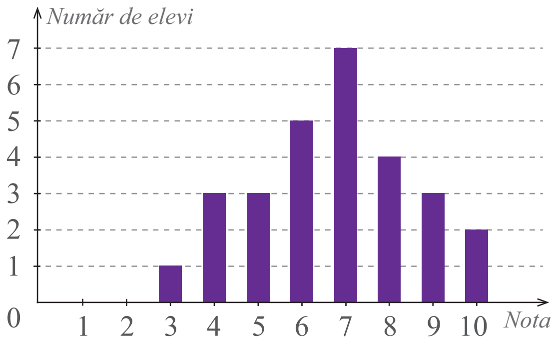
b) Câți elevi au obținut nota 8?

c) Câți elevi au obținut note mai mici decât 5?

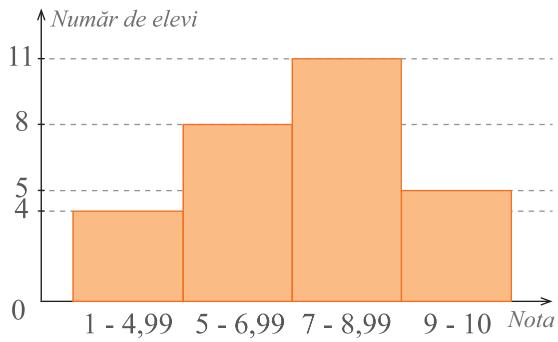
B. Victor îi propune Sarei realizarea unui grafic cu ajutorul căruia să vadă mai rapid rezultatele obținute de clasa lor la acel test. Victor realizează un grafic ca în *Imaginea 12*. Sara vine cu ideea realizării unui alt grafic, ca în *Imaginea 13*.

a) Folosind *Imaginea 12*, realizată de Victor, precizează câți elevi au obținut nota 6.

b) Folosind *Imaginea 13*, realizată de Sara, precizează câți elevi au obținut note între 7 și 9.



Imaginea 12 – Graficul lui Victor



Imaginea 13 – Graficul Sarei

Important

• Pentru a analiza o situație sau a intui o anumită tendință este nevoie de o **colecție de date**.

• Colecția de date se realizează prin observare sau prin chestionare.

Exemple: colectarea de date prin observare: notăm temperaturile înregistrate în fiecare zi ale unei luni, la aceeași oră; colectarea de date prin chestionare: adresăm aceeași întrebare unui anumit număr de persoane.

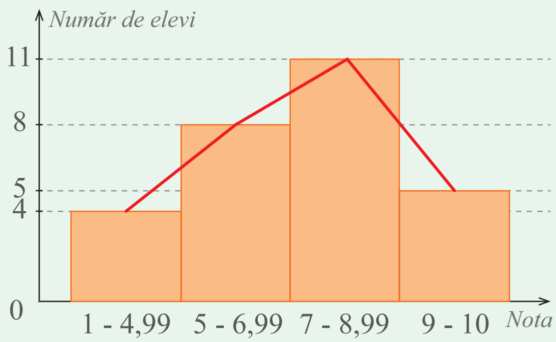
• Cu datele colectate putem realiza:

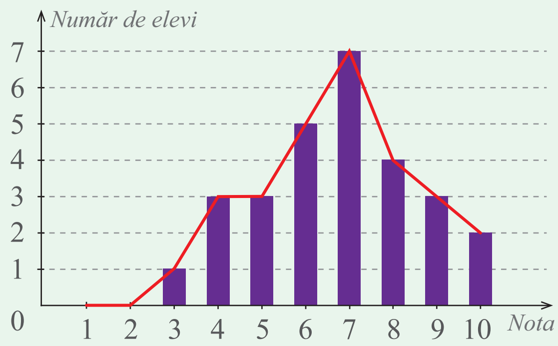
▷ un tabel (vezi tabelul realizat de Sara - *Tabelul 1*);

▷ o diagramă cu bare (vezi imaginea realizată de Victor - *Imaginea 12*);

▷ o histogramă (vezi imaginea realizată de Sara - *Imaginea 13*).

• Linia roșie din histograma sau din diagrama cu bare se numește **poligonul frecvențelor**.





Observă și descoperă!

2. Sara merge în piață și cumpără 3 kg de mere cu 4 lei kilogramul. Suma de bani plătită de Sara este $S = 4 \cdot 3 = 12$ lei.

a) Dacă ar fi cumpărat 7 kg de mere de același fel, care ar fi fost suma de bani plătită de Sara?

b) Găsește o regulă prin care se poate determina suma de bani plătită de Sara pentru x kg de mere de același fel.

3. Victor merge la piață și cumpără 2 kg de mere cu 4 lei kilogramul și 3 kg de pere cu 5 lei kilogramul. Suma de bani plătită de Victor este $S = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 8 + 15 = 23$ lei.

a) Dacă Victor ar cumpăra 3 kg de mere și 2 kg de pere, care ar fi suma de bani plătită de Victor?

b) Găsește o regulă prin care se poate determina suma de bani plătită de Victor pentru x kg de mere și y kg de pere.

Important

• Există situații în care valoarea unei mărimi depinde de valoarea altor mărimi. Acestea se numesc **dependențe funcționale**.

Exemplu: Suma de bani plătită de Sara la piață depinde de cantitatea de mere cumpărată. Suma de bani plătită de Victor la piață depinde de cantitățile de mere și de pere cumpărate.

• Dependențele funcționale se pot exprima și prin formule.

Exemplu: Suma de bani plătită de Sara pentru o cantitate x de mere se exprimă prin formula $S(x) = 4x$, dacă prețul este de 4 lei pentru un kilogram, iar suma de bani plătită de Victor pentru o cantitate x de mere și o cantitate y de pere se exprimă prin formula $S(x,y) = 4x + 5y$, dacă prețurile sunt de 4 lei pentru un kilogram, respectiv de 5 lei pentru un kilogram.

• Cu ajutorul unei dependențe funcționale se poate construi un tabel care să arate valorile mărimilor în situații concrete.

Exemplu:

Sara

x (cantitatea în kg)	2	3	5	6	8
$S(x) = 4x$ (suma de bani în lei)	$S(2) = 4 \cdot 2 = 8$	12	20	24	32

Tabelul 2

Victor

x (cantitatea de mere în kg)	1	2	3	2	3
y (cantitatea de pere în kg)	2	2	4	5	1
$S(x,y) = 4x + 5y$ (suma de bani în lei)	$S(1,2) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 4 + 10 = 14$	18	32	33	17

Tabelul 3

• Dacă într-o dependență funcțională intervin numai două mărimi, atunci situațiile concrete sunt perechi de numere de forma $(x, d(x))$ pe care le putem reprezenta într-un sistem de axe ortogonale; $d(x)$ este numele dependenței.

Exersează!

4. **Problemă rezolvată.** Cantitatea de substanță activă, exprimată în miligrame, dintr-un medicament aflat în corpul uman, pe durata a 6 ore, se exprimă prin formula $C(t) = 6t - t^2$, unde t reprezintă timpul care a trecut de la introducerea medicamentului în corp. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale această dependență, calculată din oră în oră.

Rezolvare. Construim un tabel pentru a determina valorile concrete ale dependenței, din oră în oră.

t	1	2	3	4	5	6
$C(t) = 6t - t^2$	5	8	9	8	5	0

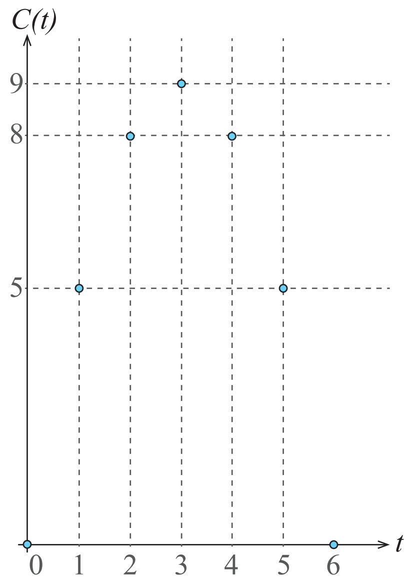
Tabelul 4

Am obținut perechile: $(1, 5)$, $(2, 8)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 0)$ și reprezentarea grafică din *Imaginea 14*.

Pe această reprezentare grafică, putem citi:

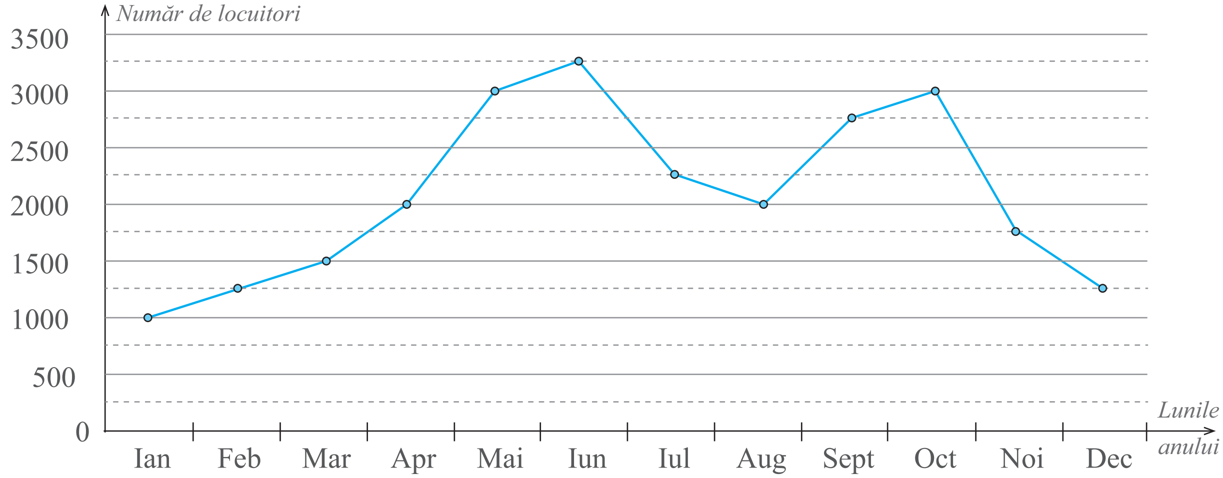
▷ cea mai mare cantitate de substanță activă (9 miligrame) se află în corp după 3 ore de la introducerea acelui medicament;

▷ după 6 ore de la introducerea medicamentului, în corp nu mai există substanță activă.



Imaginea 14
Reprezentare grafică

5. Poligonul frecvenţelor din diagrama din *Imaginea 15* conţine date cu privire la numărul de locuitori care s-au mutat într-o metropolă pe parcursul fiecărei luni a unui an.



Imaginea 15 – Diagrama număr de locuitori

a) Care sunt cele trei luni în care s-au mutat cei mai puţini locuitori?
b) Câţi locuitori s-au mutat vara (Iunie, Iulie, August)?
c) Care este media numărului de locuitori mutaţi în metropolă pe parcursul unei luni?
d) Realizează un tabel şi o diagramă cu bare care să prezinte aceste date. În care din cele două se pot distinge mai uşor informaţiile cu privire la numărul maxim, respectiv numărul minim de locuitori care s-au mutat pe parcursul unei luni?

6. În *Tabelul 5* avem situaţia numărului de elevi din fiecare clasă a unei şcoli. Din acest tabel s-au pierdut unele date.

Clasa	a V-a A		a V-a B		a VI-a A		a VI-a B		a VII-a A		a VII-a B		a VIII-a A		a VIII-a B	
Nr. Elevi	30				31		29				27		25			
Fete/Băieți	F 13	B	F 14	B 14	F	B 20	F	B 15	F 12	B 17	F 11	B	F 9	B	F 15	B 17

Tabelul 5

Lucrați în pereche. Conform datelor din tabel, completaţi informaţiile pierdute şi răspundeți la următoarele întrebări.

a) Care clasă are cei mai mulţi elevi? b) Câţi elevi sunt în şcoală? c) Câţi băieţi sunt în şcoală?

7. În *Tabelul 6* de mai jos sunt prezentate vitezele medii de deplasare ale unor automobile şi timpul de deplasare al acestora.

Automobil	A	B	C	D	E	F	G
Viteză (km/h)	60	100	120	70	80	70	90
Timp (h)	3	2	3	4	3	2	5
Distanţă (km)							

Tabelul 6

a) Scrie tabelul pe caiet şi completează distanţa parcursă de fiecare automobil.
b) Conform tabelului, ce observăm la automobilul A şi la automobilul C? Cum sunt vitezele şi timpii de deplasare ale acestora?
Ce putem spune de distanţe? Dar în cazul automobilelor D şi F?

8. O familie achiziționează în anul 2 015 un autoturism în valoare de 10 000 euro. După doar un an de utilizare, prețul autoturismului a scăzut cu 19%. După cel de-al doilea an de utilizare, mașina a fost ușor avariată și aceasta a condus la scăderea valorii autoturismului cu încă 36%.

a) Calculează cât valora mașina în 2 016 și în 2 017.

b) Realizează o histogramă, folosind programul Excel, pentru a reprezenta evoluția prețului mașinii.

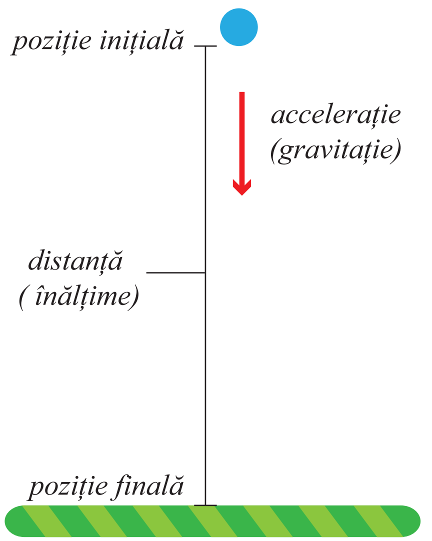
c) Folosește-te de media geometrică pentru a calcula cu ce procent a scăzut, în medie, valoarea mașinii după cei doi ani de utilizare.

Indiciu:
Transformă scăderea cu 19% în înmulțirea cu coeficientul $1 - 0{,}19 = 0{,}81$.

9. Un tânăr dorește să devină pilot de elicopter și află că una dintre cele mai dificile manevre este reprezentată de aterizarea verticală. Pentru aceasta, el trebuie mai întâi să înțeleagă ce se întâmplă, în general, cu obiectele care cad liber din aer, fără a avea posibilitatea de a încetini. El observă că, în acest caz, relația dintre înălțimea h exprimată în metri la care se află obiectul și momentul t exprimat în secunde este dată de formula: $h = h_0 - \frac{g \cdot t^2}{2}$ unde $g \cong 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ reprezintă accelerația gravitațională, iar h_0 înălțimea inițială. Dacă un obiect se află la momentul 0 la înălțimea $h_0 = 1\,617$ m:

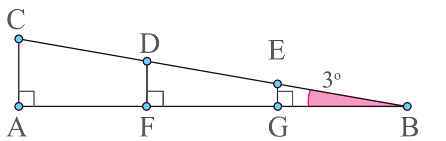
a) În cât timp va ajunge obiectul la sol? Rotunjește rezultatul obținut la unități. Notează noul rezultat cu t_f.

b) Realizează un tabel și o histogramă, folosind programul Excel, în care să descrii relația dintre h și t doar pentru momentele exprimate prin numere naturale mai mici sau egale cu t_f.



Imaginea 16 - Schema unui obiect care cade liber din aer

10. În *Imaginea17*, este reprezentată schematic traiectoria unui avion atunci când acesta urmează să aterizeze. În general, pentru o aterizare cât mai lină, majoritatea piloților preferă să aterizeze sub un unghi de cel mult 3°.



Imaginea 17 - Schema traiectoriei unui avion

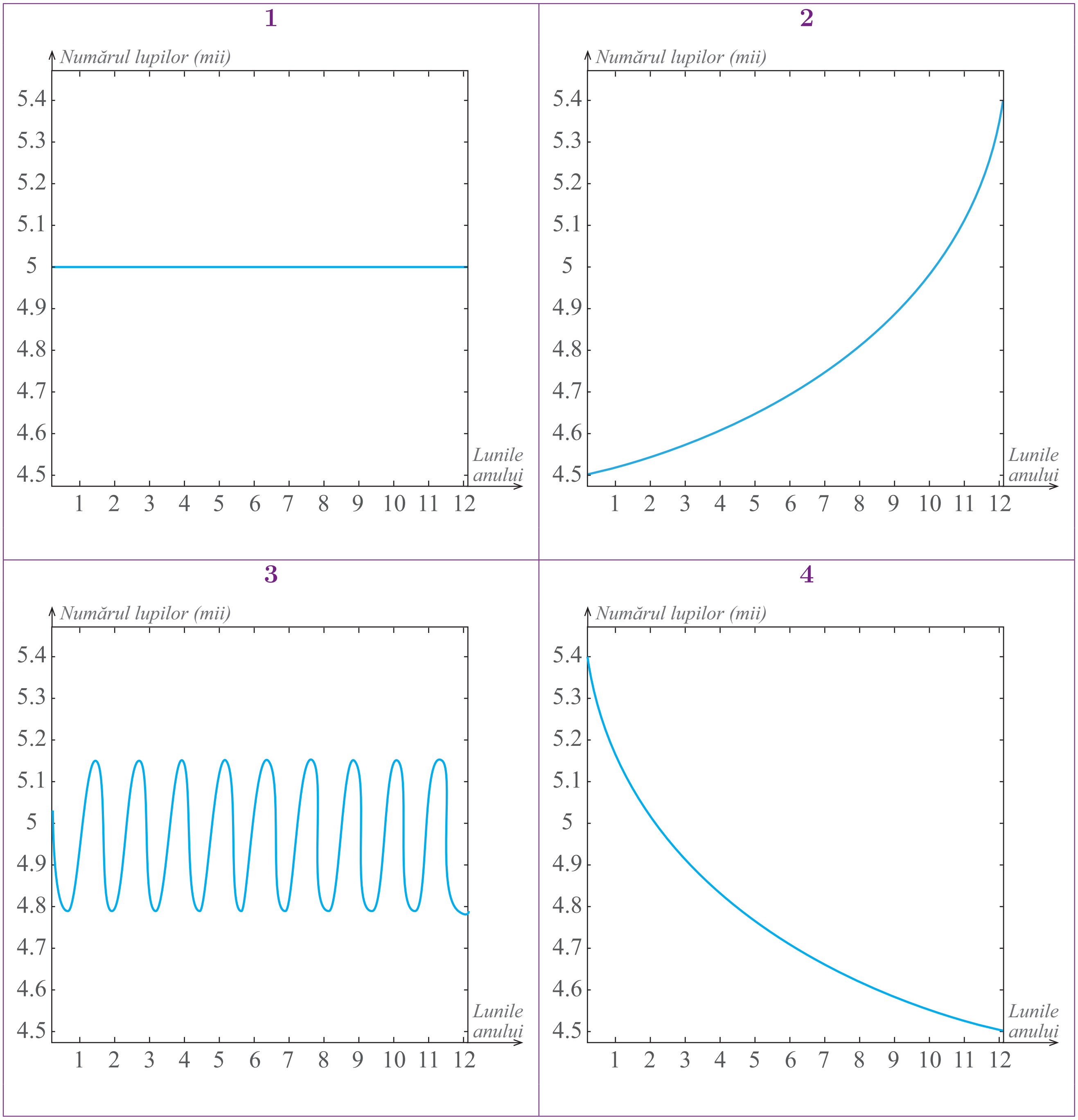
Punctele C, D și E reprezintă trei poziții distincte ale avionului în timpul zborului, punctele A, F și G reprezintă „umbra" avionului pe pământ atunci când acesta se află în pozițiile enumerate anterior, iar B este punctul de pe pista aeroportului, unde avionul va ateriza. În cazul în care unghiul de coborâre este în jur de 3°, atunci există o relație între înălțimea h la care se află avionul și distanța d de la umbra avionul până la punctul de aterizare de pe pista aeroportului: $d = h \cdot 11\sqrt{3}$.

a) Dacă, inițial, un avion se află la înălțimea de 12,4968 km (care reprezintă aproximativ 41 000 de picioare - unitatea de măsură folosită în aviație - sau $FL410$, adică *Flight Level* 410), de la ce distanță terestră față de aeroport ar trebui să înceapă coborârea pentru a respecta unghiul de 3°? Rotunjește rezultatul tău la unități.

b) Realizează un tabel și o histogramă, folosind programul Excel, în care să reprezinți relația dintre h și d, pentru orice valoare a lui h exprimată în km, printr-un număr natural mai mic sau egal cu 13.

11. În figurile din *Imaginea 18* sunt reprezentate diferite tipuri de evoluții în timp a numărului de lupi dintr-o țară. Analizează fiecare imagine și alege varianta în care numărul lupilor:

a) crește neîncetat;
b) descrește constant în timp;
c) rămâne constant, indiferent de timp;
d) are un caracter periodic: scade, apoi crește, apoi iarăși scade ș.a.m.d.



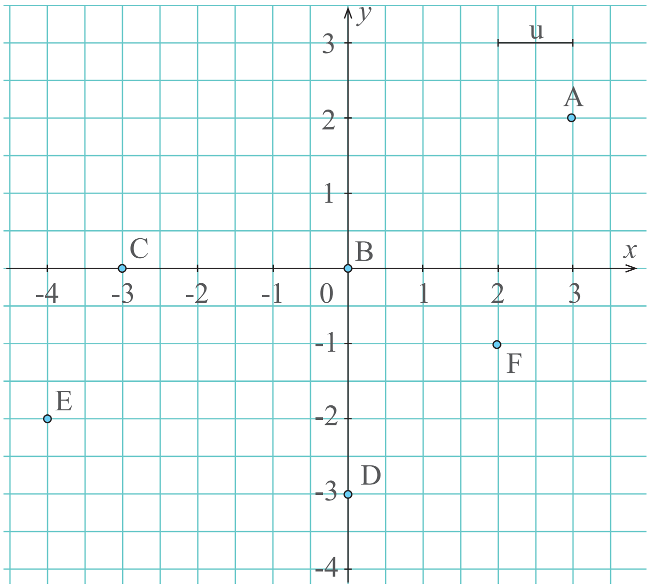
Imaginea 18 – Tipuri de evoluții ale numărului de lupi

- Care dintre aceste patru situații crezi că descrie cel mai bine situația reală?

Recapitulare

1. Unește fiecare punct din prima coloană cu perechea de numere reale corespunzătoare, conform *Imaginii 19*:

a) A	1) (2, -1)
b) B	2) $(-3,\ 0)$
c) C	3) $(0,\ -3)$
d) D	4) $(-2,\ -4)$
e) E	5) $(-4,\ -2)$
f) F	6) (0, 0)
	7) (3, 2)



Imaginea 19 - Puncte în plan

2. Se consideră mulţimile $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 7\}$. Determină și reprezintă în același sistem de axe ortogonale: a) $A \times B$, $B \times A$; b) $A \times C$, $C \times A$; c) $B \times C$, $C \times B$.

3. Într-un sistem de axe ortogonale, se consideră punctele: $A(1, 5)$; $B(4, 5)$; $C(4, 9)$ și $D(7, 9)$.

a) Calculează perimetrul triunghiului ABC.

b) Calculează perimetrul triunghiului BCD.

c) Compară perimetrele celor două triunghiuri.

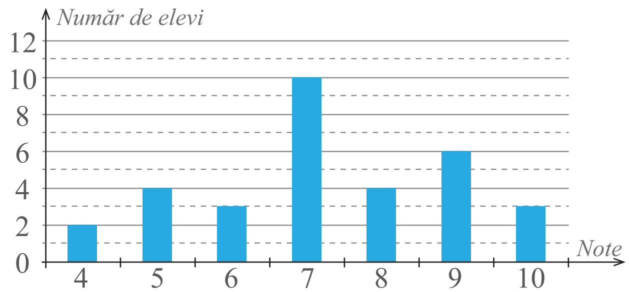
4. Într-un sistem de axe ortogonale, se consideră punctele $A(2,\ -3)$, $B(0, 2)$ și $C(5, 2)$. Calculează aria triunghiului ABC.

5. Diagrama din *Imaginea 20* reprezintă situația notelor obţinute de elevii unei clase la un test de matematică.

a) Câţi elevi sunt în această clasă?

b) Care este media acestei clase la testul de matematică?

c) Realizează diagrama pe caiet şi trasează poligonul frecvenţelor.



Imaginea 20 - Diagrama notelor

d) Realizează o histogramă, folosind programul Excel, care să aibă următoarele categorii de note: note mai mici ca 5, note de 5 și 6, note de 7 și 8, note de 9 și 10.

6. Preţul unei curse cu taxiul se compune dintr-un preț fix de pornire a automobilului și apoi un preț, de asemenea fix, pentru fiecare kilometru parcurs. În *Tabelul 7* este dată formula de calculare a prețului unei curse:

d - Distanța (km)	5	4	10	11	8
Preţul $= 2{,}5 + 3{,}5 \cdot d$ (lei)					

Tabelul 7

Copiază tabelul pe caiet şi completează-l.

7. Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 4, 9, 16\}$. Câte elemente de tipul (x,y) din $A \times B$ verifică proprietatea $x = \sqrt{y}$? Dar $x^2 = \sqrt{y}$?

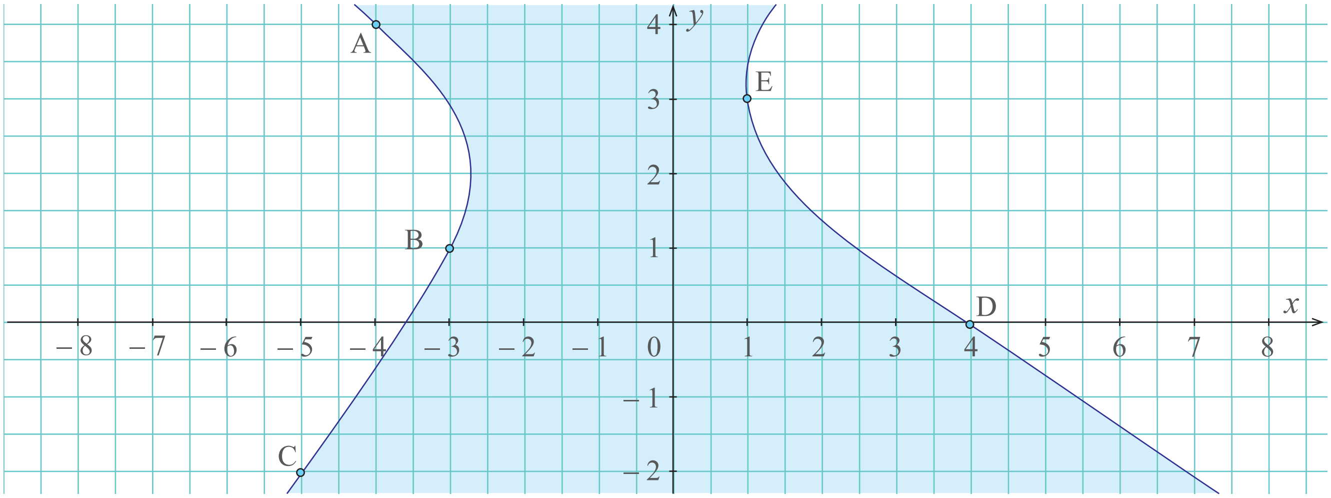
8. Se consideră mulțimile $A = \{-2,\ -1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{-1, 0, 1\}$. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale elementele mulțimii $A \times B$.

9. În *Imaginea 21* este reprezentată schematic, într-un sistem de axe ortogonale, o arie geografică prin care trece un fluviu. Localitățile A, B și C se află pe unul dintre maluri, iar D și E pe celălalt mal.

a) Scrie coordonatele localităților care apar în figură.

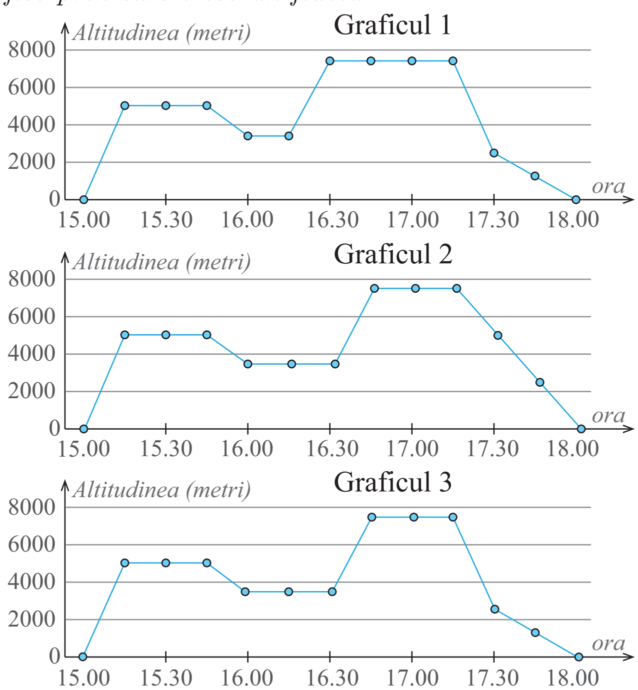
b) Localitățile A, B și C sunt conectate cu drumuri reprezentate de segmentele AB, BC și CA și la fel și localitățile D și E sunt conectate prin drumul DE. Calculează lungimile acestor drumuri.

c) Dacă oamenii din acea zonă doresc să construiască un pod peste fluviu care să facă legătura între două localități, care ar fi cele mai potrivite? Motivează răspunsul tău!



Imaginea 21 – Reprezentarea schematică a ariei geografice prin care trece un fluviu

10. Un avion decolează la ora 15:00 și urcă până la altitudinea de 5 000 de metri timp de 15 minute, după care zboară la acest nivel până la ora 15:45 când coboară la altitudinea de 3 500 de metri pentru a evita turbulențele aerului. Această coborâre durează 15 minute, unde avionul își păstrează altitudinea timp de 30 de minute. Din cauza traficului aerian, avionul își schimbă din nou nivelul de zbor, acesta urcând până la altitudinea de 7 500 de metri. Această nouă urcare durează încă 15 minute. Ajuns la noul nivel, avionul își menține zborul acolo până la ora 17:15, după care va începe manevrele de aterizare, coborând mai întâi la 5 000 de metri în 15 minute, apoi coboară mai lin până când aterizează, ultima coborâre având o durată de 30 de minute. Care dintre aceste grafice descrie zborul prezentat mai sus?



Imaginea 22 – Grafice ce descriu zborul unui avion.

11. Reprezintă, în sistemul de axe ortogonale xOy, punctele $A(3, 5)$ și $B(6, 0)$.

a) Determină lungimile segmentelor AO, BO și AB.

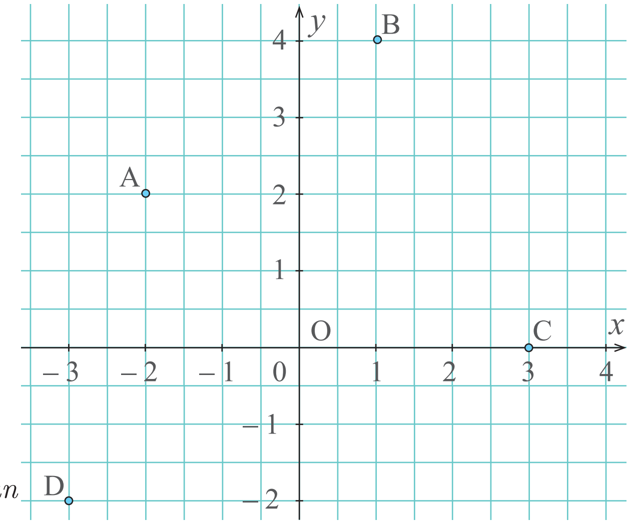
b) Ce fel de triunghi este $\triangle OAB$? Rotunjește la zecimi valoarea lungimii segmentului AO și compară rezultatul cu lungimea segmentului AB.

Evaluare

10p din oficiu

1. Unește punctele date în coloana **A** cu perechile de numere reale corespunzătoare din coloana **B**, astfel încât reprezentările din *Imaginea 23* să fie corecte:

	A	**B**
2.5p	1) A	a) $(1,\ 4)$
2.5p	2) B	b) $(-2;\ 2)$
2.5p	3) C	c) $(-3;\ -2)$
2.5p	4) D	d) $(-2;\ -3)$
		e) $(3;\ 0)$

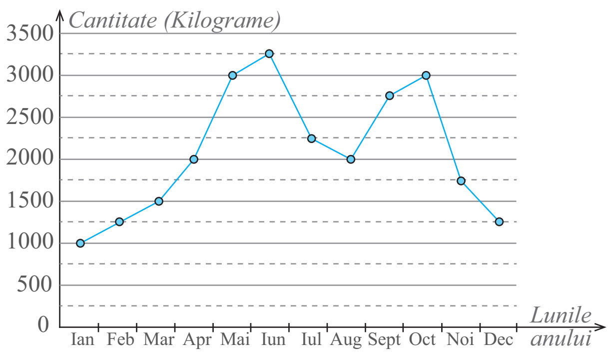


Imaginea 23 - Puncte în plan

2. Poligonul frecvențelor din diagrama din *Imaginea 24* conține date cu privire la numărul kilogramelor de fructe vândute la un supermarket.

5p a) Luna în care s-au vândut cele mai multe fructe este . . . .

5p b) În luna aprilie s-au vândut cu . . . kilograme mai puțin decât în luna mai.

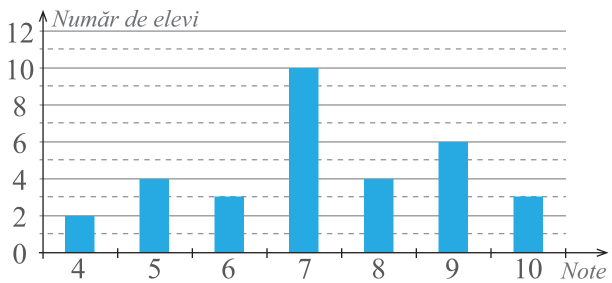


Imaginea 24 – Diagrama datelor privind vânzarea fructelor dintr-un supermarket

3. În diagrama din *Imaginea 25* sunt reprezentate notele obținute de către elevii unei clase la testul de istorie. Completează cu **A**, dacă afirmația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

5p a) 7 elevi au obținut la test nota 10. (. . .)

5p b) Media clasei la testul de istorie a fost 7,25. (. . .)



Imaginea 25 – Diagrama notelor obținute de unii elevi

10p **4.** Se consideră mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{0,1\}$. Produsul cartezian al celor două mulțimi are cardinalul:

A. 5 B. 6 C. 3 D. 2

5. Se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(1, 4)$, $C(1, 0)$ și $D(-3, 0)$.

10p a) Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale în plan, punctele date.

10p b) Calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.

10p **6.** Reprezintă, în sistemul de axe ortogonale xOy, punctele $A(-2, 4)$, $B(5, 0)$ și $C(5, 2)$. Calculează aria triunghiului ABC.

10p **7.** Demonstrează că punctele $M(-6,\ -5)$, $N(0,\ -3)$ și $P(9, 0)$ sunt coliniare.

10p **8.** Se consideră punctele $C(-2, 5)$, $D(4, 5)$, $E(1, 1)$. Demonstrați că triunghiul CDE este isoscel.

Exersezi și progresezi

1. Scrie produsul cartezian al următoarelor mulţimi și reprezintă într-un sistem de axe ortogonale elementele mulțimilor $A \times B$ și $C \times D$:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0\}$;

b) $C = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, $D = \{-1, 2\}$.

2. Determină elementele mulţimilor A și B, cunoscând elementele produsului cartezian $A \times B$:

a) $A \times B = \{(2, 5);\ (6, 5)\}$;

b) $B \times A = \{(3, 1);\ (3, 3);\ (3, 7);\ (2, 1);\ (2, 3);\ (2, 7)\}$;

c) $A \times B = \{(2, 6);\ (7, 6);\ (9, 6);\ (2, 7);\ (7, 7);\ (9, 7);\ (2, 8);\ (7, 8);\ (9, 8)\}$;

d) $B \times A = \{(7, 1);\ (7, 7);\ (7, 10);\ (8, 1); (8, 7);\ (8, 10)\}$;

e) $A \times B = \{(1, 1);\ (4, 1);\ (9, 1)\}$.

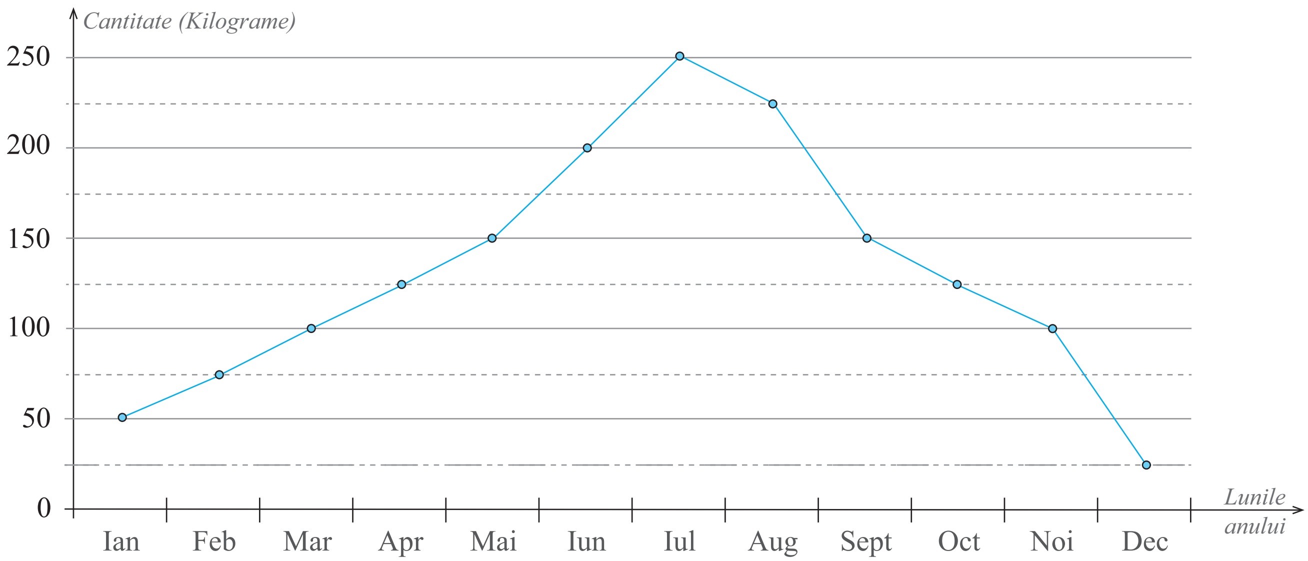
3. Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale, punctele următoare $A(1, 3)$; $B(4, 7)$; $C(-2, -1)$; $D(4, -3)$; $E(-1, -5)$; $F(3, -5)$ şi calculează lungimile tuturor segmentelor determinate de acestea.

4. În diagrama din *Imaginea 26* este prezentat numărul de kilograme de îngheţată vândute pe parcursul unui an într-o gelaterie.

a) Care este luna în care s-au vândut cele mai multe kilograme de îngheţată?

b) Care sunt lunile în care s-au vândut mai puţin de 100 de kilograme de înghețată?

c) Calculează numărul mediu de kilograme de înghețată vândute în lunile de vară (Iunie, Iulie, August).



Imaginea 26 – Diagrama datelor privind vânzarea înghețatei într-o gelaterie

5. Se consideră mulțimea $A = \{1, 4, 9, 36\}$.

a) Determină mulțimea $A \times A$ și cardinalul mulțimii $A \times A$.

b) Se consideră mulțimea $B = \left\{\sqrt{x \cdot y} \mid (x, y) \in A \times A\right\}$. Determină cardinalul mulțimii B.

6. Se consideră un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul A și cercul de centru A și rază 5, ca în *Imaginea 27*.

a) Determină coordonatele tuturor punctelor aflate în *Imaginea 27*.

Indiciu: $F(4,3)$.

b) Verifică dacă toate punctele notate în figură, distincte de A, se află pe cercul de centru A și rază 5.

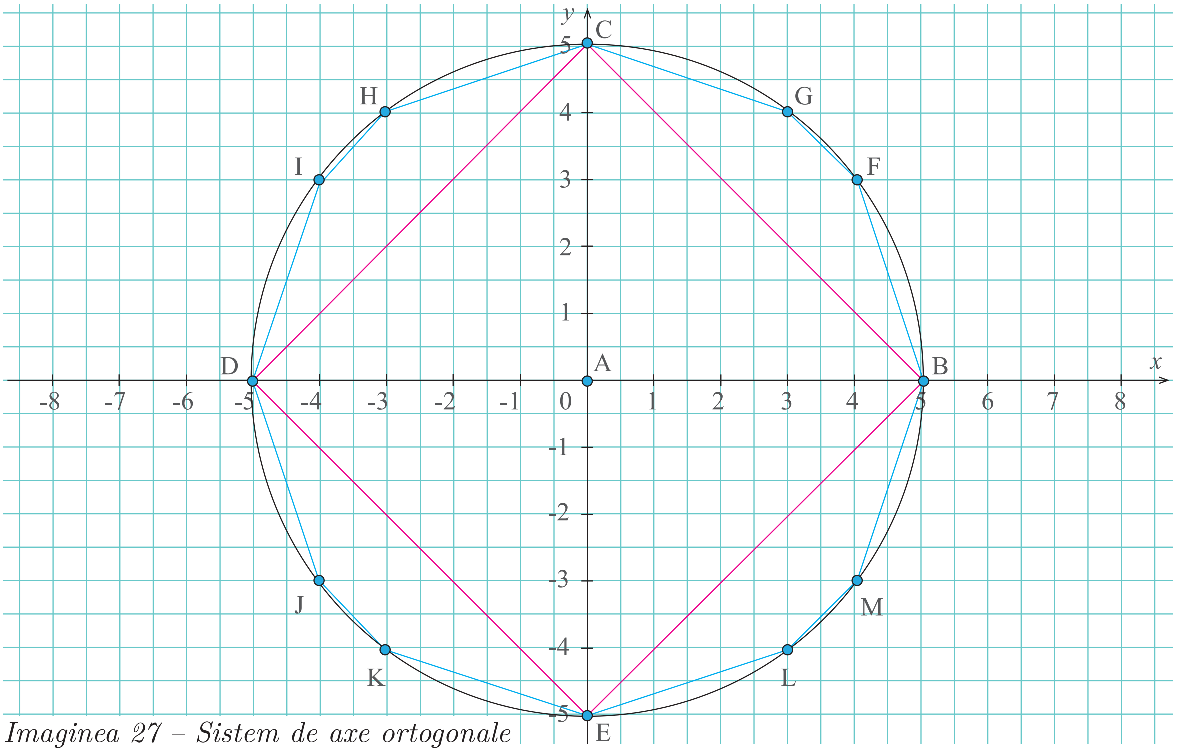
Indiciu: calculează lungimile segmentelor AB, AC, ... Pentru un cerc de rază r, se cunoaște faptul că lungimea sa este dată de formula $2 \cdot \pi \cdot r$, unde π este un număr irațional și are valoarea aproximativă de 3,14.

c) Folosește aproximarea de 3,14 pentru numărul π pentru a obține un calcul estimativ al lungimii cercului de centru A și rază 5.

d) Calculează lungimile segmentelor de culoare roșie. Compară rezultatul obținut la punctul c) cu suma tuturor lungimilor segmentelor roșii.

e) Procedează analog pentru segmentele albastre (segmentele FG, HI, JK și LM sunt și ele albastre).

f) Care dintre cele două rezultate obținute la punctele d) și e) este mai apropiat de rezultatul obținut la punctul c)? Cum ai putea obține o estimare și mai bună?



Imaginea 27 – Sistem de axe ortogonale

7. În sistemul de axe ortogonale xOy, reprezintă punctele $A(2,3)$ și $B(6,5)$.

a) Reprezintă punctul $C(x,y)$, unde x este media aritmetică a absciselor punctelor A și B, iar y este media aritmetică a ordonatelor punctelor A și B.

b) Calculează lungimile segmentelor AC, CB și AB. Ce observi? Ce poți spune despre poziția punctului C față de segmentul AB?

8. Dacă A, B și C sunt trei mulțimi având card $A \times B = 77$, card $B \times C = 91$ și card $A \times C = 143$, determină card A, card B și card C (am notat card Xcardinalul mulțimii X).

9. Se consideră A și B două mulțimi având card $A =$ card $B = 3$. Dacă $A \times B = B \times A$, demonstrează că $A = B$.

Patrulaterul

Unitatea **6**

Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Observă și descoperă!

1. Sara citește următorul enunț: *Desenează patru puncte, oricare trei dintre ele necoliniare și apoi construiește segmentele determinate de acestea.* Deoarece nu își amintește niște noțiuni, apelează la Victor.

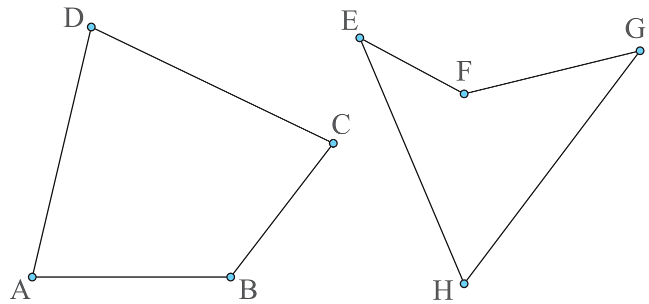
Sara: Victor, tu îți amintești ce înseamnă trei puncte necoliniare?
Victor: Desigur, sunt trei puncte care nu sunt situate pe aceeași dreaptă.
Ana: Ai dreptate, mulțumesc! Acum mă voi descurca!

a) Realizează desenul pe care trebuie să îl facă Sara.
b) Câte segmente ai obținut?

Important

• Numim **patrulater** linia frântă închisă formată din patru segmente.

• Un patrulater se notează scriind una după alta literele care denumesc cele patru puncte.



Exemple: patrulaterele $ABCD$ și $EHGF$.

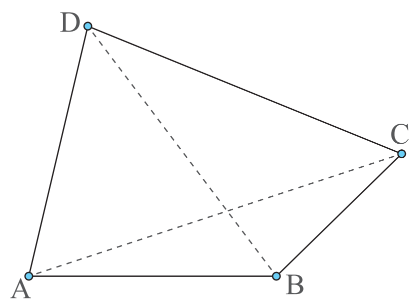
• **Elementele unui patrulater** sunt:

▶ **Vârfurile**, adică cele patru puncte (A, B, C și D sunt vârfurile patrulaterului);

▶ **Laturile**, adică segmentele care unesc două vârfuri consecutive (laturile sunt AB, BC, CD și DA);

▶ **Diagonalele**, adică segmentele care unesc două vârfuri neconsecutive (diagonalele sunt AC și BD);

▶ **Unghiurile** formate de laturile care au un capăt comun (unghiurile patrulaterului sunt: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ și $\sphericalangle DAB$).



• **Expresii întâlnite la un patrulater:**

▶ **Laturi opuse:** de exemplu laturile AB și CD.

▶ **Laturi alăturate:** de exemplu laturile AB și AD.

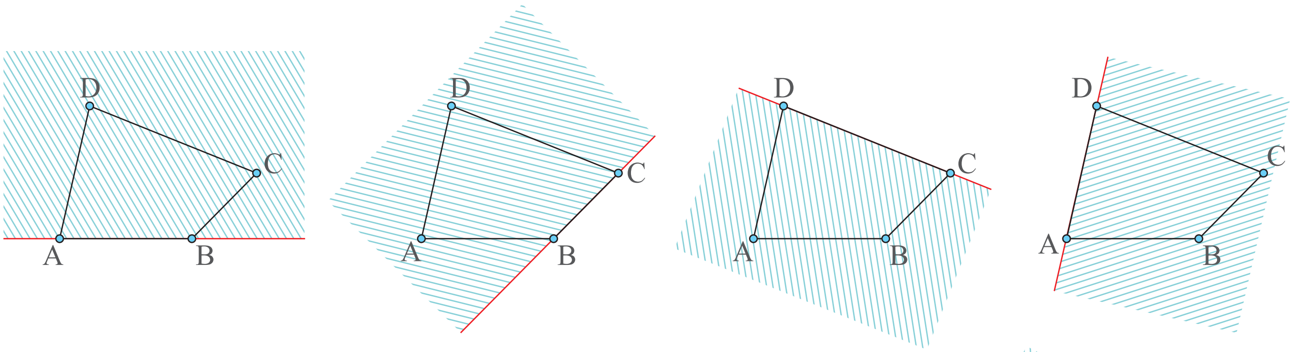
▶ **Unghiuri opuse:** de exemplu unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADC$.

▶ **Unghiuri alăturate:** de exemplu unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCD$.

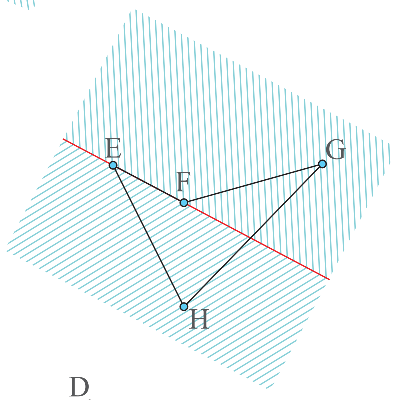
• Numim **patrulater convex** un patrulater în care dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate nu separă celelalte două vârfuri.

• Numim **patrulater concav** un patrulater care nu este patrulater convex.

Exemplu: Patrulaterul ABCD este un patrulater convex.



Exemplu: Patrulaterul EHGF nu este convex. Vârfurile G și H sunt separate de dreapta determinată de vârfurile E și F, fiind situate în semiplane opuse. Patrulaterul EHGF este patrulater concav.



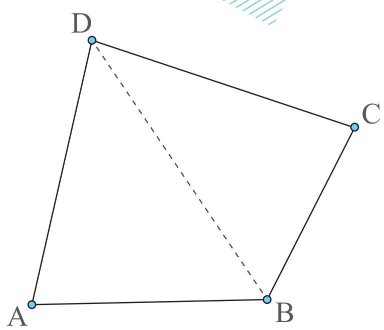
• Într-un patrulater convex **suma măsurilor unghiurilor** este egală cu 360°.

Justificare: Cu ajutorul diagonalei BD obținem triunghiurile ABD și BCD. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Putem scrie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA = 180°$ și $\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC = 180°$.

Adunând cele două relații, obținem:

$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA + \sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC = 360°$.

Dar $\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB = \sphericalangle ADC$ și atunci $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.



Exersează!

2. a) Care dintre patrulaterele din *Figurile 1-4* sunt convexe și care sunt concave?

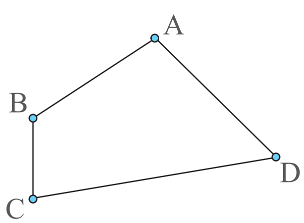


Figura 1

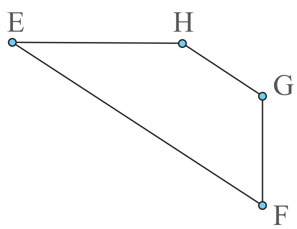


Figura 2

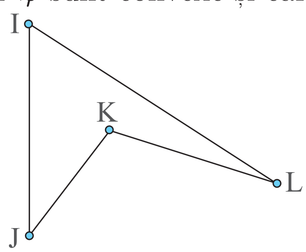


Figura 3

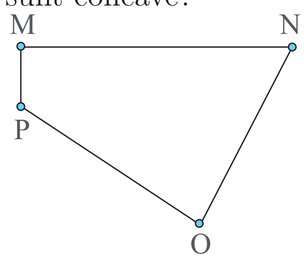


Figura 4

b) Scrie laturile, vârfurile, diagonalele și unghiurile fiecărui patrulater convex.

c) Dă exemplu de două perechi de laturi alăturate și scrie perechile de laturi opuse pentru fiecare patrulater convex.

3. Calculează măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului convex $ABCD$ în fiecare din cazurile:

a) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 150°$; b) $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 63°$, $\sphericalangle D = 114°$;

c) $\sphericalangle A = 52°$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 88°$; d) $\sphericalangle A = 57°$, $\sphericalangle C = 39°$, $\sphericalangle D = 72°$.

4. Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele:

a) 3, 6, 7 și 2; b) 9, 4, 10 și 13; c) 9, 3, 6 și 2; d) 3, 6, 2 și 4.

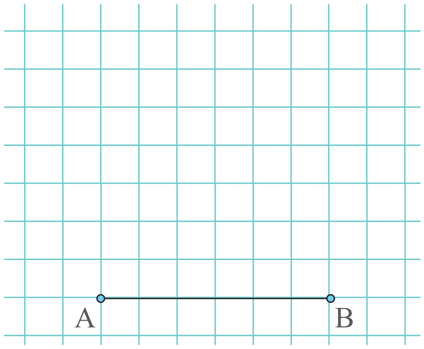
Indicație: a) $\{\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D\}$ *d.p.* $\{3,6,7,2\} \Rightarrow \dfrac{\sphericalangle A}{3} = \dfrac{\sphericalangle B}{6} = \dfrac{\sphericalangle C}{7} = \dfrac{\sphericalangle D}{2} \overset{\text{notăm}}{=} k.$

5. Desenează următoarele patrulatere, cunoscând doar trei dintre măsurile unghiurilor patrulaterului, latura $AB = 3\ cm$ și faptul că acestea sunt convexe. Determină, în fiecare dintre aceste cazuri, care este măsura celui de-al patrulea unghi.

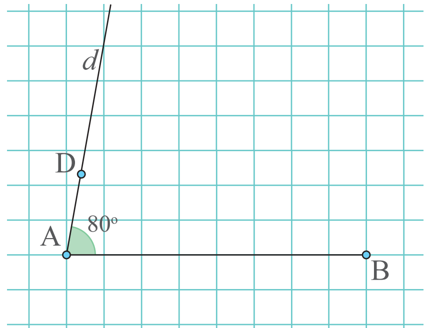
a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 120°$, $\sphericalangle C = 60°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$;

c) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 120°$; d) $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle D = 85°$.

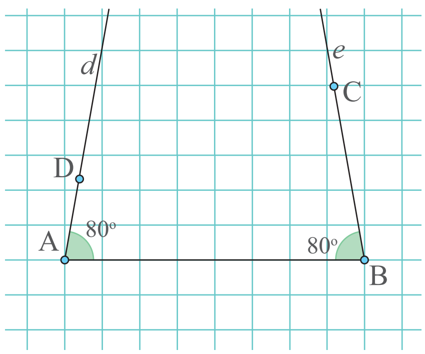
Exemplu: Desenează un patrulater convex $ABCD$, știind că $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 80°$.



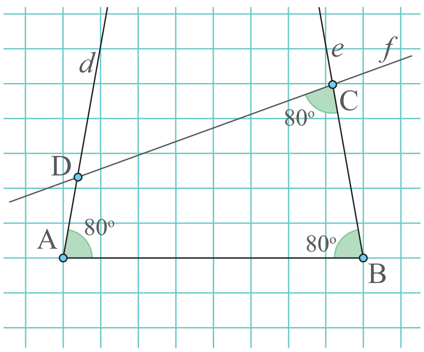
Pasul 1: Construim segmentul AB, cu lungimea de 3 cm.



Pasul 2: Construim semidreapta d suport a laturii AD, astfel încât unghiul $\sphericalangle DAB = 80°$, dar nu fixăm încă poziția punctului D pe semidreapta d.



Pasul 3: Procedăm analog și pentru semidreapta BC, astfel încât $\sphericalangle CBA = 80°$. Construim dreapta e în același semiplan în care am construit și semidreapta suport a laturii AD.



Pasul 4: Fixăm o poziție pentru punctul C și construim semidreapta f suport a laturii CD astfel încât $\sphericalangle BCD = 80°$. Punctul D va fi la intersecția semidreptelor d și f.

Atenție! În cazul în care semidreapta f intersectează segmentul AB, obținem *Figura 5*. Este, în acest caz, patrulaterul $ABCD$ un patrulater convex?

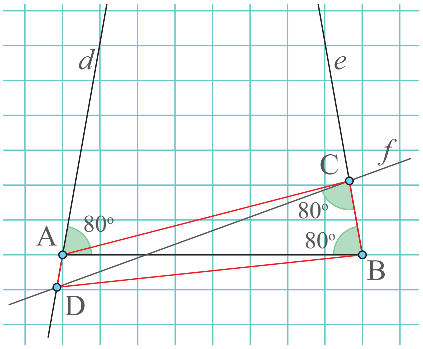


Figura 5

6. În *Figura 6* sunt reprezentate trei localități A, B și C. Consilierii locali ai fiecărei localități doresc să realizeze un proiect în care să determine cea mai potrivită locație pentru un aeroport D, care să fie la îndemâna cetățenilor din fiecare localitate. Regiunile din jurul celor trei localități au fost numerotate cu numere de la 1 la 7. Cei trei consilieri au observat următoarele: regiunea 1 este una montană, unde costurile construirii unui aeroport ar fi foarte mari, iar regiunile 2, 3 și 4 sunt regiuni împădurite, unde aceștia nu își doresc să construiască un aeroport. Le rămân astfel doar zonele 5, 6 și 7, zone de câmpie, unde construirea unui aeroport nu este complicată. Consilierul localității A propune ca aeroportul să fie construit în regiunea 6, cel din localitatea B în regiunea 5, iar cel din localitatea C în regiunea 7.

În care dintre aceste situații patrulaterul $ABCD$ este unul convex? Dar unul concav? *Indicație: Desenează câte un astfel de patrulater pentru fiecare situație.*

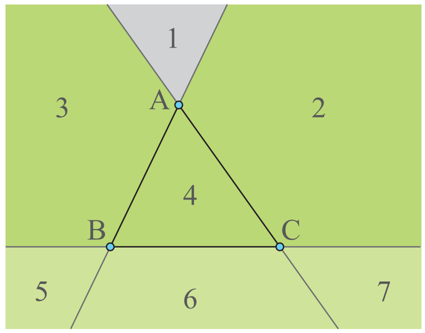
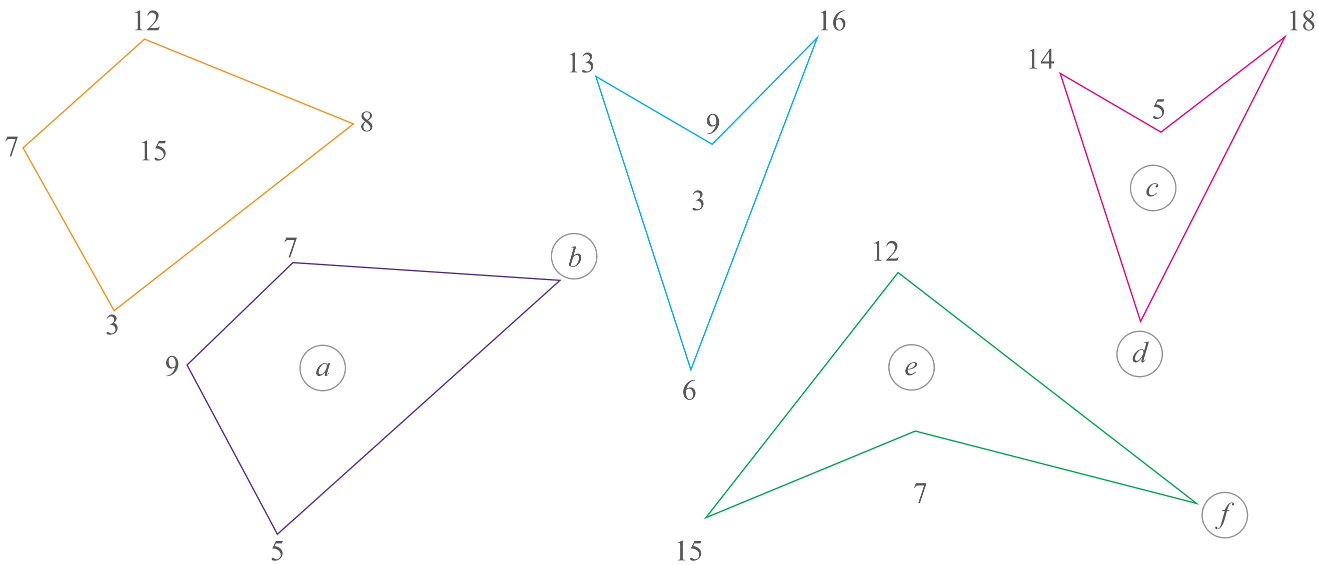


Figura 6

Joc

Numere și patrulatere

Găsește regula și completează numerele lipsă din fiecare patrulater.



Paralelogramul: proprietăți

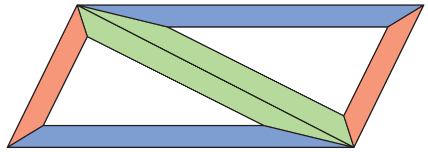


Figura 7

Observă și descoperă!

1. Jucându-se cu două echere identice, la un moment dat, Sara le-a așezat ca în *Figura 7* și a exclamat: Am obținut un patrulater convex!

a) Este adevărată afirmația Sarei?

b) Ce poți spune despre laturile colorate cu culoarea roșie? Dar despre laturile colorate cu culoarea albastră?

c) Cum justifici aceste afirmații?

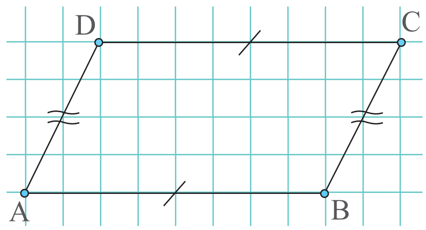
Indiciu:
Amintește-ți de dreptele tăiate de o secantă și de unghiurile alterne interne.

Important

• Numim **paralelogram** patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.

Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$.

Dacă $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.



• În orice paralelogram, laturile opuse sunt congruente două câte două.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram

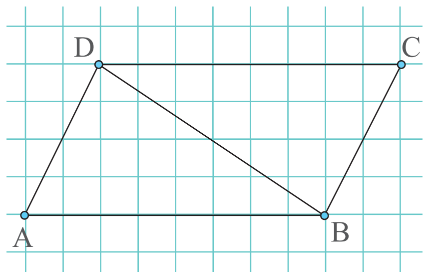
Concluzie: $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

Demonstrație:

Construim diagonala BD și obținem triunghiurile ABD și BCD în care:

- $BD \equiv BD$ (latură comună)
- $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și BD secantă)
- $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AB \parallel CD$ și BD secantă)

Rezultă, conform cazului ULU de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.



• Orice patrulater convex în care laturile opuse sunt congruente două câte două este paralelogram.

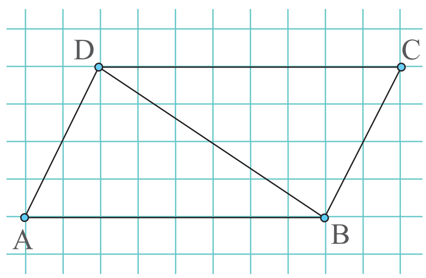
Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație:

Construim diagonala BD și obținem triunghiurile ABD și BCD în care:

- $BD \equiv BD$ (latură comună)
- $AB \equiv CD$ (din ipoteză)
- $AD \equiv BC$ (din ipoteză)



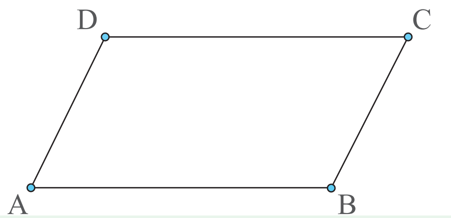
Rezultă, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$.

Acum, luând dreptele AD și BC și secanta BD, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne). Rezultă $AD \parallel BC$ și, cu aceeași metodă, obținem $AB \parallel CD$, deci $ABCD$ este paralelogram.

• **În orice paralelogram unghiurile opuse sunt congruente două câte două.**
Justificare: Din $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ demonstrat anterior deducem că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$. Din aceeași congruență de triunghiuri, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$. Adunând cele două relații, avem $\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CBD + \sphericalangle ABD$, adică $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$.

• **Orice patrulater convex în care unghiurile opuse sunt congruente două câte două este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex;
$\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$; $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$
Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

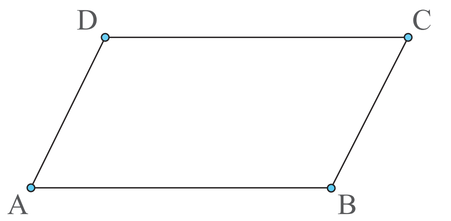


Demonstrație: În orice patrulater convex suma măsurilor unghiurilor este de 360°. Prin urmare, avem relația $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.

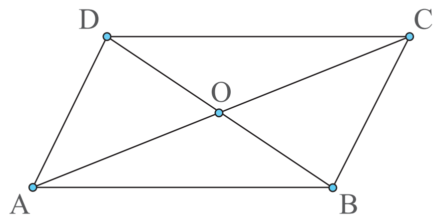
Din ipoteză $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$. Putem rescrie suma de mai sus astfel: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB + \sphericalangle CDA = 360°$ sau $2 \cdot \sphericalangle DAB + 2 \cdot \sphericalangle ADC = 360°$ și prin împărțire la 2 avem $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$. Aceasta înseamnă că, pentru dreptele AB și CD și secanta AD, avem o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare. Rezultă de aici că $AB \parallel CD$ (1) și, analog, obținem $AD \parallel BC$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $ABCD$ este paralelogram.

• **În orice paralelogram, oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.**
Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram
Concluzie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ și $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$
Demonstrație: Din $AB \parallel CD$ ($ABCD$ este paralelogram) și AD secantă obținem $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (unghiuri interne de aceeași parte a secantei).

• **Orice patrulater convex în care oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare este paralelogram.**
Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex
$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$,
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ și $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$.



Concluzie: $ABCD$ - paralelogram
Demonstrație: Pentru dreptele AB și CD și secanta AD, unghiurile DAB și ADC sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Cum, din ipoteză $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, rezultă $AB \parallel CD$ și, cu aceeași metodă, obținem $AD \parallel BC$, deci $ABCD$ este un paralelogram.



• **În orice paralelogram, diagonalele au același mijloc.**

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$

Concluzie: $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$

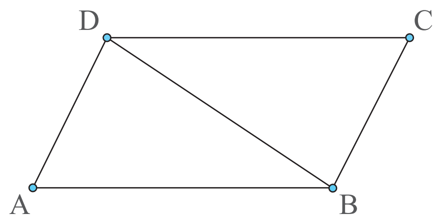
Demonstrație: În ΔAOD și ΔBOC avem $AD \equiv BC$ (într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente), $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și BD secantă) și $\sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle BCO$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și AC secantă). Rezultă, conform cazului ULU de congruență a triunghiurilor, că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$, de unde $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$.

• **Orice patrulater convex în care diagonalele au același mijloc este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$, $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație: În ΔAOD și ΔBOC avem din ipoteză $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$ (sunt unghiuri opuse la vârf). Rezultă, din cazul LUL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$, de unde $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$ și $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$. Acum, luând dreptele AD și BC și secanta BD, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne), de unde obținem că $AD \parallel BC$. Prin aceeași metodă, obținem $AB \parallel CD$, de unde rezultă că $ABCD$ este un paralelogram.



• **Orice patrulater convex în care două dintre laturi sunt paralele și congruente este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $AD \parallel BC$, $AD \equiv BC$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație: Construim diagonala BD și în triunghiurile ABD și CDB avem $BD \equiv BD$ (latură comună), $AD \equiv BC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și secanta BD). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $AB \equiv CD$. De aici și din $AD \equiv BC$, obținem că $ABCD$ este un paralelogram (patrulaterul convex cu laturile opuse congruente este un paralelogram).

Exersează!

2. Stabilește dacă următoarele propoziții sunt adevărate (**A**) sau false (**F**):

a) Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt complementare.

b) Dacă diagonalele au același mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram.

c) În patrulaterul $ABCD$ știm că $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$, deci patrulaterul este paralelogram.

d) Un paralelogram are toate unghiurile ascuțite.

e) Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

f) Laturile opuse ale unui paralelogram sunt paralele, dar nu sunt congruente.

g) Laturile opuse ale unui paralelogram sunt paralele și congruente.

h) Patrulaterul cu o pereche de laturi paralele și congruente este paralelogram.

3. Calculează măsura unghiurilor necunoscute ale paralelogramului $ABCD$, în fiecare caz:

a) $\sphericalangle A = 62°$; b) $\sphericalangle B = 102°$; c) $\sphericalangle C = 110°$; d) $\sphericalangle D = 72°$; e) $\sphericalangle B = 32°$.

4. Desenează paralelogramul $ABCD$, respectând condițiile date:

a) $\sphericalangle A = 100°$, $AB = 5\ cm$, $AD = 4\ cm$; b) $\sphericalangle B = 70°$, $AB = 6\ cm$, $BC = 5\ cm$;
c) $\sphericalangle C = 70°$, $BC = 8\ cm$, $CD = 6\ cm$; d) $\sphericalangle D = 70°$, $AD = 6\ cm$, $AB = 7\ cm$.

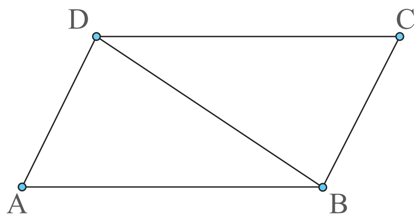


Figura 8

5. Se consideră triunghiul ABC și mediana AM, $M \in BC$, dusă din vârful A. Se prelungește mediana AM cu segmentul MD, astfel încât $AM = MD$. Arată că $ABDC$ este paralelogram.

6. Pe laturile AB și CD ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $AE = \frac{1}{3}AB$ și $CF = \frac{2}{3}CD$. Arată că patrulaterele $AEFD$ și $BEFC$ sunt paralelograme.

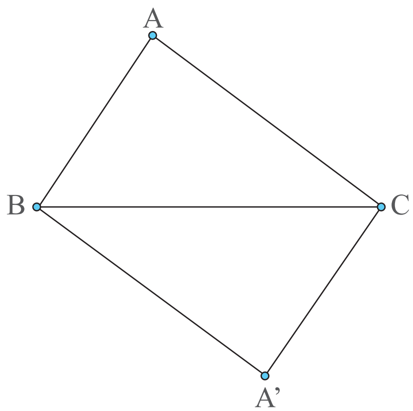


Figura 9

7. În patrulaterul $ABCD$ din *Figura 8* avem $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$. Arată că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram.

8. În *Figura 9*, $\Delta ABC \equiv \Delta A'CB$. Demonstrează că $ABA'C$ este paralelogram.

9. Se consideră $ABCD$ un paralelogram și fie A' simetricul punctului A față de B, B' simetricul punctului B față de C, C' simetricul punctului C față de D și D' simetricul punctului D față de A. Demonstrează că $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

10. În *Figura 10* este reprezentată schematic sigla unei companii. Se cunosc relațiile: $AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD' \equiv EE'$, $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv A'B' \equiv B'C' \equiv C'D' \equiv D'E'$ și $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle C'CB \equiv \sphericalangle C'CD \equiv \sphericalangle E'ED$. Demonstrează că:

a) $ACC'A'$ este paralelogram;
b) $ADD'A'$ este paralelogram;
c) $BEE'B'$ este paralelogram;
d) $ACDB$ este paralelogram;
e) Punctele A, C și E sunt coliniare;
f) $BCE'D'$ este paralelogram.

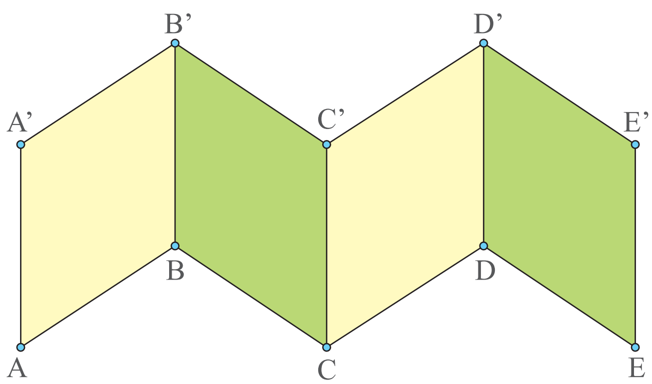


Figura 10

11. În *Figurile 11, 12* și *13* sunt reprezentate trei tipuri distincte de parcări, realizate pe o stradă cu sens unic.

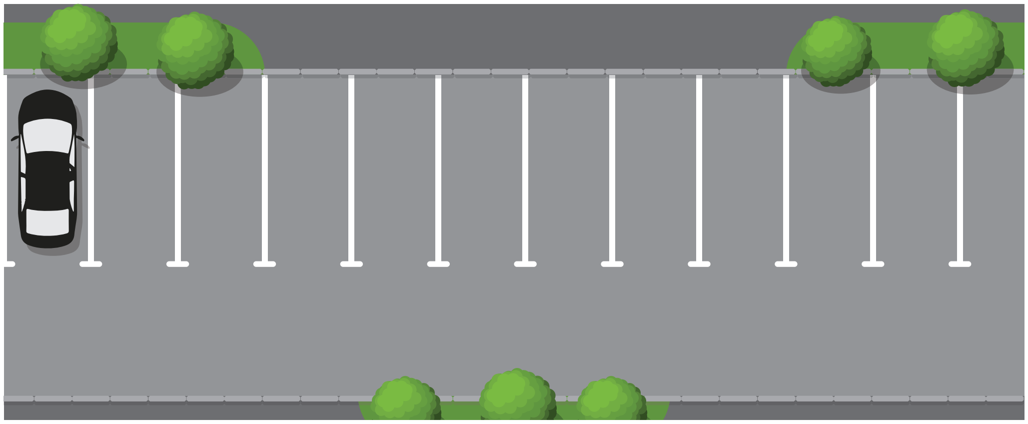


Figura 11

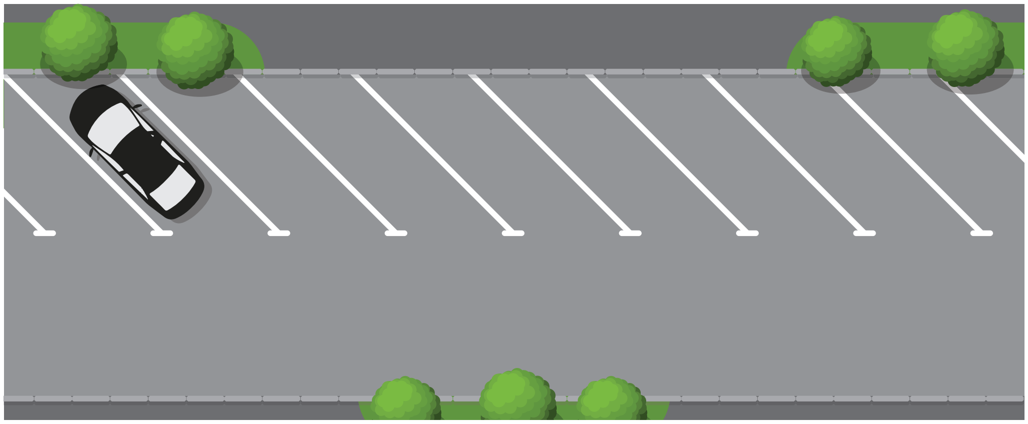


Figura 12

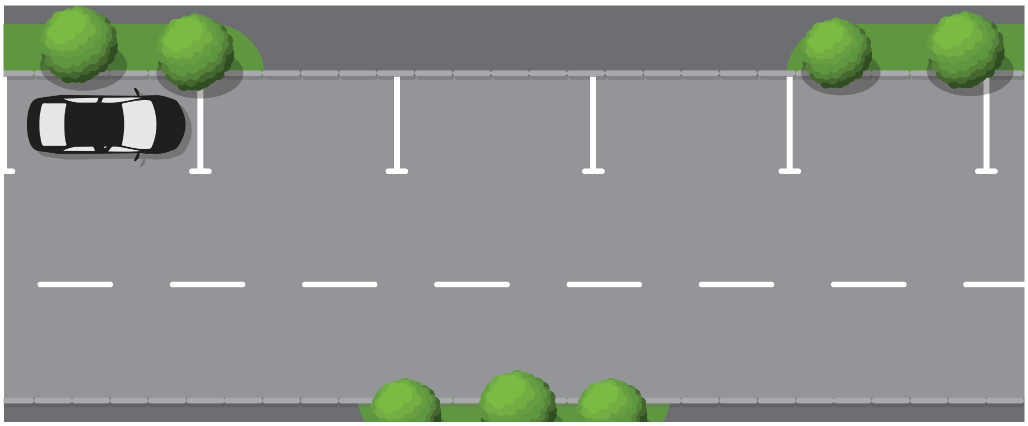


Figura 13

a) Verifică, cu ajutorul unei rigle, că toate locurile de parcare, reprezentate în *Figurile 11, 12* și *13* sunt paralelograme.

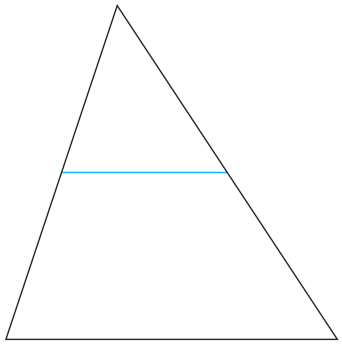
b) Dacă, în fiecare dintre aceste figuri, lățimea drumului ar fi aceeași, stabilește care tip de parcare este mai potrivit în situaţia în care:

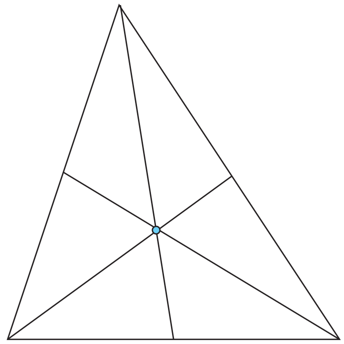
- dorim să avem un număr mai mare de locuri de parcare;
- dorim să avem mai mult spațiu pentru a circula cu mașinile.

Ce observi la *Figura 12*?

Aplicații în geometria triunghiului: linie mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi

Folosind proprietățile paralelogramului, vei afla lucruri interesante despre triunghi.





Observă și descoperă!

1. Victor are de rezolvat următoarea problemă: *Se consideră un triunghi ABC, punctele M și N mijloacele laturilor AB, respectiv AC și punctul P simetricul punctului M față de punctul N (Figura 14).*

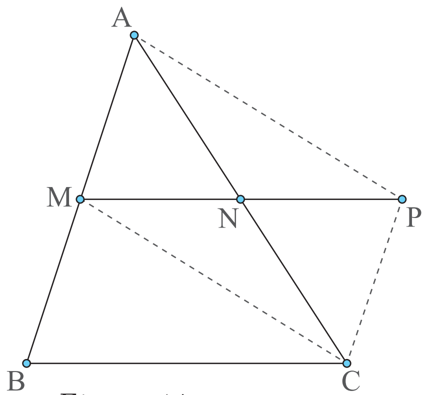


Figura 14

a) Arată că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram;
b) Demonstrează că patrulaterul $MBCP$ este paralelogram;
c) Dedu că $MN \parallel BC$ și că $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Observă cum rezolvă Victor această problemă:

Ipoteza: *ABC - triunghi*
$AM \equiv BM$, $AN \equiv CN$, $MN \equiv NP$

Concluzia:
a) $AMCP$ - paralelogram;
b) $MBCP$ - paralelogram;
c) $MN \parallel BC$ și $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Demonstrație:

a) Din $AN \equiv CN$ și $MN \equiv NP$ (din ipoteză), rezultă $AMCP$ este paralelogram, deoarece diagonalele au același mijloc.

b) Avem $PC \equiv AM$ (din $AMCP$ - paralelogram) și $AM \equiv BM$ (din ipoteză), de unde obținem $PC \equiv BM$. Dar $PC \parallel AM$ (din $AMCP$ - paralelogram), iar cum punctele A, M și B sunt coliniare, obținem $PC \parallel BM$. Prin urmare, $MBCP$ este paralelogram (două dintre laturi sunt paralele și congruente).

c) $MBCP$ - paralelogram $\Rightarrow MP \parallel BC$ și $MP \equiv BC$ (într-un paralelogram, laturile opuse sunt paralele și congruente). Din $MP \parallel BC$ rezultă $MN \parallel BC$, iar din $MP \equiv BC$ și $MN = \dfrac{MP}{2}$ (P este simetricul lui M față de N) rezultă $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Important

• Numim **linie mijlocie în triunghi** segmentul care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului.

• Un triunghi are 3 linii mijlocii. Triunghiul determinat de liniile mijlocii se numește **triunghiul median**.

• **Într-un triunghi, o linie mijlocie este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi. (Proprietatea liniei mijlocii)**

Observă și descoperă!

2. **Problemă rezolvată.** Într-un triunghi ABC, prin M mijlocul laturii AB construim $MN \parallel BC$, $N \in AC$ (*Figura 15*). Demonstrează că punctul N este mijlocul laturii AC.

Rezolvare:

Ipoteză: ABC - triunghi; $AM \equiv BM$; $MN \parallel BC$;

Concluzie: $AN \equiv CN$

Demonstrație: Presupunem că punctul N nu este mijlocul laturii AC și construim punctul P mijlocul laturii AC. Rezultă că MP este linie mijlocie în triunghiul ABC și atunci $MP \parallel BC$. Dar, din ipoteză, $MN \parallel BC$, ceea ce înseamnă că prin punctul M trec două drepte paralele distincte la dreapta BC, ceea ce este imposibil. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, de unde ne rezultă că punctul N este mijlocul laturii AC.

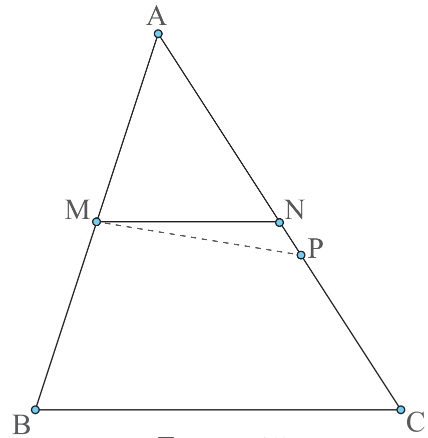


Figura 15

Important

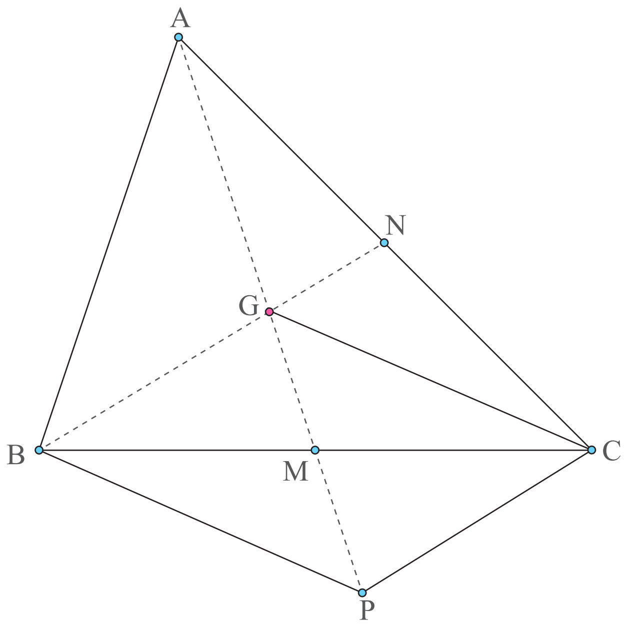
• Problema anterioară ne spune că: **în orice triunghi, paralela prin mijlocul unei laturi la una dintre laturi trece prin mijlocul celeilalte laturi. (Reciproca proprietății liniei mijlocii)**

3. Sara rezolvă următoarea problemă: *Se consideră triunghiul ABC în care medianele AM, $M \in BC$ și BN, $N \in AC$ se intersectează în punctul G. Notăm cu P simetricul punctului G față de punctul M. Arată că:*

a) $BPCG$ este paralelogram;

b) $GN = \dfrac{1}{2}CP$;

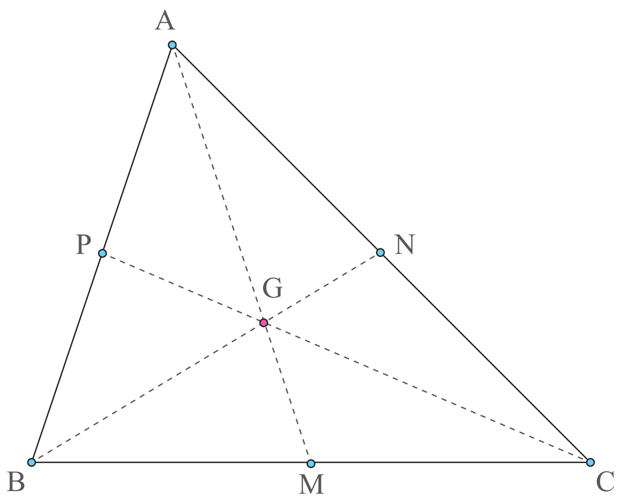
c) $GN = \dfrac{1}{3}BN$ și $GB = \dfrac{2}{3}BN$.



Cum gândește Sara	Cum scrie Sara
Pentru a demonstra că un patrulater este paralelogram am mai multe posibilități. Deoarece în problemă se vorbește despre mediană și simetrie, ar fi bine să mă gândesc la diagonale.	a) Cum $BM \equiv CM$ (AM - mediană) și $GM = MP$ (din ipoteză), atunci $BPCG$ este paralelogram (diagonalele au același mijloc).
Privind figura, sunt tentată să spun că GN este linie mijlocie în triunghiul APC. Dar am argumente? La punctul a) am arătat că $BPCG$ este paralelogram, deci BN și PC sunt paralele. Cum N este mijlocul segmentului AC (BN este mediană), pot afirma că GN este linie mijlocie în triunghiul APC.	b) În triunghiul APC avem $PC \parallel GN$ (din a)) și $AN \equiv NC$ (din ipoteză), de unde obținem că $AG \equiv GP$ și deci GN este linie mijlocie în triunghiul APC. Rezultă că $GN = \frac{1}{2}PC$.
L-am exprimat pe GN cu ajutorul lui PC, dar eu vreau cu ajutorul lui BN. Pe PC îl pot înlocui cu BG deoarece $BPCG$ este paralelogram, iar BG împreună cu GN formează chiar BN.	c) Știm de la punctul a) că $GN = \frac{1}{2}CP$ și că $PC \equiv BG$. Obținem astfel că $GN = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}BG \Rightarrow BG = 2GN$. Cum $BG + GN = BN \Rightarrow 3GN = BN \Rightarrow$ $\Rightarrow GN = \frac{1}{3}BN$. Din $BG = 2GN$ obținem $BG = \frac{2}{3}BN$.

Important

• În orice triunghi, centrul de greutate (intersecția medianelor) se află, pe oricare mediană, la două treimi de vârf și o treime de latură.



$$AG = \frac{2}{3}AM \text{ și } GM = \frac{1}{3}AM$$

$$BG = \frac{2}{3}BN \text{ și } GN = \frac{1}{3}BN$$

$$CG = \frac{2}{3}CP \text{ și } GP = \frac{1}{3}CP$$

Exersează!

4. În triunghiul ABC, se cunosc lungimile laturilor: $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Calculează perimetrul triunghiului AMN, dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC.

5. Se consideră M, N și P mijloacele laturilor DE, DF, respectiv EF, ale triunghiului DEF. Arată că patrulaterul $DMPN$ este paralelogram.

6. În triunghiul ABC, se consideră D, E și F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Calculează perimetrul triunghiului DEF în fiecare caz:

a) $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 12$ cm; b) $AB = 16$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 22$ cm;
c) $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm; d) $AB = 9$ cm, $AC = 11$ cm, $BC = 13$ cm.

7. Se consideră G centrul de greutate al triunghiului ABC și A', B' și C' mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

a) Dacă $GA' = 5$ cm, calculează lungimea segmentelor GA și AA'.
b) Dacă $GB = 6$ cm, calculează lungimea segmentelor GB' și BB'.
c) Dacă $CC' = 9$ cm, calculează lungimea segmentelor GC și GC'.

8. În paralelogramul $ABCD$, se consideră E mijlocul laturii BC și F punctul de intersecție al dreptelor AC și DE.

a) Arată că punctul F este centrul de greutate al triunghiului BCD.
b) Dacă N este intersecția dreptelor BF și DC, iar $AB = 10$ cm, determină lungimea segmentului DN.

9. Arată că mijloacele laturilor unui patrulater convex sunt vârfurile unui paralelogram.

10. Se consideră triunghiurile ABC și ACD, cu B și D aflate de o parte și de alta a dreptei AC. Se consideră M mijlocul segmentului AB, $N \in AC$ astfel încât $MN \parallel BC$ și $P \in AD$ astfel încât $NP \parallel CD$.

Dacă punctele B, C și D sunt coliniare, demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare și că $2MP = BC + CD$.

11. Se consideră $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul lui AD, N mijlocul lui AB, Q mijlocul lui BC și P simetricul punctului Q față de B.

a) Arată că $MPBD$ este paralelogram.
b) Demonstrează că $APBM$ este paralelogram.
c) Arată că punctele M, N și P sunt coliniare.

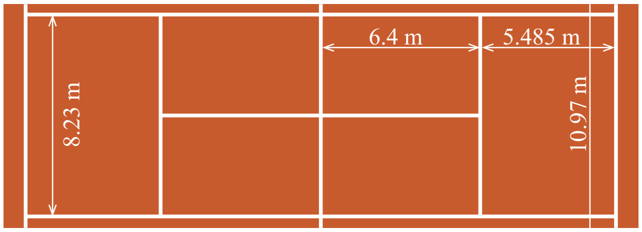
12. În triunghiul ABC, se consideră medianele AM, BN și CP și G centrul de greutate al triunghiului. Se consideră $AM \cap PN = \{Q\}$, $BN \cap MP = \{R\}$ și $CP \cap MN = \{S\}$. Demonstrează că:

a) $\Delta APN \equiv \Delta PBM \equiv \Delta NMC \equiv \Delta MNP$;
b) patrulaterul $APMN$ este paralelogram;
c) punctul S este mijlocul segmentului MN;
d) punctul G este centrul de greutate al triunghiului MNP.

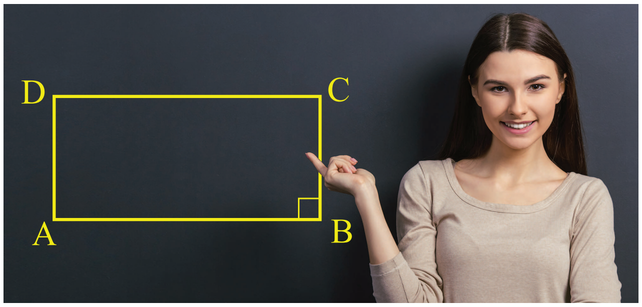
Este adevărată propoziția următoare: *Punctul G este centrul de greutate al triunghiului QRS*?

13. În triunghiul ABC, AM, $M \in BC$, și BN, $N \in AC$, sunt mediane. Se consideră A' simetricul punctului A față de punctul M și B' simetricul lui B față de punctul N. Demonstrează că punctele A', C și B' sunt coliniare.

Paralelograme particulare: dreptunghi; proprietăți



Terenul de tenis, terenul de handbal, terenul de fotbal, toate au formă de dreptunghi. Proprietățile dreptunghiului te vor ajuta să verifici cât de corect au fost trasate.



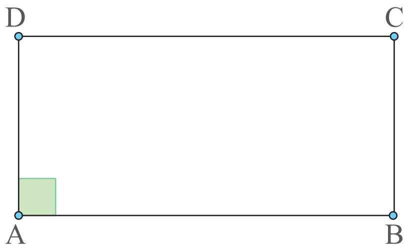
Imaginea 1 - Dreptunghi desenat pe tablă

Observă și descoperă!

1. Sara a desenat pe tablă un paralelogram care are un unghi drept (de 90°), ca în *Imaginea 1*. Care sunt măsurile celorlalte trei unghiuri? Justifică răspunsurile date.

Important

• Numim **dreptunghi** paralelogramul cu un unghi drept.

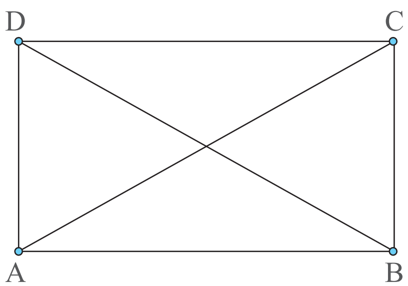


Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle DAB = 90°$.

Dacă $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle DAB = 90°$, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

• Un dreptunghi are toate unghiurile drepte.

• Dreptunghiul, fiind un paralelogram, are toate proprietățile acestuia:
- ▶ laturile opuse sunt paralele și congruente;
- ▶ diagonalele au același mijloc.



• În orice dreptunghi diagonalele sunt congruente.

Ipoteză: $ABCD$ - dreptunghi

Concluzie: $AC \equiv BD$

Demonstrație: Triunghiurile ABC și ABD sunt dreptunghice ($\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD = 90°$), $AB \equiv AB$ (latură comună) și $BC \equiv AD$ (laturi opuse).

Rezultă, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice CC, că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, de unde $AC \equiv BD$.

• Orice paralelogram care are diagonalele congruente este dreptunghi.

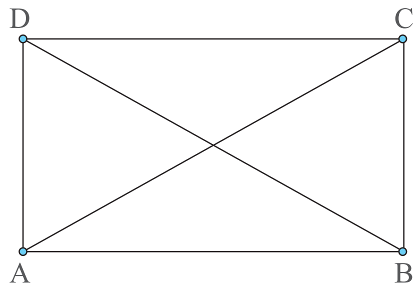
Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram, $AC \equiv BD$

Concluzie: $ABCD$ - dreptunghi

Demonstrație: Trebuie arătat că paralelogramul $ABCD$ are un unghi drept. În triunghiurile ABC și ABD avem $AB \equiv AB$ (latură comună), $AC \equiv BD$ (din ipoteză) și $BC \equiv AD$ (laturi opuse).

Rezultă, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, de unde $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$. Dar $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$ și atunci $\sphericalangle ABC = 90°$.

În concluzie, $ABCD$ este dreptunghi.



Exersează!

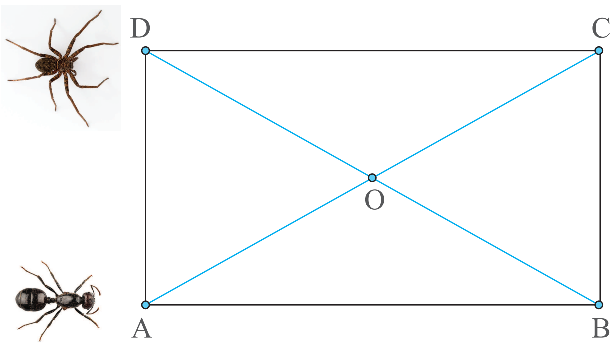


Figura 16

2. O furnică și un păianjen se deplasează pe laturile și pe diagonalele unui dreptunghi (*Figura 16*) și apoi se întorc în punctele de plecare. Furnica se deplasează pe traseul $A - B - C - A$, iar păianjenul pe traseul $D - C - B - D$. Care dintre insecte a parcurs o distanță mai mare?

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Arată că, dacă $AO \equiv DO$, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

4. Se consideră ABC un triunghi dreptunghic în vârful A. Se consideră M simetricul punctului A față de mijlocul ipotenuzei. Arată că patrulaterul $ABMC$ este dreptunghi.

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Unghiul DAC are măsura egală cu 30° și unghiul DOA are măsura egală cu 120°.

a) Determină măsura unghiului ADO. b) Arată că $ABCD$ este dreptunghi.

Indicație: Amintește-ți cât este suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.

6. Dreptunghiul $ABCD$ are proprietatea că lungimea diagonalei AC este de două ori mai mare decât a laturii AD. a) Determină măsura unghiului ABD. b) Demonstrează că triunghiul AOD este echilateral, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

7. În *Figura 17*, $ABCD$ este dreptunghi și ABE este un triunghi echilateral.

a) Determină măsura unghiului DAE.

b) Arată că triunghiul DEC este isoscel.

c) Arată că triunghiurile DBE și CAE sunt congruente.

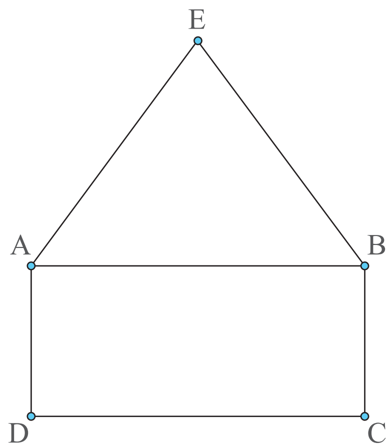


Figura 17

8. În triunghiul ABC ascuțitunghic, construiește $AD \perp BC$, cu $D \in BC$. Consideră apoi punctele M și N mijloacele laturilor AB și AC. Dacă E este simetricul punctului D față de M, iar F este simetricul punctului D față de N, demonstrează că:

a) $ADBE$ este dreptunghi;

b) $ADCF$ este dreptunghi;

c) punctele F, A și E sunt coliniare;

d) $\Delta DFE \equiv \Delta ACB$.

9. Se consideră A, B, C și D patru puncte pe un cerc astfel încât AC și BD sunt diametre. Demonstrează că $ABCD$ este un dreptunghi.

10. Ecaterina are o cameră foto, precum cea din *Imaginea 2*, și dorește să învețe mai multe despre cum funcționează procesul de zoom in/ zoom out. După ce se documentează, ea se gândește la următorul procedeu: plecând de la o imagine dreptunghiulară $ABCD$, unde obiectul O ce trebuie fotografiat este la intersecția diagonalelor AC și BD, construiește imaginea $MNPQ$, unde M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AO, BO, CO, respectiv DO. Ea nu este însă sigură dacă noua imagine are tot o formă dreptunghiulară și are nevoie de ajutorul tău. Demonstrează, așadar, că $MNPQ$ este tot un dreptunghi.

Imaginea 2

11. În *Figura 18* sunt reprezentate două vagoane de metrou privite de deasupra lor, vagonul 1 ($ABEF$) și vagonul 2 ($B'CDE$), conectate printr-o platformă elastică. Ambele vagoane au formă de dreptunghi. Atunci când metroul circulă în linie dreaptă, punctele B și B' coincid, precum în *Figura 19*. Ioana (I) se află în primul vagon, în capătul din stânga, la mijlocul laturii AF. Răzvan (R) se află în cel de-al doilea vagon, în capătul din dreapta, la mijlocul laturii CD.

a) În cazul în care vagonul se mișcă în linie dreaptă, demonstrează că distanța dintre Ioana și Răzvan este egală cu lungimea totală a celor două vagoane.

b) În *Figura 18* este reprezentat schematic cum arată cele două vagoane atunci când metroul virează. În această situație, Ioana și Răzvan de-abia se mai văd, amândoi uitându-se în direcția punctului E. Mai este acum distanța dintre cei doi egală cu lungimea totală a celor două vagoane? Justifică răspunsul dat.

c) Dacă în a doua situație, Ioana a observat că măsura unghiului IEF este de $15°$, demonstrează că măsura unghiului DER este tot de $15°$ și calculează măsura unghiului BEB'.

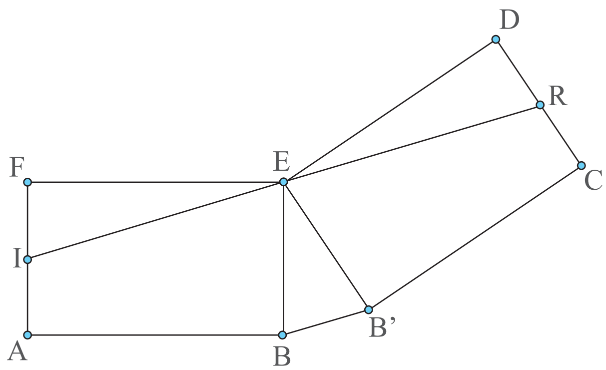


Figura 18

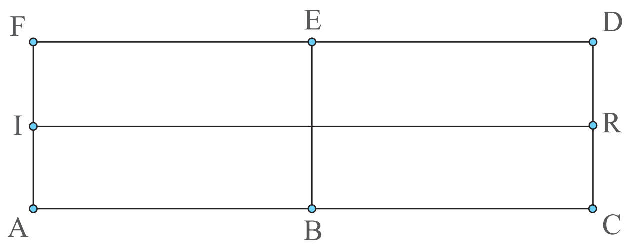
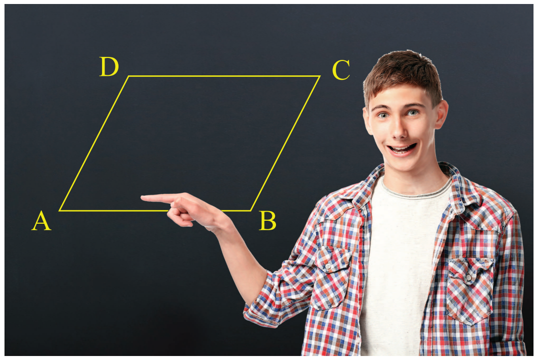


Figura 19

Paralelograme particulare: romb; proprietăți



Imaginea 3 – Paralelogram desenat pe tablă

Observă și descoperă!

1. Victor desenează un paralelogram cu două laturi alăturate congruente. Ce poți spune despre celelalte două laturi? Justifică răspunsul dat.

Important

• Numim **romb** paralelogramul cu două laturi alăturate congruente.

Dacă $ABCD$ este romb, atunci $ABCD$ este paralelogram și $AB \equiv AD$.

Dacă $ABCD$ este paralelogram și $AB \equiv AD$, atunci $ABCD$ este romb.

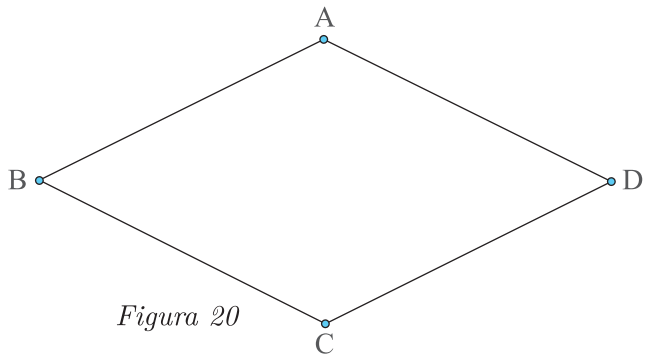


Figura 20

• Un romb are toate laturile congruente.

• Rombul fiind un paralelogram are toate proprietățile acestuia:
- ▷ Unghiurile opuse sunt congruente.
- ▷ Unghiurile alăturate sunt suplementare.
- ▷ Diagonalele au același mijloc.

• În orice romb **diagonalele sunt perpendiculare**.

• În orice romb **diagonalele sunt bisectoare** pentru unghiurile acestuia.

Ipoteză: $ABCD$ – romb.

Concluzie: $AC \perp BD$, AC – bisectoare pentru unghiurile BAD și BCD, BD – bisectoare pentru unghiurile ABC și ADC.

Demonstrație:

În triunghiul ABD, avem $AB \equiv AD$ (laturi ale rombului). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel. Cum O este mijlocul diagonalei DB, deducem că AO este mediană în triunghiul ABD. Cum triunghiul ABD este isoscel și AO este mediană rezultă că AO este înălțime, deci $AC \perp BD$, dar și bisectoare a unghiului BAD.

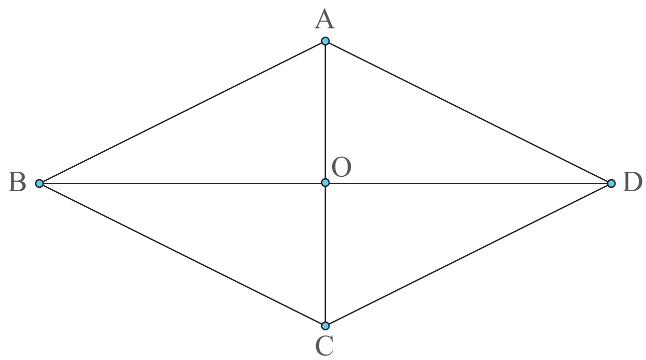
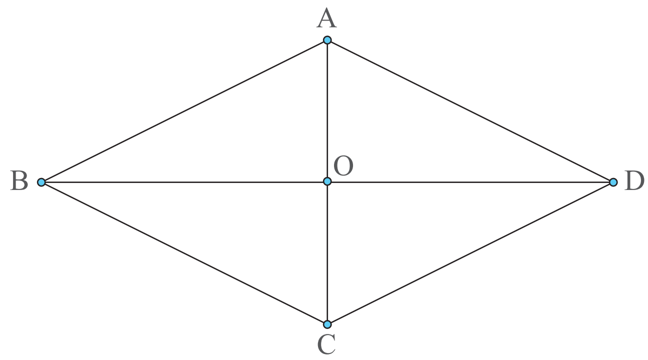


Figura 21

În același mod se arată că CO este bisectoare a unghiului BCD și BD este bisectoare pentru unghiurile ABC și ADC.

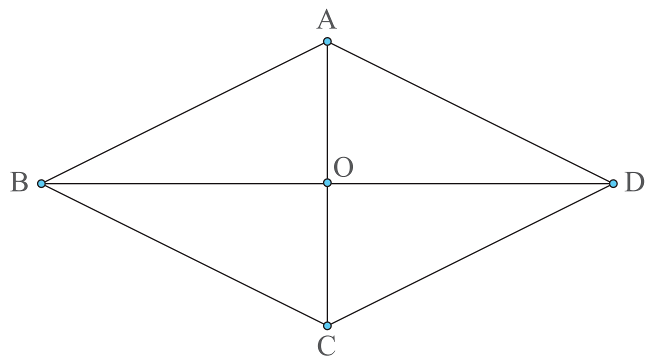
• Orice paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram; $AC \perp BD$
Concluzie: $ABCD$ – romb
Demonstrație: În triunghiul ABD, AO este înălțime (din $AC \perp BD$) și mediană (diagonalele paralelogramului au același mijloc). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel cu $AB \equiv AD$. De aici și din $ABCD$ paralelogram deducem că $ABCD$ este romb.



• Orice paralelogram în care o diagonală este bisectoare pentru unul dintre unghiurile acestuia este romb.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram; AC – bisectoarea unghiului BAD
Concluzie: $ABCD$ – romb
Demonstrație: În triunghiul ABD, AO este bisectoare (din ipoteză) și mediană (diagonalele paralelogramului au același mijloc). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel cu $AB \equiv AD$. De aici și din $ABCD$ paralelogram, deducem că $ABCD$ este romb.



Exersează!

2. Se consideră rombul $ABCD$. Determină măsurile unghiurilor rombului dacă:
a) $\sphericalangle CAB = 20°$; b) $\sphericalangle BDC = 35°$;
c) $\sphericalangle ADB = 50°$; d) $\sphericalangle ACB = 40°$.

Indiciu:
$ABCD$ - romb $\Rightarrow \sphericalangle BAD = 2 \cdot \sphericalangle CAB$
(Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor).

3. a) Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle ABD = 25°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.
b) Se consideră rombul $MNPQ$ cu $\sphericalangle MNQ = 40°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.
c) Se consideră rombul $PRST$ cu $\sphericalangle PST = 55°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.

4. Arată că, dacă paralelogramul $ABCD$ are $\sphericalangle ABD = 20°$ şi $\sphericalangle CAB = 70°$, atunci $ABCD$ este romb.

5. Arată că, dacă paralelogramul $MNPQ$ are $\sphericalangle MPN = 50°$ şi $\sphericalangle QNP = 40°$, atunci $MNPQ$ este romb.

6. Determină măsurile unghiurilor rombului $ABCD$, dacă $BD = AB$.

7. Determină măsurile unghiurilor rombului $ABCD$, dacă $BC = 2CO$ unde O este punctul de intersecție a diagonalelor.

8. Pe prelungirea diagonalei BD a rombului $ABCD$ cu $\sphericalangle A < 60°$ se consideră punctul T astfel încât $AT = AC$. Arată că triunghiul ATC este echilateral.

9. Se consideră $ABCD$ un romb și $AC \cap BD = \{O\}$.
Arată că $\triangle AOB \equiv \triangle COB \equiv \triangle AOD \equiv \triangle COD$.

10. Se consideră $\triangle XYZ$ un triunghi isoscel cu $XY = XZ$ și punctele M, mijlocul laturii XY, N mijlocul laturii YZ și P mijlocul laturii XZ. Arată că patrulaterul $XMNP$ este romb.

11. În triunghiul ascuțitunghic ABC, construiește înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. se consideră A' simetricul lui A față de D, B' simetricul lui B față de D și C' simetricul lui C față de D. Demonstrează că $ABA'B'$ și $AC'A'C$ sunt romburi.

12. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi și punctele M, N, P și Q mijloacele laturilor dreptunghiului. Demonstrează că $MNPQ$ este romb.

13. Se consideră $ABCD$ un romb și punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor rombului. Demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi.

14. Se consideră $ABCD$ un romb și $AC \cap BD = O$. Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor AO, BO, CO, respectiv DO, demonstrează că $MNPQ$ este romb.

15. Se consideră $ABCD$ un romb cu $\sphericalangle ABC = 120°$. Se consideră BE bisectoarea $\sphericalangle ABD$, cu $E \in AD$, și DF bisectoarea unghiului BDC, cu $F \in BC$.
a) Demonstrează că $BEDF$ este dreptunghi.
b) Dacă $BE \cap AC = \{G\}$ și $DF \cap AC = \{H\}$, arată că $BGDH$ este romb.

16. În *Figura 22*, $ABCG$, $CDEG$ și $AGEF$ sunt romburi, unde $\sphericalangle AGE = 120°$ și $\sphericalangle GAB = 60°$.
a) Arată că $\triangle ACE$ este echilateral.
b) Demonstrează că G este centrul de greutate al triunghiului ACE.
c) Arată că G este centrul de greutate al triunghiului BDF.

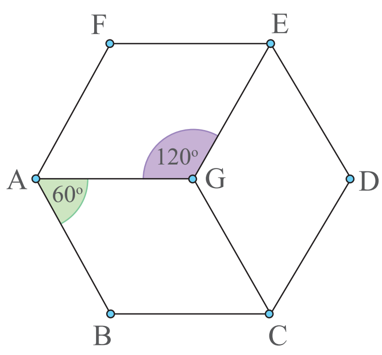


Figura 22

Paralelograme particulare: pătrat; proprietăți

Gresia folosită pentru pardoseli, faianța de pe perete au, în cele mai multe cazuri, forma unui pătrat.

Observă și descoperă!

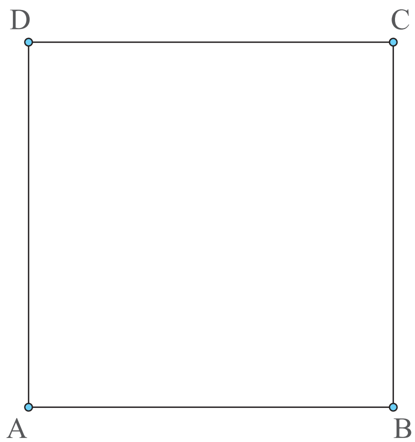
1. *Sara către Victor:* Crezi că există un patrulater convex pe care să îl pot numi și dreptunghi și romb?

Victor: Desigur!

a) Ce poți spune despre laturile unui asemenea patrulater?

b) Cum sunt unghiurile unui astfel de patrulater?

c) Desenează acest patrulater.



Important

• Numim **pătrat** patrulaterul convex care este și romb și dreptunghi.

Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $ABCD$ este romb și $ABCD$ este dreptunghi.

Dacă $ABCD$ este romb și $ABCD$ este dreptunghi, atunci $ABCD$ este pătrat.

• Fiind și romb și dreptunghi, un pătrat are toate proprietățile celor două figuri geometrice:

▷ Toate laturile sunt congruente.

▷ Toate unghiurile sunt drepte.

▷ Diagonalele au același mijloc.

▷ Diagonalele sunt congruente.

▷ Diagonalele sunt perpendiculare.

▷ Diagonalele sunt bisectoare pentru unghiurile pătratului.

Exersează!

2. Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, ca în *Figura 23*. Demonstrați că $MP \equiv NQ$ și $MP \perp NQ$.

Ipoteză: $ABCD$ – pătrat, $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$

Concluzie: $MP \equiv NQ$, $MP \perp NQ$

Demonstrație: Dacă demonstrăm că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat, atunci ambele concluzii sunt adevărate, deoarece MP și NQ sunt diagonalele acestui patrulater.

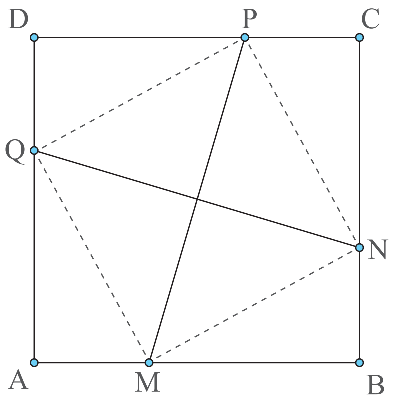


Figura 23

Din $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ și $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, rezultă $MB \equiv NC \equiv PD \equiv QA$ (diferență de segmente congruente). Acum, în triunghiurile dreptunghice AMQ, BNM, CPN și DQP avem $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$ (din ipoteză) și $MB \equiv NC \equiv PD \equiv QA$ (din demonstrație). Deducem, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice CC, că $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM \equiv \triangle CPN \equiv \triangle DQP$, de unde $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$ și atunci patrulaterul $MNPQ$ este romb (are toate laturile congruente).

Pe de altă parte, avem $\sphericalangle AMQ + \sphericalangle QMN + \sphericalangle NMB = 180°$. Cum $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM$, implică $\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle BNM$ și atunci $\sphericalangle BNM + \sphericalangle QMN + \sphericalangle NMB = 180°$. Dar $\sphericalangle BNM + \sphericalangle NMB = 90°$ (din triunghiul dreptunghic BMN) și atunci $\sphericalangle QMN = 90°$. Prin urmare, $MNPQ$ devine dreptunghi (este paralelogram și are un unghi drept). Fiind și romb și dreptunghi, rezultă că $MNPQ$ este pătrat. Atunci $MP \equiv NQ$ (diagonalele sunt congruente) și $MP \perp NQ$ (diagonalele sunt perpendiculare).

3. Stabileşte dacă propoziţiile date sunt adevărate (**A**) sau false (**F**):

a) Într-un pătrat diagonalele sunt perpendiculare;

b) Un romb cu diagonalele egale este pătrat;

c) Diagonalele pătratului au același mijloc;

d) Măsura unghiului format de o latură a pătratului cu o diagonală este egală cu 90°.

4. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi în care $\sphericalangle CAB = 45°$. Arată că $ABCD$ este pătrat.

5. Se consideră pătratul $ABCD$, O este punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului şi punctele M şi N mijloacele laturilor AD, respectiv AB. Arată că patrulaterul $ANOM$ este pătrat.

6. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele P şi Q mijloacele laturilor AD, respectiv DC. Care este măsura unghiului format de dreptele PQ şi DB?

7. Se consideră pătratul $ABCD$, O punctul de intersecţie a diagonalelor şi M mijlocul laturii AB. Care este măsura unghiului COM?

8. În *Figura 24*, $ABCD$ este pătrat şi punctul E este situat în interiorul pătratului astfel încât triunghiul ABE este echilateral.

a) Arată că triunghiului ADE este isoscel.

b) Care este măsura unghiului ADE ?

c) Care este măsura unghiului DEC?

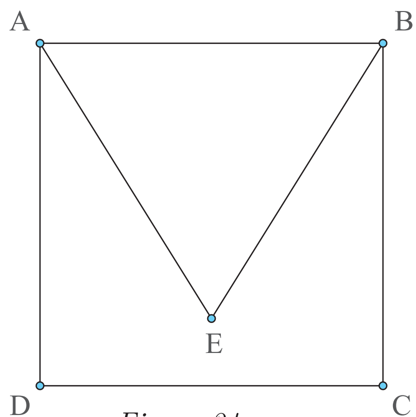


Figura 24

9. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Arată că dreptele DN şi CM sunt perpendiculare.

10. Se consideră A, B, C și D patru puncte pe un cerc astfel încât AC și BD sunt diametre perpendiculare. Demonstrează că $ABCD$ este pătrat.

11. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex cu următoarele proprietăți: $AB \parallel CD$, AC este bisectoarea unghiului BAD, $AD \perp AB$ și $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$. Demonstrează că $ABCD$ este pătrat.

12. Se consideră $\triangle ABC$ dreptunghic în A. Punctul M este mijlocul laturii BC și $MN \perp AB$, cu $N \in AB$ și $MP \perp AC$, cu $P \in AC$.
a) Dacă $AB = AC$, demonstrează că $ANMP$ este pătrat.
b) Dacă $ANMP$ este pătrat, demonstrează că $AB = AC$.

13. Se consideră un pătrat $ABCD$, punctul M pe latura AB și punctul N pe latura BC astfel încât $BM = BN$. Demonstrează că $\triangle DMN$ este isoscel și că $MN \parallel AC$.

14. Se consideră $\triangle ABE$ un triunghi dreptunghic isoscel, cu $AB = AE$. Dacă $BCDE$ este un pătrat, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A, iar $\{F\} = BD \cap CE$, demonstrează că $ABFE$ este pătrat.

15. Se consideră $\triangle ABE$ un triunghi echilateral. Dacă $BCDE$ este un pătrat, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A, atunci:
a) Calculează măsura $\sphericalangle ACB$;
b) Demonstrează că $\triangle ACD$ este isoscel;
c) Dacă $\{F\} = CE \cap AD$, arată că $AF = FC$.

16. În *Figura 25* sunt reprezentate romburile $ABCD$, $ABEF$ și $BCGE$ astfel încât $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BAD = 45°$. Demonstrează că:
a) $BCGE$ este pătrat;
b) punctele A, B, G sunt coliniare;
c) $DCEF$ este dreptunghi.

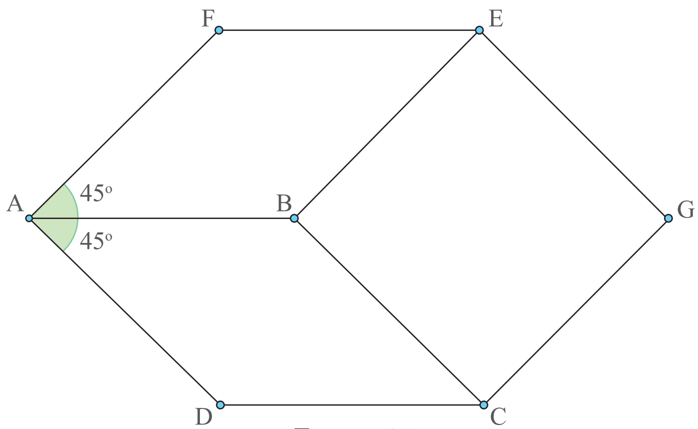


Figura 25

Trapezul, clasificare, proprietăţi. Linia mijlocie în trapez. Trapezul isoscel; proprietăţi

La circ, acrobații folosesc în exercițiile lor un aparat numit trapez.

Descoperă!

1. Desenează un patrulater convex în care două laturi sunt paralele și celelalte două sunt neparalele.

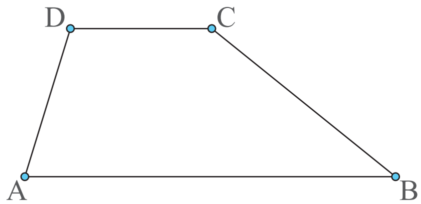
a) Dacă laturile paralele ar fi congruente, cum sunt celelalte două laturi? Justifică răspunsul dat.

b) Pot fi laturile neparalele congruente? Desenează un astfel de patrulater.

c) Poate avea un astfel de patrulater un unghi drept? Care este numărul maxim de unghiuri drepte într-un astfel de patrulater?

Important

• Numim **trapez** patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.



Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$.
Dacă $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$, atunci $ABCD$ este trapez.

• Laturile paralele ale unui trapez se numesc **baze** și anume baza mare și baza mică deoarece ele nu au aceeași lungime.

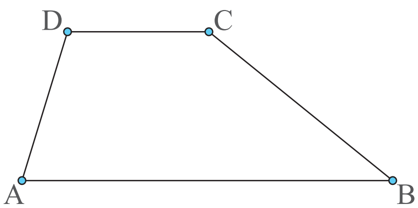
Exemplu: În figura de mai sus AB este baza mare și CD este baza mică.

• Trapezul poate fi:

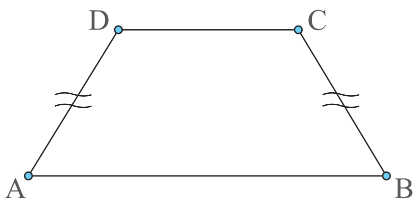
▷ **Trapez oarecare.** Laturile neparalele au lungimi diferite.

▷ **Trapez isoscel.** Laturile neparalele sunt congruente.

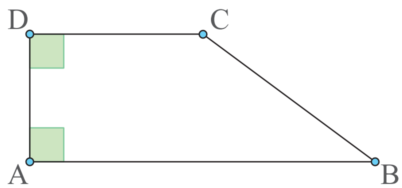
▷ **Trapez dreptunghic.** Una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe cele două baze.



Trapez oarecare
$AD \neq BC$



Trapez isoscel
$AD \equiv BC$



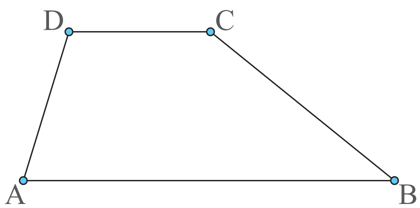
Trapez dreptunghic
$AD \perp AB$ și $AD \perp CD$

• În orice trapez unghiurile alăturate fiecăreia dintre laturile neparalele sunt suplementare.

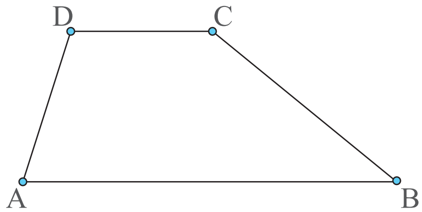
Ipoteză: $ABCD$ trapez, cu $AB \parallel CD$

Concluzie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$; $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$

Demonstrație: $AB \parallel CD$ (din ipoteză) și AD secantă implică $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei). Analog se demonstrază că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ (folosim secanta BC).



• Dacă într-un patrulater convex unghiurile alăturate unei laturi sunt suplementare, atunci patrulaterul este trapez.



Ipoteză: $ABCD$ – patrulater convex; $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$
Concluzie: $ABCD$ – trapez
Demonstrație: Pentru dreptele AB și CD și secanta AD unghiurile DAB și ADC sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Cum $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (din ipoteză) rezultă $AB \parallel CD$, adică $ABCD$ este trapez.

Observă și descoperă!

2. Sara are de rezolvat următoarea problemă: *Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, punctul M mijlocul laturii AD, punctul N mijlocul laturii BC și punctul O mijlocul diagonalei BD, ca în Figura 26.*

a) Demonstrează că punctele M, O, N sunt coliniare

b) Arată că $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

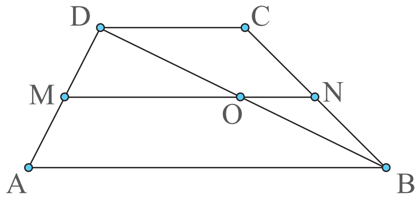


Figura 26

Ajut-o pe Sara să rezolve problema, oferind răspunsurile la următoarele întrebări:

a) Ce reprezintă MO pentru triunghiul ABD?

b) Poți afirma că $MO \parallel AB$ și $MO = \dfrac{AB}{2}$? Justifică!

c) Poți afirma că $NO \parallel CD$ și $NO = \dfrac{CD}{2}$? Justifică!

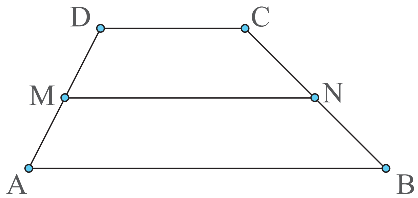
d) Poți afirma că $NO \parallel AB$? Justifică!

e) Poți construi, prin punctul O, două drepte diferite, paralele cu aceeași dreaptă ? Ce concluzie obții?

f) Scrie segmentul MN ca sumă de două segmente.

Important

• Numim **linie mijlocie** în trapez segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele.



• Linia mijlocie în trapez este paralelă cu bazele trapezului și este egală cu jumătate din suma bazelor trapezului.

MN linie mijlocie în trapez, atunci $MN \parallel AB \parallel CD$ și $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Observă și descoperă!

3. Problemă rezolvată. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD \equiv BC$.

a) Arătați că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ și $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.

b) Demonstrați că $AC \equiv BD$.

Ipoteză: $ABCD$ – trapez; $AB \parallel CD$; $AD \equiv BC$

Concluzie: a) $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$; $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$

b) $AC \equiv BD$

Demonstrație:

a) (folosim *Figura 27*) Construim $CE \parallel AD$, $E \in AB$. Din $CE \parallel AD$ și $AB \parallel CD$, rezultă $AECD$ este paralelogram și, deci, $CE \equiv AD$. Cum $AD \equiv BC$ (din ipoteză), rezultă $CE \equiv BC$, adică triunghiul CEB este isoscel, de unde $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle CBE$. Dar $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle DAB$ (sunt unghiuri corespondente pentru dreptele paralele AD și CE și secanta AB). În concluzie, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$.

Acum, $\sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB = 180°$ și $\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBA = 180°$. Cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, rezultă $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.

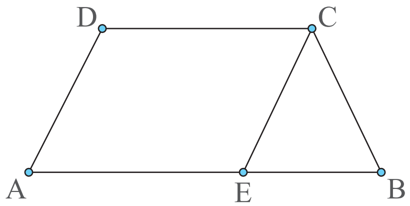


Figura 27

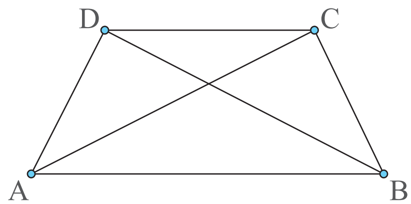


Figura 28

b) În triunghiurile ADB și BCA (*Figura 28*) avem $AB \equiv AB$ (latură comună); $AD \equiv BC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ (din demonstrația anterioară). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, de unde $AC \equiv BD$.

Important

• În orice trapez isoscel unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente.

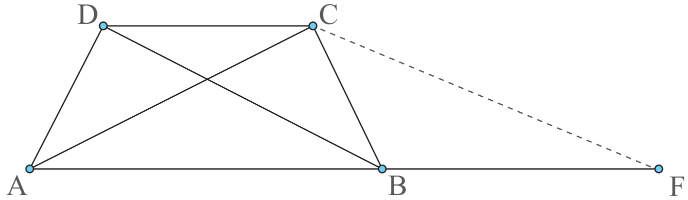
• În orice trapez isoscel diagonalele sunt congruente.

• Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Justificare (folosim *Figura 27*): Construim $CE \parallel AD$, $E \in AB$. Atunci $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle DAB$ (sunt unghiuri corespondente pentru dreptele paralele AD și CE și secanta AB). Cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ (din ipoteză) rezultă $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle CBE$, adică triunghiul CEB este isoscel, de unde $CE \equiv BC$. Dar $CE \equiv AD$ ($AECD$ este paralelogram) și atunci $AD \equiv BC$, adică trapezul este isoscel.

• Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Justificare: Construim $CF \parallel DB$, $F \in AB$. De aici și din $CD \parallel AB$ rezultă că $DBFC$ este paralelogram și deci $CF \equiv DB$. Cum $DB \equiv AC$ (din ipoteză) rezultă $CF \equiv AC$, adică triunghiul ACF este isoscel. Prin urmare $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle CFA$. Dar $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CFA$ (unghiuri corespondente pentru dreptele paralele BD și CF și secanta AF). Rezultă $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$. Acum, $\triangle ADB \equiv \triangle BCA$ deoarece AB este latură comună; $DB \equiv AC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$ (din demonstrație). Rezultă $AD \equiv BC$, adică trapezul este isoscel.



Exersează!

4. Pentru fiecare trapez (*Figurile 29 – 32*), scrie bazele şi determină măsurile unghiurilor necunoscute:

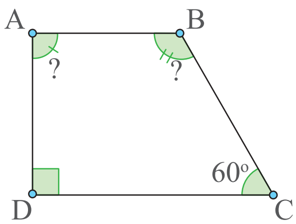


Figura 29

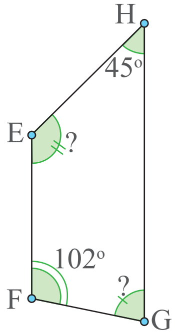


Figura 30

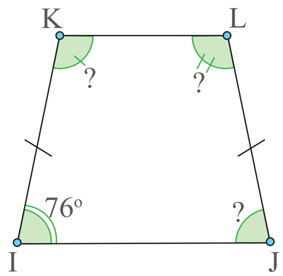


Figura 31

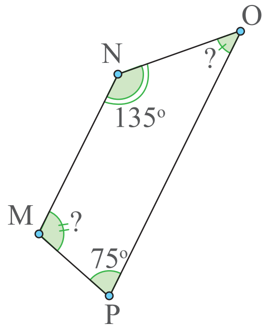


Figura 32

5. Alege varianta corectă dintre cele 4 variante date și realizează desenul corespunzător acesteia:

I. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ este isoscel și:

a) $AB = CD$ b) $AD > BC$ c) $AB = AD$ d) $AB = BD = BC$

II. Trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$ este dreptunghic și:

a) $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90°$ b) $\sphericalangle M = \sphericalangle P = 90°$ c) $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90°$ d) $\sphericalangle Q = \sphericalangle M = 90°$

III. În trapezul oarecare $PRST$ cu baza mare ST are loc relaţia:

a) $ST \parallel SR$ b) $PT \parallel RS$ c) $PR \parallel ST$ d) $PS \parallel RT$

IV. Trapezul $ABCD$ cu $\sphericalangle B = 65°$ $AB \parallel CD$ şi $AD \neq BC$ are:

a) $\sphericalangle A = 115°$ b) $\sphericalangle C = 115°$ c) $\sphericalangle C = 65°$ d) $\sphericalangle D = 115°$

6. În triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$ se consideră punctele M, N şi P mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Arată că patrulaterul $MNPD$ este trapez isoscel, unde D este piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.

7. Determină unghiurile necunoscute ale trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, dacă:

a) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 65°$;

b) $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle D = 110°$;

c) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle C = 62°$.

8. Determină unghiurile necunoscute ale trapezului $ABCD$, cu $AD = BC$, în fiecare caz:
a) $\sphericalangle A = 105°$; b) $\sphericalangle B = 40°$; c) $\sphericalangle C = 70°$; d) $\sphericalangle D = 68°$.

9. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$.
a) Arată că triunghiurile CABşi DBA sunt congruente.
b) Demonstrează că triunghiul OAB este isoscel.

10. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Se consideră E şi F, picioarele înălțimilor din D, respectiv C pe latura AB. Arată că $AE \equiv BF$.

11. Se consideră $\triangle ABC$ un triunghi isoscel. Pe laturile AB și AC ale triunghiului considerăm punctele M și N, astfel încât $MN \parallel BC$. Demonstrează că $BCNM$ este un trapez isoscel și arată că $BN = CM$.

12. Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Dacă punctul V este intersecția dreptelor AD și BC, demonstrează că triunghiurile VAB și VCD sunt isoscele.

13. Se consideră $MNPQ$ un trapez isoscel, cu $MN \parallel PQ$ și $MN > PQ$. Dacă punctul T este intersecția diagonalelor, arată că triunghiurile TMN și TPQ sunt isoscele.

14. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, considerăm M mijlocul laturii BC, după care construim $MN \perp AB$, $N \in AB$, și $MP \perp AC$, $P \in AC$. Demonstrează că $NBCP$ este trapez și arată, apoi, că, dacă acesta este un trapez isoscel, atunci triunghiul ABC este isoscel.

15. În *Figura 33*, $ABCD$ este un trapez dreptunghic în care $AC \perp BC$ și $\sphericalangle ABC = 45°$. Știind că $CE \perp AB$, cu $E \in AB$:

a) Arată că $AECD$ este pătrat.
b) Demonstrează că $EBCD$ este paralelogram.

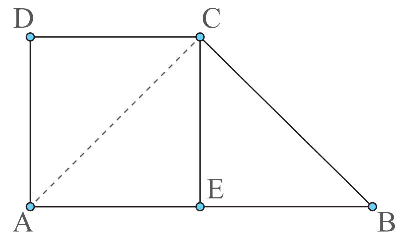


Figura 33

16. David trebuie să realizeze o ramă din lemn de forma unui pătrat $ABCD$, ca în *Figura 34*. El construiește mai întâi patru trapeze isoscele: $ABNM$, $BCPN$, $CDQP$ și $DAMQ$ în care unghiurile ascuțite au $45°$ fiecare și AB, BC, CD, respectiv DA sunt baze mari. Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Din păcate, David observă că dacă ar folosi ramele anterioare, ar acoperi anumite părți importante ale tabloului și decide să micșoreze ramele, construind punctele W, X, Y și Z drept mijloacele segmentelor AM, BN, CP și DQ și efectuând patru tăieturi, de-a lungul segmentelor WX, XY, YZ și WZ. Demonstrează că și noua figură rămasă (patrulaterul $WXYZ$) este tot un pătrat.

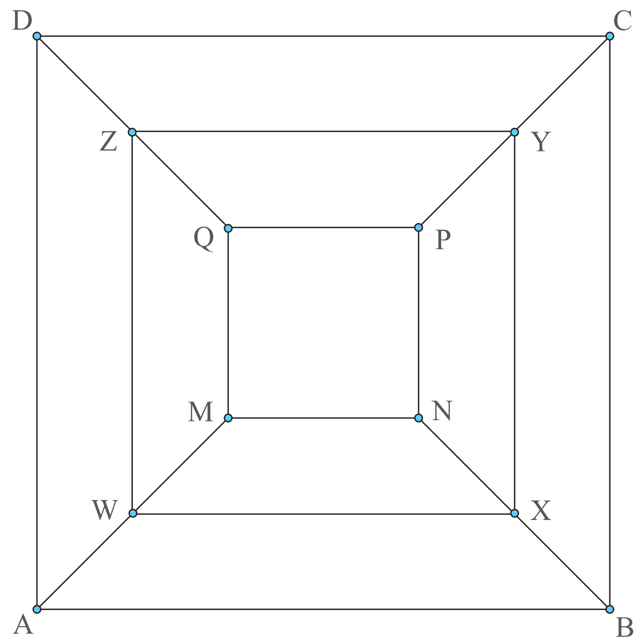


Figura 34

Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez

Dacă dorim să montăm faianță în bucătărie, avem de calculat arii.

Dacă dorim să construim un gard, avem de calculat un perimetru.

Observă și descoperă!

1. Sara vrea să determine câte pătrățele sunt în interiorul dreptunghiului $ABCD$.

a) Ajut-o pe Sara să determine cât mai simplu numărul pătrățelelor, explicând modul în care ai procedat.

b) Câte pătrate, de mărimea pătratului roșu, sunt necesare pentru a acoperi suprafața dreptunghiului $ABCD$ din *Figura 35*?

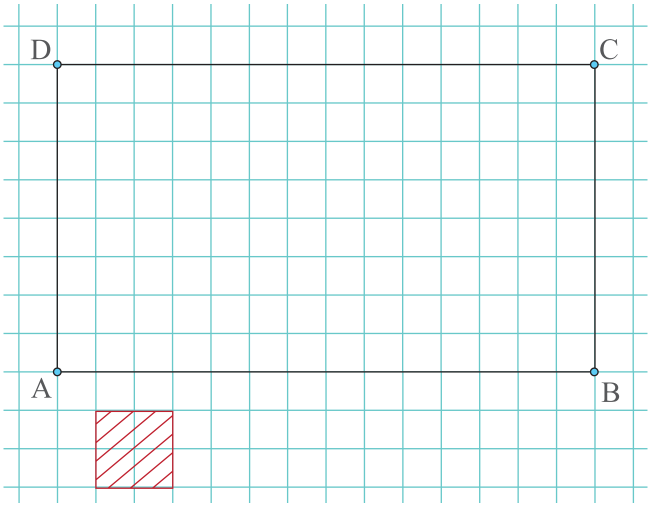


Figura 35

Important

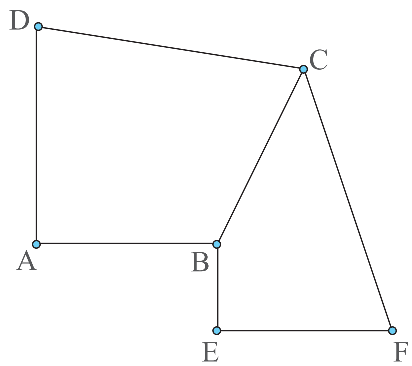
• **Aria** este un număr real pozitiv care se asociază unei suprafețe și ne arată de câte ori o suprafață aleasă de noi (numită unitate de arie) se cuprinde în suprafața dată.

Exemplu: În cazul de mai sus, dacă unitatea de arie este „pătrățica”, spunem că aria dreptunghiului $ABCD$ este de 112 pătrățele. Dacă unitatea de arie este „pătratul roșu”, spunem că aria dreptunghiului este de 28 de pătrate roșii.

• În sistemul internațional de unități de măsură, unitatea principală pentru măsurarea ariei este **metrul pătrat** (m^2).

• Dacă două figuri geometrice au o latură comună și interioarele lor nu au puncte comune, atunci aria suprafeței delimitate de cele două figuri este suma ariilor celor două figuri.

Exemplu: $\mathcal{A}_{ABEFCD} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{BEFC}$.



• Aria unui dreptunghi se poate determina cu ajutorul formulei $\mathcal{A}_{\text{dreptunghi}} = L \cdot l$, unde L reprezintă lungimea laturii mai mari a dreptunghiului, iar l lungimea laturii mai mici a dreptunghiului.

Exemplu: Aria dreptunghiului cu lungimea $L = 6$ cm și lățimea $l = 4$ cm este $\mathcal{A} = 6 \cdot 4 \Rightarrow \mathcal{A} = 24\ cm^2$.

• Aria unui pătrat se poate determina cu ajutorul formulei $\mathcal{A}_{\text{pătrat}} = l^2$, unde l reprezintă lungimea laturii pătratului (pătratul este dreptunghiul cu laturile congruente).

Exemplu: Aria unui pătrat cu latura de 5 cm este $\mathcal{A} = 5^2 = 25\ cm^2$.

Observă și descoperă!

2. Victor își propune să găsească o formulă pentru a calcula aria unui triunghi dreptunghic, folosindu-se de *Figura 36*. Ajută-l pe Victor, răspunzând la întrebările care urmează.

a) Sunt congruente triunghiurile ABD și CDB? Justifică!

b) Cum sunt ariile celor două triunghiuri?

c) Justifică formula $\mathcal{A}_{\triangle ABD} = \dfrac{AB \cdot AD}{2}$.

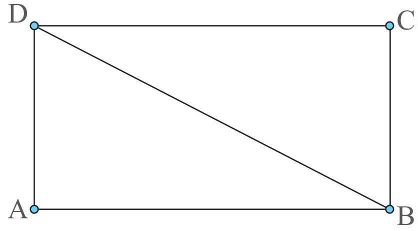


Figura 36

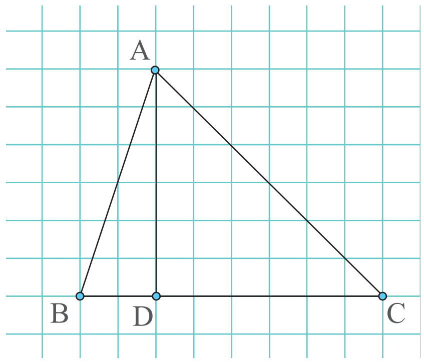
Important

• Aria unui triunghi dreptunghic se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{tr. dreptunghic}} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1 și c_2 sunt lungimile catetelor.

Exemplu: Aria unui triunghi dreptunghic având catetele de 6 cm, respectiv 8 cm, este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$.

• Aria unui triunghi oarecare se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{triunghi}} = \dfrac{l \cdot h}{2}$, unde l este lungimea unei laturi și h este lungimea înălțimii corespunzătoare acelei laturi.

Exemplu: Aria unui triunghi cu o latură de 6 cm și înălțimea corespunzătoare de 4 cm este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12\ cm^2$.



Justificare: $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD}$; $\mathcal{A}_{ABD} = \dfrac{AD \cdot BD}{2}$; $\mathcal{A}_{ACD} = \dfrac{AD \cdot CD}{2}$.

Atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BD}{2} + \dfrac{AD \cdot CD}{2} = \dfrac{AD \cdot BD + AD \cdot CD}{2} = \dfrac{AD \cdot (BD + DC)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$.

Observă și descoperă!

3. Pentru a determina aria unui paralelogram $ABCD$, Sara construiește diagonala BD (*Figura 37*). Ajut-o pe Sara, răspunzând la următoarele întrebări:

a) Sunt congruente triunghiurile ABD și CDB? Justifică!

b) Cum sunt ariile celor două triunghiuri?

c) Justifică formula $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DE$.

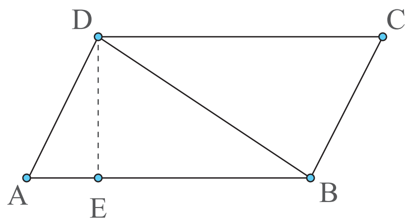


Figura 37

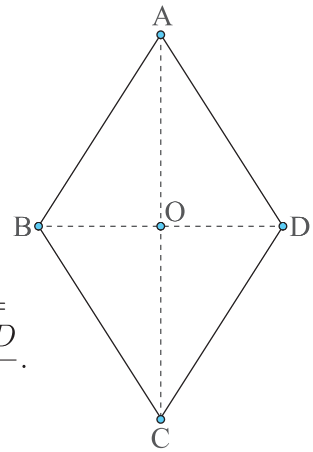
Important

• Numim **înălțime a paralelogramului** distanța dintre două laturi paralele.

• Aria unui paralelogram se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{paralelogram}} = l \cdot h$, unde l reprezintă lungimea laturii și h lungimea înălțimii corespunzătoare.

Exemplu: Aria unui paralelogram cu o latură de 6 cm și înălțimea corespunzătoare de 8 cm este $\mathcal{A} = 6 \cdot 8 = 48\ cm^2$.

• Aria unui romb se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{romb}} = \dfrac{d \cdot D}{2}$, unde d și D reprezintă lungimile diagonalelor.



Exemplu: Aria unui romb cu diagonalele de 6 cm, respectiv 8 cm, este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$.

Justificare: $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ deoarece BD este latură comună, $AB \equiv BC$ și $AD \equiv CD$ (laturi ale rombului). Atunci $\mathcal{A}_{\text{romb}} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{BD \cdot AO}{2} = BD \cdot AO$. Cum $AO = \dfrac{AC}{2}$, deducem că $\mathcal{A}_{\text{romb}} = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$.

• Aria unui romb se poate determina folosind formula pentru aria paralelogramului.

• Numim **înălțime a trapezului** distanța dintre cele două baze.

• Aria unui trapez se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{trapez}} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$, unde B reprezintă lungimea bazei mari, b lungimea bazei mici și h reprezintă înălțimea trapezului.

Exemplu: Aria unui trapez cu bazele de 6 cm, respectiv 8 cm, și înălțimea de 3 cm este $\mathcal{A} = \dfrac{3 \cdot (8+6)}{2} = 21\ cm^2$.

• **Perimetrul unui patrulater convex sau triunghi** înseamnă suma lungimilor tuturor laturilor.

• Pentru **paralelogram**, perimetrul se poate determina cu formula $\mathcal{P} = 2 \cdot (L + l)$, unde L reprezintă lungimea laturii mai mari, iar l reprezintă lungimea laturii mai mici.

Exemplu: Perimetrul unui paralelogram cu lungimea unei laturi de 8 cm și lungimea altei laturi de 6 cm este $\mathcal{P} = 2 \cdot (8+6) = 28\ cm$.

• Pentru **romb**, perimetrul se poate determina cu formula $\mathcal{P} = 4 \cdot l$, unde l reprezintă lungimea laturii.

Exemplu: Perimetrul unui romb cu lungimea unei laturi de 8 cm este $\mathcal{P} = 4 \cdot 8 = 32\ cm$.

Exersează!

4. Calculează aria dreptunghiului $ABCD$, dacă se cunosc următoarele lungimi de laturi: a) $AB = 8\ cm$ și $BC = 5$ cm; b) $CD = 3$ cm și $CB = 7$ cm; c) $AD = 9$ cm și $AB = 6$ cm.

5. Calculează perimetrul dreptunghiului $ABCD$ în fiecare caz: a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 48\ cm^2$, $AB = 6\ cm$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 72\ cm^2$, $BC = 8\ cm$; c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 378\ cm^2$, $AB = 18\ cm$.

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 3\ cm$ și $\mathcal{A}_{ABC} = 6\ cm^2$. Calculează: a) lungimea laturii AC; b) perimetrul triunghiului ABC; c) lungimea înălțimii din vârful A.

Indicație: b) Amintește-ți *Teorema lui Pitagora*, studiată în clasa a VI-a; c) Scrie aria triunghiului ABC în două moduri.

7. Calculează aria paralelogramului, în fiecare caz (*Figurile 38-40*).

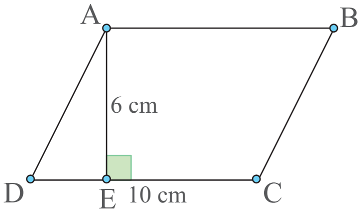
a) 

Figura 38

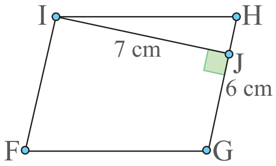
b) 

Figura 39

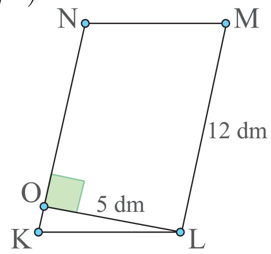
c) 

Figura 40

8. Calculează aria unui romb $ABCD$, cunoscând lungimile diagonalelor:

a) $AC = 6$ cm, $BD = 8$ cm; b) $AC = 5$ m, $BD = 12$ m; c) $AC = 16$ dam, $BD = 12$ dam.

9. Calculează aria și perimetrul unui pătrat cu lungimea laturii egală cu: a) 6 cm; b) 5 dm; c) 9 m.

10. Calculează aria unui pătrat cu perimetrul egal cu: a) 20 cm; b) 12 dm; c) 10 m.

11. Calculează perimetrul unui pătrat cu aria egală cu: a) 36 cm^2; b) 25 dm^2; c) 100 m^2.

12. Calculează aria fiecărui trapez, folosind informaţiile din *Figurile 41-43*.

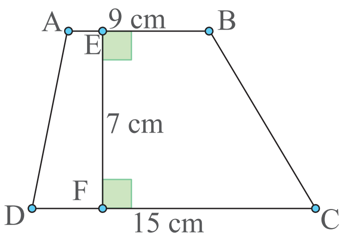
a) 

Figura 41

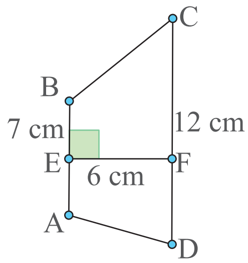
b) 

Figura 42

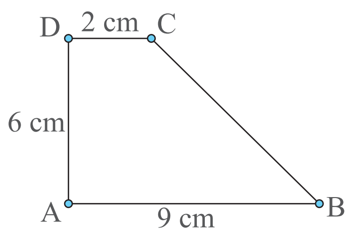
c) 

Figura 43

13. Calculează aria unui trapez a cărui înălțime are lungimea de 9 *cm* și linia mijlocie egală cu 8 *cm*.

14. Se consideră ΔABC un triunghi oarecare și AM mediană, cu $M \in BC$. Demonstrează că $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}$.

15. Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul O intersecția diagonalelor.

a) Demonstrează că $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$.

b) Dacă $OP \perp AD$, $P \in AD$, și $OR \perp BC$, $R \in BC$, demonstrează că triunghiul OPR este isoscel.

16. Se consideră $ABCD$ un trapez oarecare cu $AB \parallel CD$. Arată că $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC}$.

17. Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrează că $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{DOA} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$.

18. Se consideră $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$, în care $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrează că, în acest caz, $ABCD$ este paralelogram.

19. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi și $E \in CD$. Dacă $AB = 5 \cdot DE$, arată că $\mathcal{A}_{ABCE} = 9 \cdot \mathcal{A}_{ADE}$.

20. Determină lungimea laturii unui pătrat, știind că aria și perimetrul acestui pătrat se exprimă prin același număr real.

Recapitulare

1. Determină măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului $MNPQ$, în fiecare caz: a) $\sphericalangle M = 40°$, $\sphericalangle N = 100°$, $\sphericalangle P = 80°$; b) $\sphericalangle N = 55°$, $\sphericalangle M = 72°$, $\sphericalangle Q = 140°$.

2. Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$, dacă măsura unghiului B este $130°$.

3. Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$ în care măsura unghiului A este de două ori mai mare decât a unghiului B.

4. Se consideră $ABCD$ un paralelogram și punctele M și N mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Arată că segmentele BM și DN sunt egale.

5. Se consideră triunghiul echilateral ABC și M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA.

a) Care este natura patrulaterului $AMNP$?

b) Dacă perimetrul triunghiului este 18 cm, cât este perimetrul patrulaterului $AMNP$?

6. Dacă într-un patrulater convex măsurile unghiurilor sunt invers proporționale cu numerele 6, 8, 12 și 24, determină măsurile unghiurilor patrulaterului.

7. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și M mijlocul segmentului AD. Dreptele CM și AB se intersectează în punctul T. Care este natura patrulaterului $TACD$?

8. În *Figurile 44-46* sunt reprezentate schițele grădinilor lui Marian, Radu și Dan. Știind că toate pătratele din imagini reprezintă, în realitate, un pătrat cu latura de 3 m, determină aria fiecărei grădini.

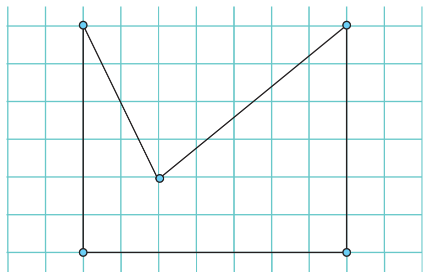


Figura 44
Schița grădinii lui Marian

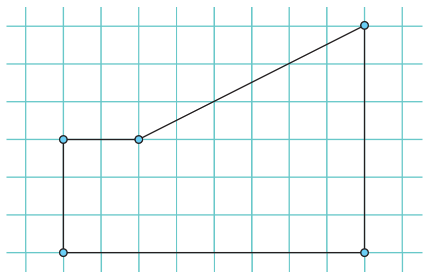


Figura 45
Schița grădinii lui Radu

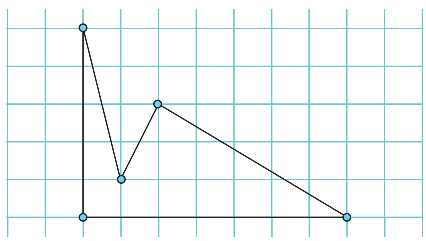


Figura 46
Schița grădinii lui Dan

9. Determină aria unui pătrat care are perimetrul egal cu al unui dreptunghi cu dimensiunile de 12 cm, respectiv 20 cm.

10. Demonstrează că, dacă un patrulater convex are trei unghiuri drepte, atunci acesta este dreptunghi.

11. Se consideră $ABCD$ un paralelogram, astfel încât $AB \equiv BD$. Dacă $CE \parallel BD$, cu $E \in AB$, arată că $DE \perp BC$.

12. Se consideră O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 48$ cm, $\mathcal{P}_{ABO} = 36$ cm, iar $\mathcal{P}_{BOC} = 32$ cm, determină lungimile segmentelor BC, AB și BD.

13. Se consideră ABE un triunghi dreptunghic isoscel. Pe cateta BE se construiește pătratul $BCDE$, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, demonstrează că $ABFE$ este trapez.

14. Se consideră triunghiul ABC, M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC și P mijlocul laturii BC. Demonstrează că $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{BMP} = \mathcal{A}_{CNP} = \mathcal{A}_{MNP} = \dfrac{1}{4}\mathcal{A}_{ABC}$.

15. Se consideră triunghiul ABC și mediana AM, $M \in BC$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, se cere:

a) arată că ariile triunghiurilor BGM și CGM sunt egale;

b) demonstrează că $\mathcal{A}_{AGB} = \mathcal{A}_{AGC} = \mathcal{A}_{BGC} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}$.

Evaluare

10p din oficiu

1. Unește fiecare patrulater din coloana **A** cu proprietatea specifică acestuia din coloana **B**.

	A	B
	1) pătratul	a) Laturi congruente, dar diagonalele de lungimi diferite.
2,5p	2) rombul	b) Suma măsurilor tuturor unghiurilor este egală cu 90°.
2,5p	3) dreptunghiul	c) Un dreptunghi care este și romb.
2,5p	4) trapezul	d) Un paralelogram cu diagonalele congruente care nu este pătrat.
2,5p		e) Diagonalele nu au același mijloc.

2. Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

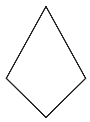


Figura 47

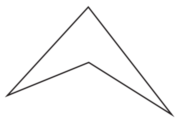


Figura 48

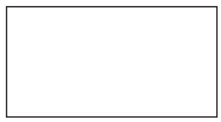


Figura 49

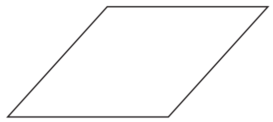


Figura 50

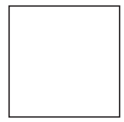


Figura 51

5p a) Dintre exemplele de mai sus, un patrulater concav este reprezentat în figura ...

5p b) Patrulaterul din *Figura 50* este un ...

3. Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

5p a) Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate unei baze sunt congruente. (...)

5p b) În trapezul $ABCD$, bazele au lungimile de 6 cm, respectiv 12 cm. Lungimea liniei mijlocii este egală cu 9 cm. (...)

10p **4.** În *Figura 52*, $ABCD$ este un trapez în care $AD = DC = BC$ și $\sphericalangle ABC = 60°$.
Măsura unghiului ADB este:

A. 60° B. 120° C. 30° D. 90°

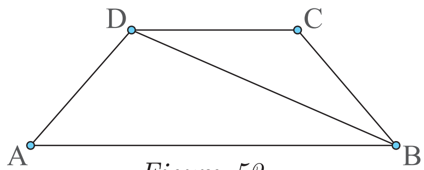


Figura 52

10p **5.** Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$ în care măsura unghiului C este de trei ori mai mare decât măsura unghiului B.

6. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), avem $BC = 6$ cm și distanţa de la G, centrul de greutate al triunghiului, la vârful A este egală cu 4 cm.

5p a) Arată că înălțimea din A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 6 cm.

5p b) Determină aria triunghiului ABC.

7. Complexul turistic de natație are forma din *Figura 53*, unde $ABCD$ este bazinul de înot în formă de pătrat cu latura de 80 m. ABE, BCF, DCG şi DAH reprezintă piscinele exterioare în formă de triunghi dreptunghic isoscel, iar $EFGH$ este gardul care înconjoară complexul. În porţiunile rămase între piscinele exterioare şi gard este zona de relaxare acoperită cu gazon.

10p a) Demonstrează că $\mathcal{A}_{\triangle ABE} = \mathcal{A}_{\triangle BFE}$.

10p b) Calculează aria suprafeței ocupate de zona de relaxare.

10p c) Arată că punctele E, G și O sunt coliniare, unde O este intersecția dreptelor AC și BD.

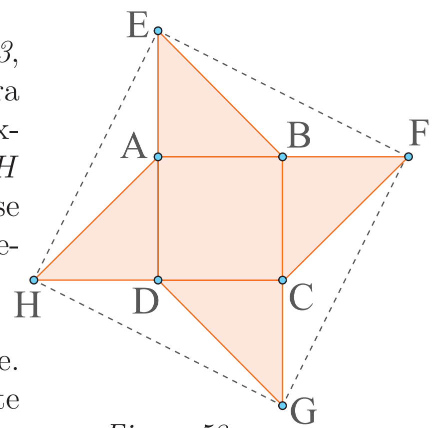


Figura 53

Exersezi și progresezi

1. Ce putem spune despre paralelogramul $ABCD$, în care O este intersecția diagonalelor, dacă: a) $OA \equiv OB$; b) $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA$; c) $\sphericalangle AOB = 90°$.

2. În dreptunghiul $ABCD$, se consideră punctul O de intersecție al diagonalelor și M mijlocul laturii AD. a) Ce reprezintă OM în triunghiul ABD? b) Care este măsura unghiului DMO?

3. Laturile neparalele, AD și BC, ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul T. Arată că dacă $AD \equiv BC$, atunci $TD \equiv TC$.

4. În *Figurile 54* și *55*, punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Calculează perimetrul triunghiului ABC, în fiecare caz.

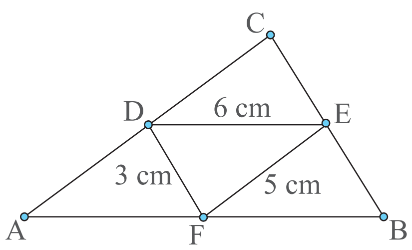


Figura 54

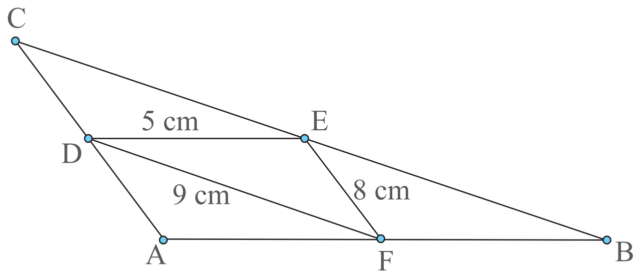


Figura 55

5. Daria vrea să vopsească o bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 7 m, respectiv 8 m. Știind că pentru a vopsi un metru pătrat de tablă are nevoie de cel puțin 80 g de vopsea, care este numărul minim de kilograme de vopsea de care are nevoie?

6. Într-un trapez, notăm B lungimea bazei mari, b lungimea bazei mici și h lungimea înălțimii trapezului. Determină aria trapezului, în fiecare dintre următoarele cazuri: a) $B = 6\ m$, $b = 4\ m$, $h = 5\ m$; b) $B = 13\ dm$, $b = 7\ dm$, $h = 5\ dm$; c) $B = 5\ cm$, $b = 10\ cm$, $h = 3\ cm$.

7. Se consideră ABC un triunghi dreptunghic în A, în care $AD \perp BC$, cu $D \in BC$. Calculează lungimea înălțimii AD, știind că $AB = 15\ cm$, $AC = 20\ cm$ și $BC = 25\ cm$.

8. Se consideră trapezele $ABEF$ și $BCDE$, cu $AB \parallel EF$, $AF \perp AB$ și $BC \parallel DE$, $BC \perp CD$.

a) Dacă punctele A, B și C sunt coliniare, demonstrează că $ACDF$ este dreptunghi.

b) Dacă, în schimb, $C \notin AB$, cu C în exteriorul trapezului $ABEF$, dar $AB \equiv BC$, $EF \equiv ED$ și $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle EBC$ sunt unghiuri ascuțite, demonstrează că: i) ΔBDF este isoscel; ii) $AF \equiv CD$; iii) ΔAEC este isoscel; iv) patrulaterul $ACDF$ este trapez.

9. În *Figura 56*, $ABCD$ este un dreptunghi, iar $BMNP$ și $DSQR$ sunt pătrate, cu $DR \equiv BP$. Arată că $AMCS$, $RQPN$, $DQBN$ și $MNSQ$ sunt paralelograme.

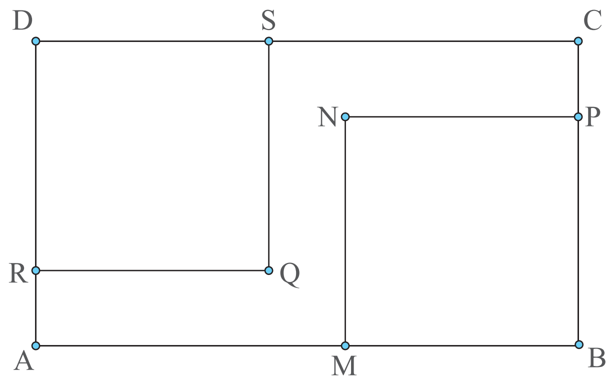


Figura 56

Cercul

Unitatea 7

Unghi înscris în cerc. Coarde şi arce în cerc. Proprietăţi

Amintește-ți!

1. Folosind *Figura 1*, asociază fiecărui număr din coloana **A** litera corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
1. BC	a) Rază
2. OA	b) Diametru
3. DE	c) Coardă în cerc care nu este diametru
4. $\overset{\frown}{AE}$	d) Tangentă la cerc
5. $\sphericalangle AOE$	e) Arc de cerc
	f) Unghi la centru

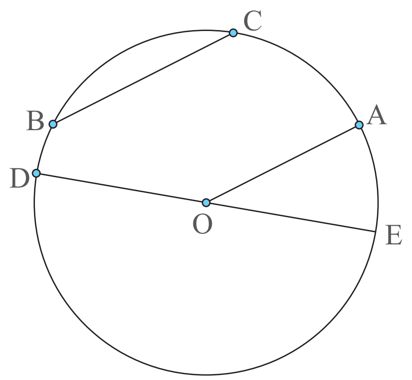


Figura 1

2. În *Figura 1*, măsura arcului de cerc AE este de $40°$. Ce măsură are unghiul AOE?

3. Folosind *Figura 2*, răspunde la următoarele întrebări:
a) Cum se numește unghiul AOB în raport cu triunghiul AOC?
b) Ce măsură are unghiul AOB din această figură?
c) Ce măsură are arcul mic AB?

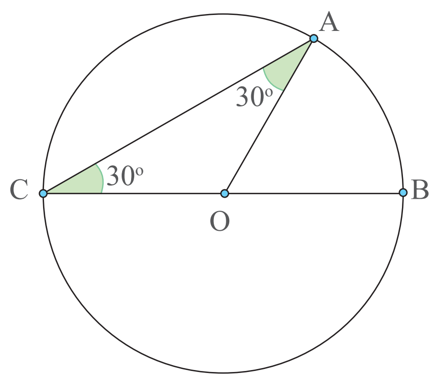


Figura 2

4. Construiește un cerc cu raza de 3 cm și unghiul BAC cu vârful pe cerc și laturile coarde în cerc.

Important

• Numim **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi conțin două coarde ale cercului.

Exemplu: În Figura 3 unghiul BAC este un unghi înscris în cerc.

• Unghiul înscris în cerc are măsura egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi.

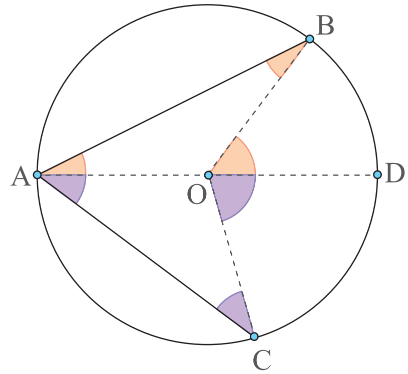


Figura 3

Ipoteză: $\sphericalangle BAC$ - unghi înscris în cerc.

Concluzie: $\sphericalangle BAC = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Demonstrație:

Construim diametrul AD și razele OB și OC, atunci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD$ (*).

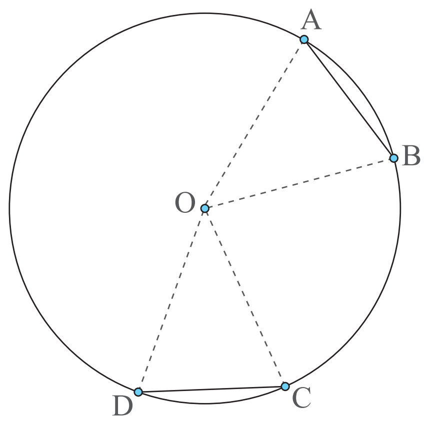
Triunghiul AOB este isoscel ($OA \equiv OB$), de unde $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$. Pe de altă parte, unghiul BOD este unghi exterior triunghiului AOB și atunci $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle BAD$, de unde $\sphericalangle BAD = \dfrac{\sphericalangle BOD}{2}$. Analog se arată că $\sphericalangle CAD = \dfrac{\sphericalangle COD}{2}$. Înlocuind în (*) obținem $\sphericalangle BAC = \dfrac{\sphericalangle BOD}{2} + \dfrac{\sphericalangle COD}{2} = \dfrac{\sphericalangle BOC}{2}$. Cum $\sphericalangle BOC$ este unghi la centru avem $\sphericalangle BOC = \overset{\frown}{BC}$ și atunci $\sphericalangle BAC = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Exemplu: Dacă arcul BC are măsura de $100°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu $50°$.

• Orice unghi drept se înscrie într-un semicerc.

Justificare: Dacă unghiul înscris în cerc are măsura de $90°$, atunci arcul cuprins între laturi are $180°$, adică este un semicerc, iar arcul în care este înscris unghiul este celălalt semicerc.

• În oricare cerc, la arce congruente corespund coarde congruente.



Ipoteză: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

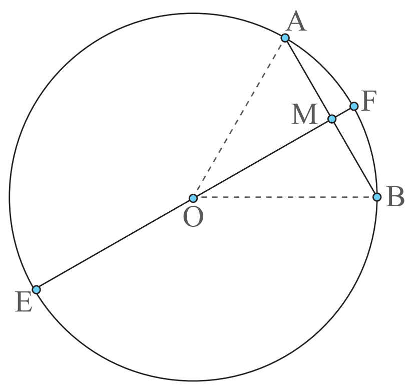
Concluzie: $AB \equiv CD$.

Demonstrație: Construim razele OA, OB, OC și OD. În triunghiurile AOB și COD avem $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$ (raze în cerc); $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (sunt unghiuri la centru și au măsura egală cu măsura arcului cuprins între laturi). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\triangle AOB \equiv \triangle COD$, de unde $AB \equiv CD$.

• În oricare cerc, la coarde congruente corespund arce congruente.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și prin mijlocul arcului determinat de coardă.



Ipoteză: EF – diametru; $EF \perp AB$.

Concluzie: $AM \equiv BM$, $\overset{\frown}{AF} \equiv \overset{\frown}{BF}$.

Demonstrație: Construim razele OA și OB și obținem triunghiul isoscel AOB ($OA \equiv OB$). În acest triunghi OM este înălțime ($EF \perp AB$) prin urmare este și mediană și bisectoare.
Fiind mediană rezultă că $AM \equiv BM$.
Fiind bisectoare $\sphericalangle AOF \equiv \sphericalangle BOF$, de unde $\overset{\frown}{AF} \equiv \overset{\frown}{BF}$ (unghiurile la centru au măsura egală cu măsura arcului cuprins între laturi).

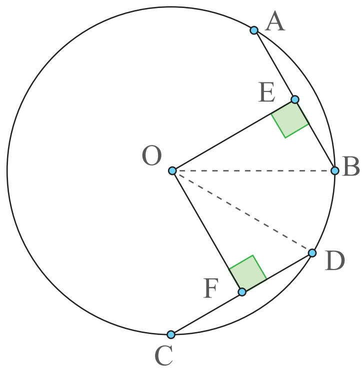
• În oricare cerc, dacă un diametru trece prin mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe coardă.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, dacă un diametru trece prin mijlocul unui arc, atunci el este perpendicular pe coarda care subîntinde arcul.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, coardele congruente sunt egal depărtate de centrul cercului.



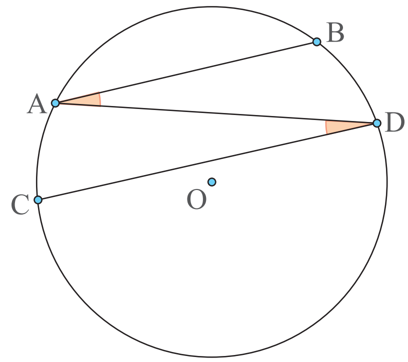
Ipoteză: $AB \equiv CD$; $OE \perp AB$; $OF \perp CD$; $E \in AB$; $F \in CD$

Concluzie: $OE \equiv OF$.

Demonstrație: Avem $AE = BE = \dfrac{AB}{2}$ (OE face parte dintr-un diametru și este perpendicular pe coarda AB). Analog $CF = DF = \dfrac{CD}{2}$. Rezultă $BE \equiv FD$.

Construim razele OB și OD și obținem triunghiurile dreptunghice OEB și OFD în care $BE \equiv FD$ (din demonstrație) și $OB \equiv OD$ (raze în cerc). Rezultă, conform cazului IC de congruență a triunghiurilor dreptunghice, că $\triangle OEB \equiv \triangle OFD$, de unde $OE \equiv OF$.

• În oricare cerc două coarde paralele determină două arce congruente.



Justificare: Unim punctul A cu punctul D. Dacă $AB \parallel CD$ și AD secantă, atunci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$. De aici, $\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, adică $\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{AC}$.

Exersează!

5. Folosind informaţiile din *Figurile 4 – 6*, rezolvă cerinţele fiecărui subpunct.

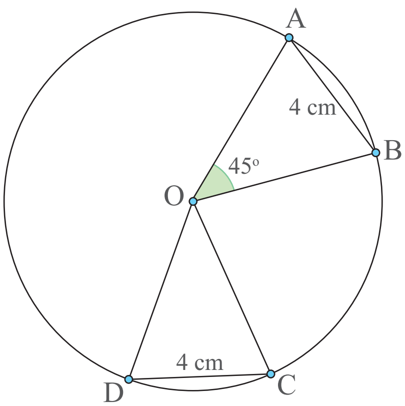


Figura 4

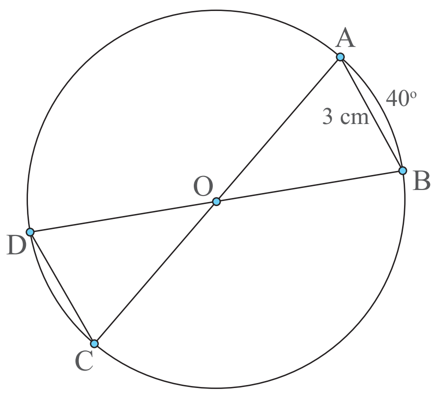


Figura 5

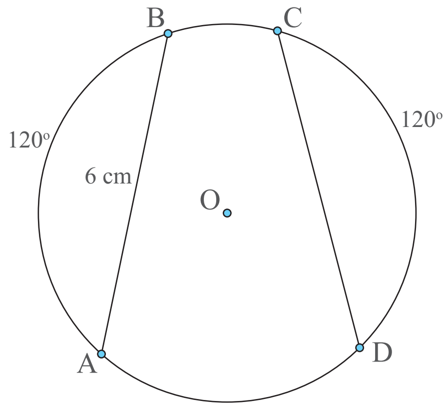


Figura 6

a) Care este măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ din *Figura 4*?
b) Care este lungimea segmentului CD din *Figura 5*?
c) Care este măsura arcului $\overset{\frown}{CD}$ din *Figura 4*?
d) Care este măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ din *Figura 5*?
e) Care este lungimea segmentului CD din *Figura 6*?
f) Ce măsură are unghiul CDB din *Figura 5*?

Portofoliu

6. Pe un cerc de centru O se află n puncte. Segmentele determinate de oricare două puncte consecutive au lungimi egale. Realizează un desen corespunzător şi calculează măsurile arcelor determinate de două puncte consecutive situate pe cerc, dacă: a) $n=4$; b) $n=5$; c) $n=6$; d) $n=8$. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

7. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C şi D astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate astfel încât $AB \perp CD$. Care este măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$, dacă $\overset{\frown}{BD} = 35°$?

8. În *Figura 7*, punctele A şi F sunt coliniare cu centrul cercului. Segmentele AB, BC, CD, DE şi EF au lungimi egale. De asemenea, segmentele AH, HG şi GF au lungimi egale. Calculează măsura arcului determinat de oricare două puncte consecutive aflate pe cerc.

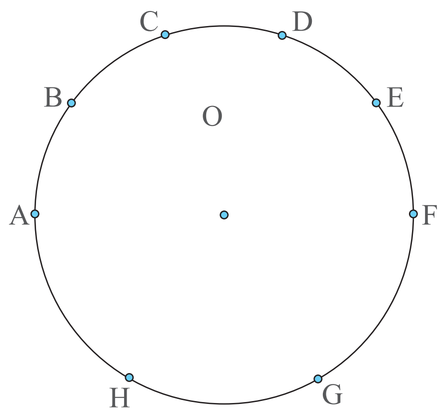


Figura 7

9. a) Cristina şi Matei fac întrecere pe un teren de joacă ce are forma unui disc (*Figura 8*). Ei pleacă simultan din punctul A şi aleargă până în punctul B. Cristina aleargă pe marginea discului, în timp ce Matei aleargă în linie dreaptă. Care dintre ei va câştiga întrecerea ştiind că cei doi au aceeaşi viteză? De ce? b) Cristina aleargă din punctul A până în punctul C, iar Matei aleargă din punctul D până în punctul B (*Figura 9*). Amândoi parcurg aceeaşi distanţă. Ce putem spune despre distanţele (în linie dreaptă) dintre punctele A şi B, respectiv C şi D?

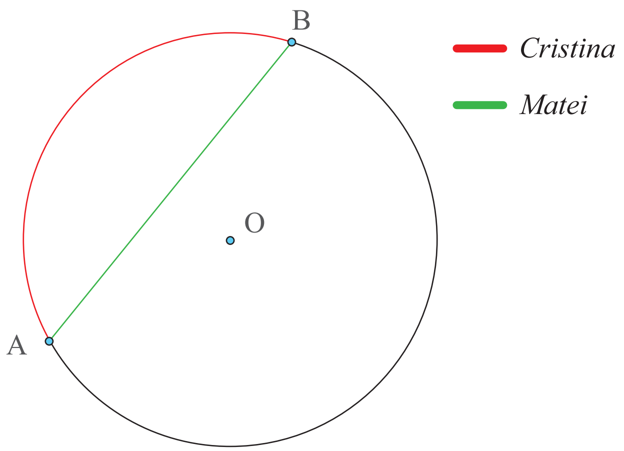


Figura 8

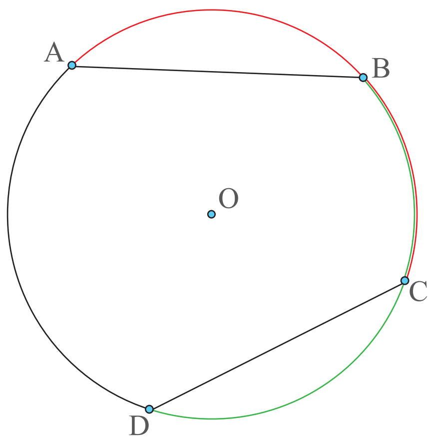


Figura 9

10. Determină măsurile unghiurilor marcate cu simbolul „?”, folosind informaţiile din *Figurile 10 – 12*:

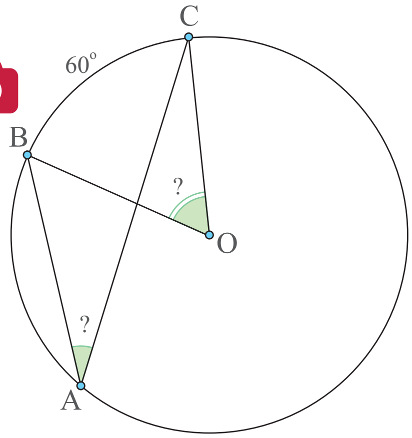


Figura 10

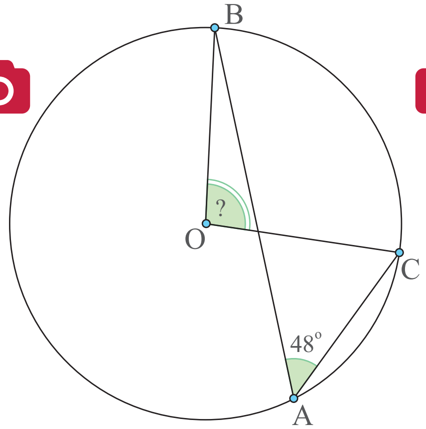


Figura 11

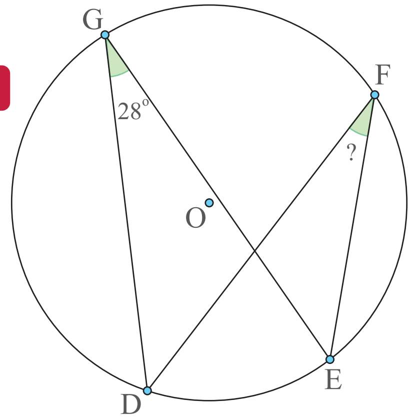


Figura 12

11. Steaua din *Figura 13* are toate unghiurile egale. Determină măsura unghiurilor marcate.

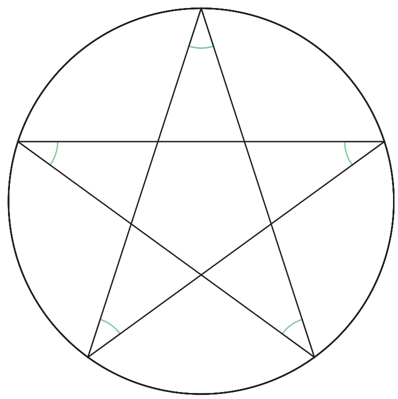


Figura 13

12. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C astfel încât punctele A, B şi O sunt coliniare. Care este măsura unghiului ACB?

13. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B şi C astfel încât AB este diametru şi $AC = BC$. Care este măsura unghiului CAB?

14. Determină valoarea lui x în fiecare caz reprezentat în *Figurile 14 – 16*.

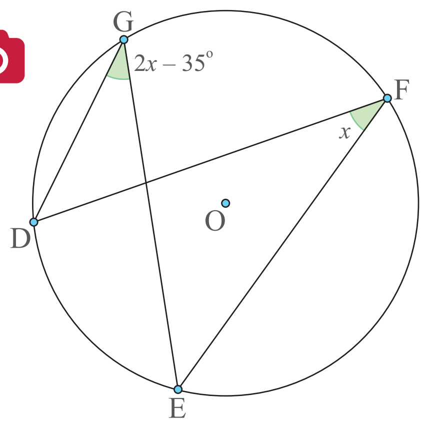


Figura 14

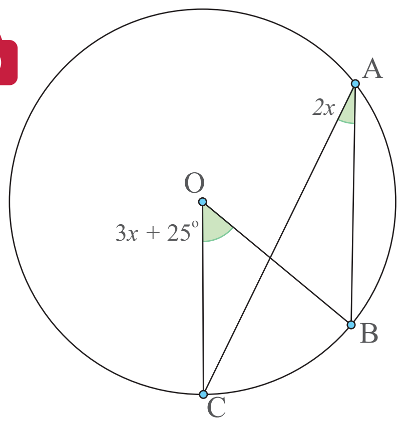


Figura 15

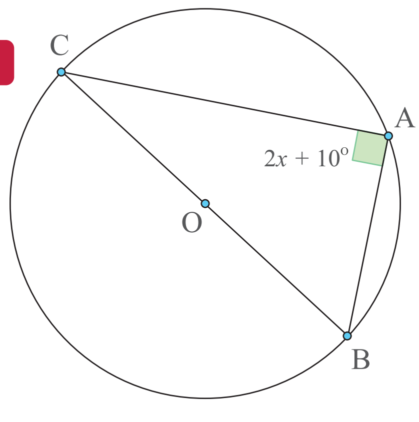


Figura 16

Portofoliu

15. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A ,B, C şi D, astfel încât AB şi CD nu sunt diametre. Distanţele de la O la coardele AB , respectiv CD sunt egale. Arată că triunghiurile OAB şi OCD au arii egale. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

Amintește-ți!

1. Ajută-l pe Victor să răspundă la următoarele întrebări:

a) Cum se numește dreapta d_1 în raport cu cercul de centru O_1?

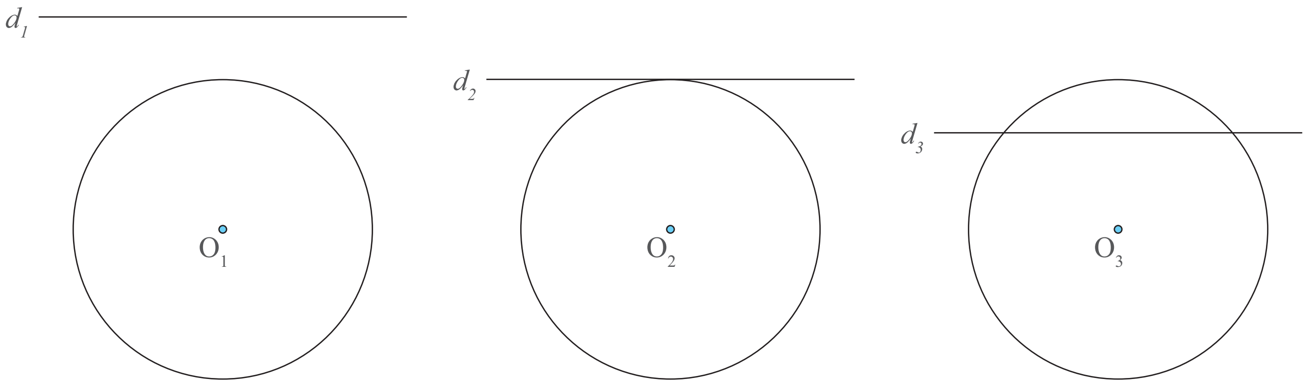
b) Cum este distanța de la O_1 la d_1 față de raza cercului?

c) Cum se numește dreapta d_2 în raport cu cercul de centru O_2?

d) Cum este distanța de la O_2 la d_2 față de raza cercului?

e) Cum se numește dreapta d_3 în raport cu cercul de centru O_3?

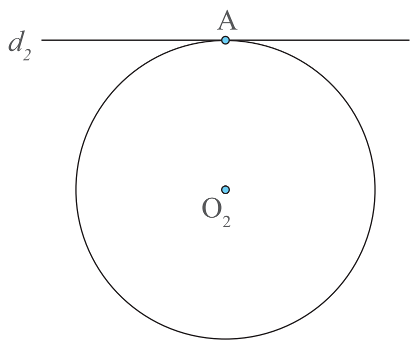
f) Cum este distanța de la O_3 la d_3 față de raza cercului?



Important

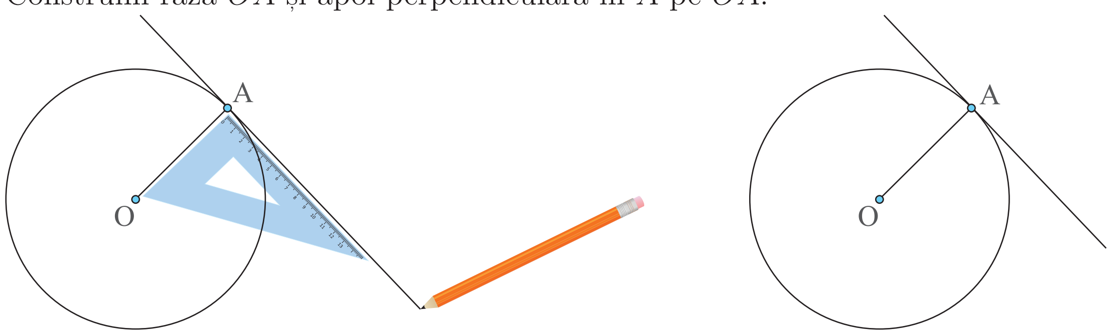
• Dacă o dreaptă este tangentă la cerc, atunci raza în punctul de tangență este perpendiculară pe tangentă.

Exemplu: Dacă d este tangentă la cerc, atunci $OA \perp d$.



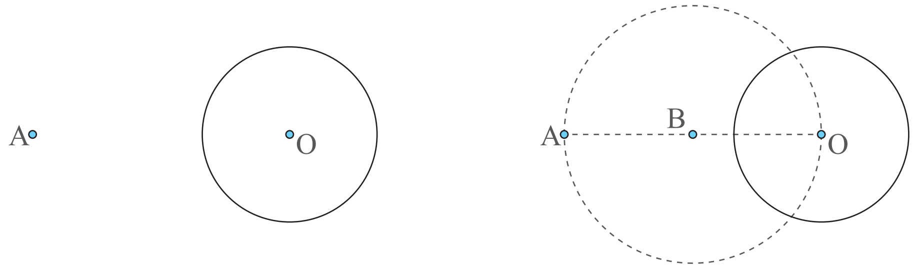
• Cum construim tangenta la cerc într-un punct de pe cerc?

Construim raza OA și apoi perpendiculara în A pe OA.

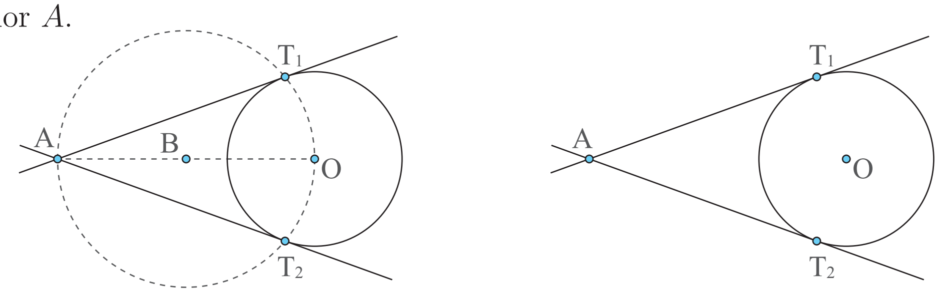


• Cum construim tangenta la cerc dintr-un punct exterior cercului?

Pasul 1. Determinăm punctul B, mijlocul segmentului AO și construim cercul cu centrul în B și raza $\frac{AO}{2}$.



Pasul 2. Punctele în care cercul construit la pasul 1 intersectează cercul dat sunt punctele de tangență. (Un unghi drept se înscrie într-un semicerc, iar raza trebuie să fie perpendiculară pe tangentă). Dreptele determinate de punctul A cu punctele T_1 și T_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A.

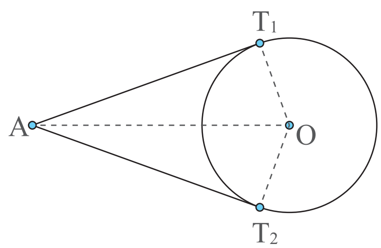


• Dacă AT_1 și AT_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A, atunci segmentele AT_1 și AT_2 sunt congruente (Teorema ciocului de cioară).

Ipoteză: AT_1, AT_2 tangente la cerc.

Concluzie: $AT_1 \equiv AT_2$.

Demonstrație. În triunghiurile dreptunghice AOT_1 și AOT_2 avem, $AO \equiv AO$ (latură comună); $OT_1 \equiv OT_2$ (raze în cerc). Rezultă, conform cazului IC de congruență a triunghiurilor dreptunghice, că $\triangle AOT_1 \equiv \triangle AOT_2$, de unde $AT_1 \equiv AT_2$.



Exersează!

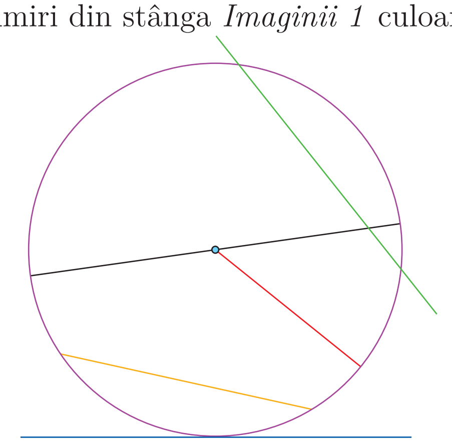
2. Asociază fiecărei denumiri din stânga *Imaginii 1* culoarea corespunzătoare din dreapta ei.

Diametru

Secantă

Tangentă

Coardă



albastru

galben

roșu

negru

verde

Imaginea 1 – Elemente în cerc

Portofoliu

3. Construieşte un cerc cu raza de 5 cm. Fixează 3 puncte A, B şi C situate pe cerc. Construieşte tangentele la cerc în acele puncte. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

4. Construieşte un cerc cu raza de lungime 3 cm. Fixează două puncte A, respectiv B, astfel încât segmentul AB să fie diametrul cercului. Construieşte tangentele la cerc în cele două puncte. Care este poziţia relativă a celor două tangente? Argumentează! Dacă cercul ar avea raza de lungime 5 cm această proprietate se păstrează? Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

5. Construieşte un cerc de centru O cu raza de lungime 4 cm. Fixează un punct P în exteriorul cercului astfel încât $OP = 10$ cm. Construieşte tangentele la cerc din punctul P. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

6. Se consideră un cerc de centru O şi raza de 6 cm. O tangentă dusă dintr-un punct T, exterior cercului, intersectează cercul în punctul D. Determină aria triunghiului TOD, știind că $TD = 8$ cm.

7. Dacă AT_1 și AT_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A, demonstrează că OA este mediatoarea segmentului T_1T_2, unde O este centrul cercului.

8. Se consideră un cerc de centru O şi AT_1, AT_2 tangentele la cerc duse dintr-un punct exterior A. Fie B şi C punctele în care AO intersectează cercul. Demonstrează că:
a) $BT_1 \equiv BT_2$;
b) $CT_1 \equiv CT_2$.

9. Precizează denumirile a trei drepte distincte care trec printr-un punct exterior unui cerc și intersectează cercul în exact trei puncte.

10. Câte drepte pot trasa printr-un punct exterior unui cerc, astfel încât fiecare dintre acestea să intersecteze cercul în exact un punct?

11. Se consideră P un punct exterior cercului de centru O. Tangentele la cerc, duse prin punctul P, intersectează cercul în punctele E şi F. Dacă $\sphericalangle EPO = 30°$, ce măsură are unghiul OFE?

12. Punctele A, B şi C sunt situate pe un cerc astfel încât AB este diametru. Tangenta la cerc, dusă din punctul B, intersectează dreapta AC în D. Dacă $CD = CA$, calculează:
a) măsura arcului CB;
b) măsura unghiului ADB.

Poligoane regulate înscrise în cerc - construcție, măsuri de unghiuri

Conturul unei piulițe este un poligon regulat.

Piulițele sunt prezente la aproape toate îmbinările dintre două piese ale unei mașini.

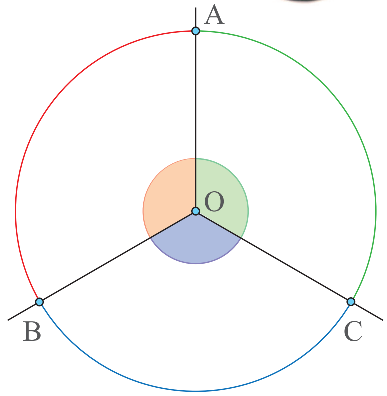
Observă și descoperă!

1. Observă dialogul dintre cei doi copii, apoi rezolvă sarcina de lucru propusă.

Sara către Victor: Trebuie să împart un cerc în trei arce congruente și nu reușesc.

Victor: Nu este foarte dificil. Un cerc are 360°. Dacă cele trei arce sunt congruente, fiecare trebuie să aibă câte 120°. Construim în jurul punctului O, centrul cercului, trei unghiuri cu măsura de 120°. Ceea ce a rezultat arată ca în *Imaginea 2*.

Desenează un cerc și, folosind procedeul descris de Victor, împarte-l în cinci arce congruente.



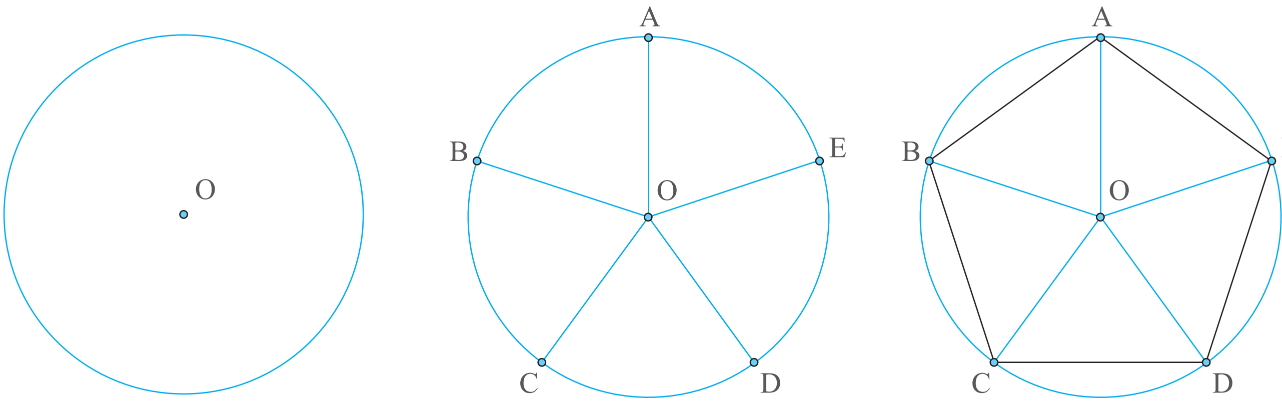
Imaginea 2 – Cerc împărțit în trei arce congruente

Important

- Numim **poligon regulat** un poligon cu toate laturile și toate unghiurile congruente.

*Exemple: **Triunghiul** echilateral este un poligon regulat. **Pătratul** este un poligon regulat. Începând cu poligoanele care au cinci sau mai multe laturi nu mai există denumiri speciale; vom spune **pentagon regulat** pentru poligonul cu cinci laturi și cinci unghiuri congruente și **hexagon regulat** pentru poligonul cu șase laturi și șase unghiuri congruente.*

- Cum construiesc un pentagon regulat?



Pasul 1.

Desenez un cerc.

Pasul 2. Împart cercul în cinci arce congruente, folosind raportorul pentru a obține 5 unghiuri congruente în jurul unui punct. Fiecare arc are 72°.

Pasul 3.

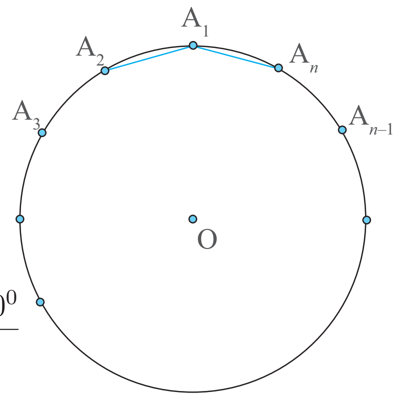
Unesc punctele determinate la pasul 2.

Justificare: Avem $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv EA$, deoarece, într-un cerc, la arce congruente corespund coarde congruente. Acum, unghiul BAE este un unghi înscris în cerc și atunci

$\sphericalangle BAE = \dfrac{\widehat{BCDE}}{2} = \dfrac{\widehat{BC}}{2} + \dfrac{\widehat{CD}}{2} + \dfrac{\widehat{DE}}{2}$. Cum $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = 72°$, rezultă

$\sphericalangle BAE = \dfrac{3 \cdot 72°}{2} = 108°$. Analog, găsim $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA = 108°$. Prin urmare și toate unghiurile sunt congruente. Așadar, $ABCDE$ este un poligon regulat.

- Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu n laturi este $\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.



Justificare: Pentru a construi un poligon regulat cu n laturi, un cerc trebuie împărțit în n arce congruente. Măsura unui astfel de arc este egală cu $\dfrac{360°}{n}$.

Oricare unghi al poligonului este un unghi înscris în cerc și cuprinde, între laturile sale, $n-2$ arce cu măsura de $\dfrac{360°}{n}$.

Avem, $\sphericalangle A_2A_1A_n = \dfrac{(n-2) \cdot \dfrac{360°}{n}}{2} = \dfrac{(n-2) \cdot 360°}{n} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$

(măsura unghiului înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale).

Exemplu: Deoarece pătratul este un poligon regulat, putem verifica. Măsura unui unghi al unui pătrat este $\dfrac{(4-2) \cdot 180°}{4} = \dfrac{2 \cdot 180°}{4} = 90°$.

Exersează!

2. Construiește, cu ajutorul unui cerc cu raza de 3 cm, un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat.

Portofoliu

3. Folosind doar compasul şi raportorul, desenează un: a) Octogon regulat (poligon cu 8 laturi); b)Decagon regulat (poligon cu 10 laturi); c) Dodecagon regulat (poligon cu 12 de laturi). Așază desenele în portofoliul **Despre geometria cercului**.

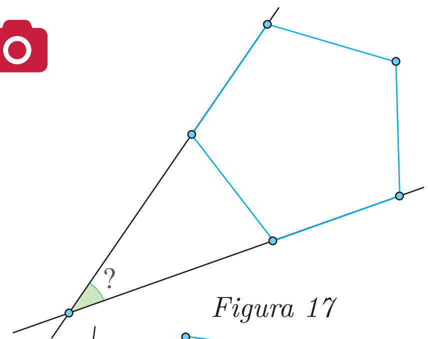


Figura 17

4. Determină măsura unui unghi al unui:
a) pentagon regulat;
b) hexagon regulat;
c) octogon regulat.

5. Determină măsurile unghiurilor marcate, ştiind că poligoanele din *Figurile 17 – 18* sunt poligoane regulate.

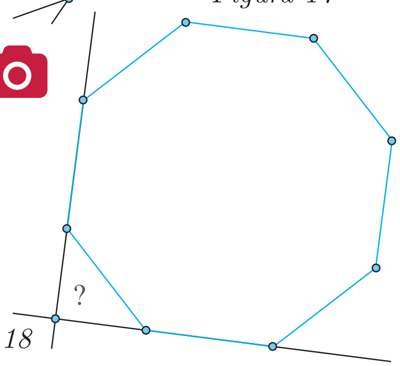


Figura 18

6. Steaua din *Figura 19* are toate vârfurile situate pe cerc şi toate unghiurile egale. Ce poligon obţinem dacă unim vârfurile stelei? Argumentează răspunsul dat.

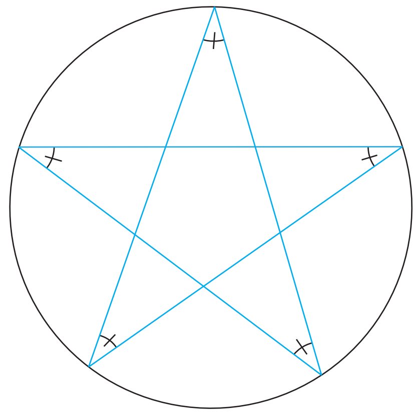


Figura 19

Portofoliu

7. Desenează un pentagon regulat, $ABCDE$, înscris într-un cerc de centru O. Se consideră M, N, P, Q şi R mijloacele arcelor AB, BC, CD, DE, respectiv EA. Verifică dacă $AMBNCPDQER$ este decagon regulat. Argumentează răspunsul dat. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

8. Luana a început construcţia unui poligon regulat (*Figura 20*) pe caietul de geometrie. După ce a construit patru puncte, a constatat că punctele A, E şi O sunt coliniare. Ce poligon vrea să construiască Luana?

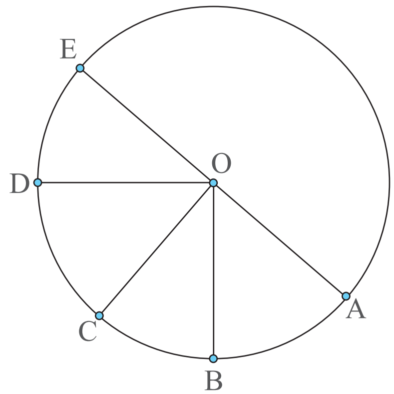


Figura 20

9. Mihnea a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Cu cât este egal n, ştiind că arcul mic A_1A_5 are măsura de:
a) $120°$; b) $80°$; c) $60°$?

10. Raluca a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Cu cât este egal n, ştiind că unghiul OA_1A_2 are măsura de:
a) $72°$; b) $75°$; c) $81°$?

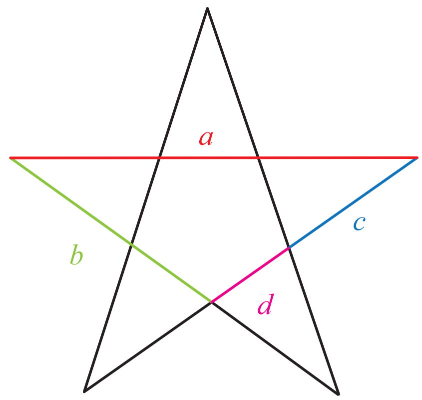
11. a) Orice poligon cu toate laturile egale este regulat? Argumentează!
b) Orice poligon cu toate laturile egale, înscris într-un cerc, este regulat? Argumentează!

Știați că...

În *Imaginea 3* avem desenată o pentagramă. O pentagramă este o stea cu cinci colţuri. Numele ei provine din limba greacă de la cuvântul *pentagrammon* care înseamnă cu cinci linii.

Cele patru distanţe colorate în imagine sunt determinate de intersecţiile celor cinci linii. Aceste distanţe au o proprietate specială: raportul lor este egal cu numărul de aur.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \Phi \cong 1{,}618$$



Imaginea 3 - Pentagramă

Indiciu: Pentru a realiza pentagrama, desenează un pentagon regulat înscris într-un cerc şi apoi uneşte corespunzător vârfurile pentagonului.

12. Lucrează în echipă (3-4 membri). Fiecare membru al echipei desenează câte o pentagramă de dimensiuni diferite. Măsoară cele patru segmente indicate mai sus şi calculează valoarea celor trei rapoarte. Sunt egale cu numărul de aur? De ce crezi că se întâmplă acest fapt? Cum apreciezi rezultatele obţinute de tine în comparaţie cu numărul de aur?

Lungimea cercului și aria discului

Fără lungimea cercului nu am putea să știm ce distanță am parcurs cu mașina.

Observă și descoperă!

1. Observă dialogul dintre cei doi copii, apoi rezolvă sarcina de lucru propusă.

Sara către Victor: Se poate vorbi de perimetrul unui cerc?

Victor: Desigur, dar nu se mai numește perimetru; se numește lungimea cercului. Să-ți arăt!

Victor a marcat cu vopsea un loc de pe roata din față a bicicletei sale și de fiecare dată când acesta ajunge pe asfalt lasă un semn, ca în Imaginea 4.

Imaginea 4 – Urme de vopsea lăsate de o roată de bicicletă

Distanța dintre două astfel de semne reprezintă lungimea cercului. Știind că distanța dintre două semne consecutive este de 94 cm, ce distanță a parcurs Victor, dacă pe asfalt sunt 100 de semne?

Important

• Lungimea cercului se determină cu formula $L_{\text{cerc}} = 2\pi R$, unde R este raza cercului, iar π este un număr irațional a cărui valoare aproximativă este 3,14 și reprezintă raportul dintre lungimea cercului și diametrul acestuia.

Exemplu: Lungimea unui cerc cu raza de 30 cm este $L_{cerc} = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \cong 60 \cdot 3{,}14 = 188{,}4$ cm. De regulă, lungimea cercului se dă sub forma 60π, înlocuirea se face numai în cazuri speciale.

• Un disc este suprafața delimitată de un cerc.

• Aria unui disc se determină cu formula $\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi R^2$, unde R este raza cercului, iar valoarea aproximativă a lui π este 3,14.

Exemplu: Aria unui disc cu raza de 30 cm este $\mathcal{A}_{disc} = \pi \cdot 30^2 = 900\pi \approx 900 \cdot 3{,}14 = 2\,826$ cm^2. De regulă, aria discului se dă sub forma 900π, înlocuirea se face numai în cazuri speciale.

Exersează!

2. Determină lungimea cercului şi aria discului care are raza egală cu:
a) 3 cm; b) 7 cm; c) 1,2 m; d) 2,1 dm.

3. Determină lungimea cercului şi aria discului care are diametrul egal cu:
a) 4 m; b) 10 m; c) 9 cm.

4. Determină raza cercului, ştiind că aria discului este egală cu: a) 64π m^2; b) 81π cm^2; c) 50π m^2.

5. Determină diametrul unui cerc a cărui lungime este egală cu: a) 44π cm; b) 12π m; c) 7π dam.

6. Determină lungimea unui cerc, știind că aria discului este egală cu:
a) 64π cm^2; b) 121π cm^2; c) 20π cm^2.

7. O stropitoare, ca în *Imaginea 5*, poate uda toată iarba aflată la o distanţă de cel mult 5 m. Arată că suprafaţa ce poate fi udată de stropitoare este mai mare de 78,5 m^2.

Indiciu: Foloseşte faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Imaginea 5 – Stropitoare

8. Vlad şi Maria participă la cursuri de echitaţie. Vlad călăreşte un cal legat de un par cu o frânghie care are lungimea de 3,5 m, iar Maria călăreşte un cal legat de un par cu o frânghie care are lungimea de 2 m. Vlad a făcut 30 de ture, iar Maria 50 de ture. Care dintre ei a parcurs o distanţă mai mare şi cu cât? Aproximează distanţa folosind aproximarea $\pi \cong 3{,}14$.

9. Raluca are o grădină circulară, ca în *Imaginea 6*, al cărei diametru este de 20 m. În interiorul grădinii se află opt copăcei. În jurul fiecărui copăcel se află pietricele pe o rază de 1 metru. Restul suprafeţei grădinii este acoperită cu iarbă. Arată că suprafaţa acoperită cu iarbă are aria de cel puţin 92π m^2. În ce situaţie suprafaţa acoperită cu iarbă este mai mare de 92π m^2?

Imaginea 6 – Grădină

10. Determină aria suprafeţei colorate, din *Figurile 21 – 25*, în fiecare caz:

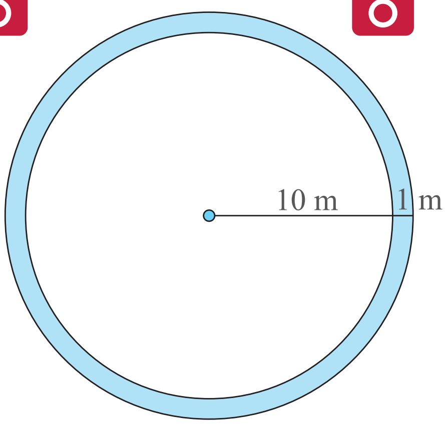


Figura 21

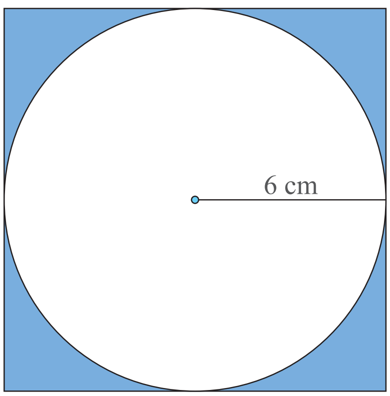


Figura 22

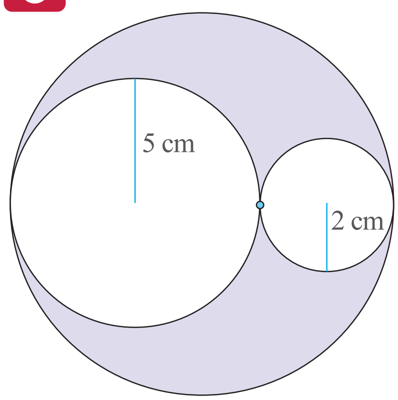


Figura 23

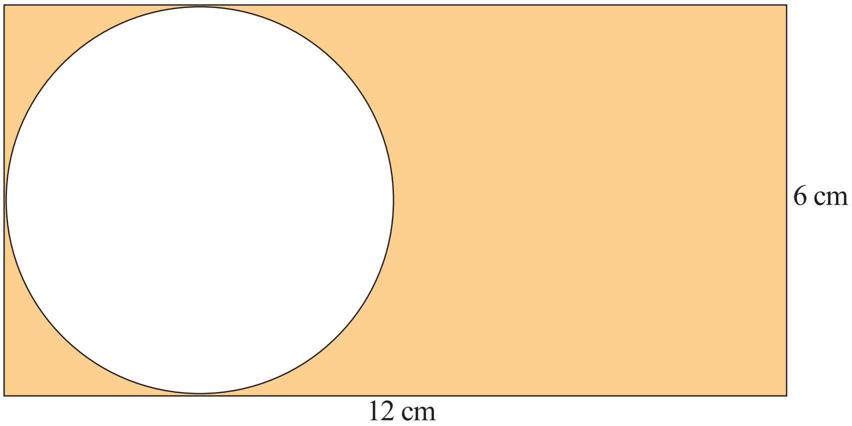


Figura 24

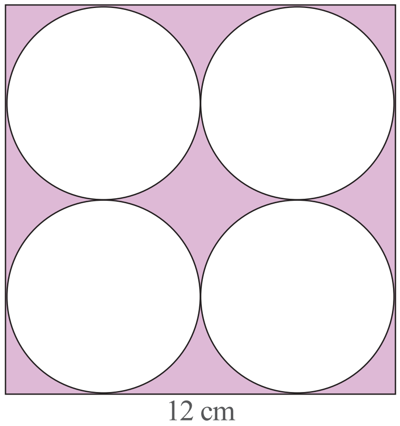


Figura 25

11. Câte rotaţii complete realizează roata unui autobomil, cu circumferinţa de 200 cm, pe o distanţă de: a) 5 km; b) 12 km; c) 34 km.

12. Pe distanţa de 2 km, câte rotaţii complete realizează o roată cu raza egală cu:
a) 25 cm ; b) 20 cm; c) 22 cm. ($\pi \cong 3{,}14$)

13. **Lucrează în echipă**. Calculați numărul de rotaţii ale roții unui automobil pentru a parcurge o distanță de 60 km.

Pe majoritatea anvelopelor se găseşte o inscripţie asemănătoare cu cea din *Imaginea 7*. Semnificaţiile numerelor sunt următoarele:

A - lăţimea anvelopei exprimată în milimetri;

B – raport nominal de aspect (raportul dintre secţiunea transversală şi lăţimea anvelopei);

C – diametrul intern al anvelopei (diametrul jantei pe care se fixează roata). Acesta este exprimat în inchi (1 inch = 25,4 mm).

Putem calcula diametrul exterior al anvelopei cu următoarea formulă:

Imaginea 7 – Inscripție anvelopă

$$\text{Diametru} = 2A \cdot \frac{B}{100} + C.$$

Exemplu: Diametrul anvelopei din *Imaginea 7* este: $2 \cdot 205 \cdot \dfrac{55}{100} + 16 \cdot 25{,}4 = 631{,}9$ mm.

Circumferinţa anvelopei este: $2\pi R = D \cdot \pi = 631{,}9 \cdot 3{,}141592 = 1\,985{,}17$ mm.

Pentru o precizie cât mai mare am folosit următoarea aproximare: $\pi \cong 3{,}141592$.

Pentru a calcula numărul de rotaţii complete ale roţii, facem raportul dintre distanţa totală şi circumferința roţii: $60\,000\,000 : 1\,985{,}17 = 30\,224{,}11$ rotaţii complete.

Aveţi grijă ca ambele lungimi să fie exprimate în aceeaşi unitate de măsură.

Calculaţi numărul de rotaţii complete ale unei roţi, realizate pe 60 de km, dacă pe anvelopă sunt inscripționate următoarele date:

315/80R22 **215/65R16** **195/65R15**

La acest exercițiu poţi folosi calculatorul științific.

Recapitulare

1. Pe un cerc, se consideră punctele A, B, C şi D în această ordine. Arată că, dacă $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DCB}$, atunci $AB = CD$.

2. În *Figura 26*, E este mijlocul coardei CD, iar CF este tangent la cerc. Arată că unghiurile COF şi ECF sunt congruente.

3. Pe un cerc, de centru O, se consideră punctele A, B, C şi D, astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate în cele două semicercuri determinate de AB. Dacă $\overset{\frown}{AC} = 110°$ şi $\overset{\frown}{BD} = 70°$, arată că $AB \perp CD$.

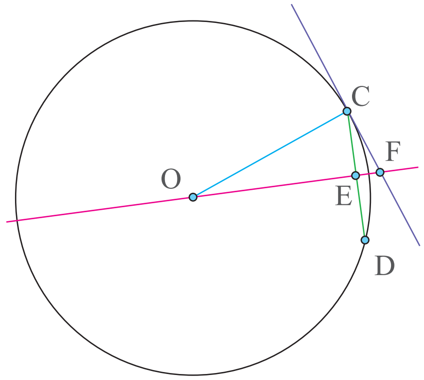


Figura 26

4. Determină măsurile unghiurilor necunoscute, reprezentate în *Figurile 27 – 29*:

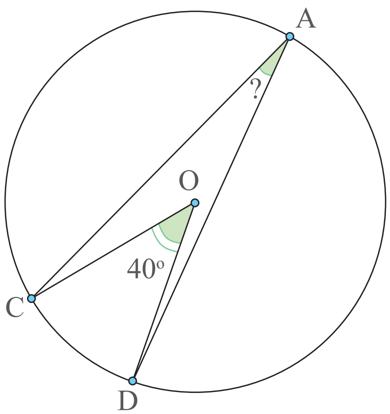


Figura 27

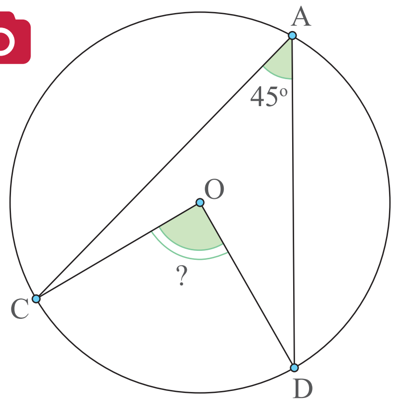


Figura 28

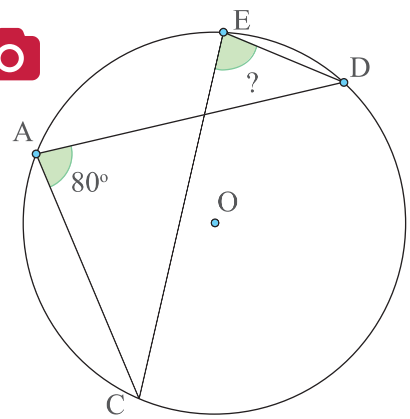


Figura 29

5. Se consideră punctele A, B, respectiv C situate pe un cerc. Cât este suma măsurilor unghiurilor ABC, BCA şi CAB?

6. Cercurile din *Figura 30* au raze egale, iar CD este tangentă la cele două cercuri. Arată că centrele celor două cercuri și mijlocul segmentului CD sunt trei puncte coliniare.

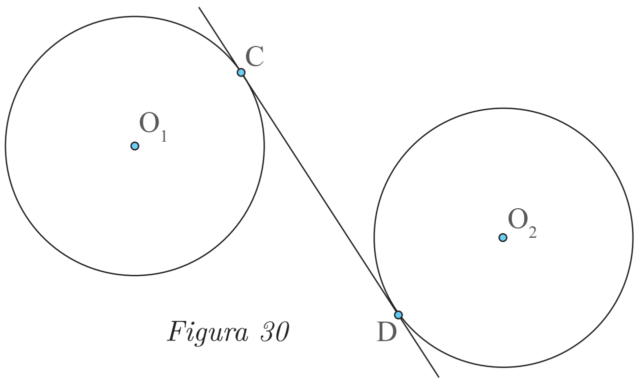


Figura 30

7. Determină ce poligon regulat are măsura unui unghi egală cu:
a) 60°; b) 90°; c) 120°; d) 144°.

8. Determină aria şi lungimea unui cerc de rază a) 8 cm; b) $3\sqrt{5}$ cm; c) $2\sqrt{7}$ cm; d) 11 cm.

9. Desenează, pe caiet, un poligon regulat cu n laturi şi determină măsura unghiurilor poligonului pentru: a) $n = 9$; b) $n = 12$; c) $n = 6$; d) $n = 10$.

10. În *Figura 31*, se observă schiţa unui teren de sport. Porţiunile $\overset{\frown}{AD}$ şi $\overset{\frown}{BC}$ reprezintă semicercuri.

a) Calculează aria suprafeței totale a terenului.

b) Sunt suficienţi 286 metri de sârmă pentru a împrejmui terenul? Justifică răspunsul dat.

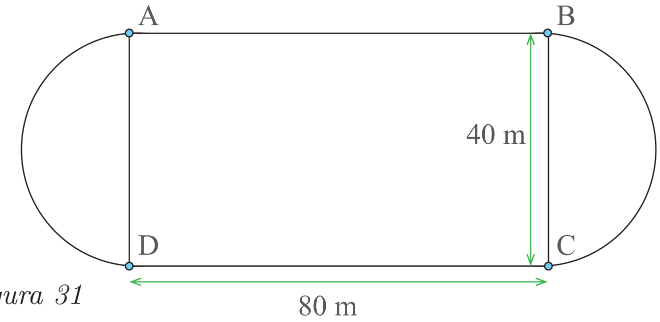


Figura 31

Proiect

Geometria cercului

• Ce veți face?

Veți căuta informații despre istoria geometriei cercului.

• De ce veți face?

Pentru a investiga cum a evoluat geometria cercului, de la grecii antici până în zilele noastre.

• Cum veți face?

Veți căuta, în cărți sau pe Internet, date, imagini, informații despre evoluția geometriei cercului.

• Cum veți ști că ați reușit?

Veți prezenta proiectul vostru, iar colegii din celelalte grupe vor face aprecieri și sugestii.

• Ce se evaluează?

• utilizarea informațiilor relevante din cărți sau de pe Internet;

• participarea tuturor membrilor grupului la căutarea informațiilor;

• forma atractivă a desenelor/imaginilor utilizate;

• prezentarea clară a proiectului.

Sugestii:

• Organizați-vă în grupuri și stabiliți-vă rolurile.

• Folosiți imagini și informații relevante pentru a prezenta o etapă importantă în evoluția geometriei cercului.

Model de prezentare

Eratostene și geometria cercului

Eratostene, matematician grec, a trăit în Egipt în jurul anului 250 î.Hr. El s-a folosit de geometria cercului pentru a dovedi că Pământul este rotund.

Eratostene a aflat că în ziua solstiţiului de vară (21 iunie) există, undeva în sudul Egiptului un puț în care lumina Soarelui pătrunde până în punctul cel mai adânc al acestuia. În momentul în care razele pătrundeau până în acel punct, Eratostene a înfipt un băţ vertical în sol în Alexandria, măsurând unghiul format de băţ şi razele Soarelui. A obţinut o valoare de 7,2°, adică fix a cincizecea parte dintr-un cerc (360°).

• Prezentați proiectul într-un mod inedit.

• Stabiliți, împreună cu profesoara/profesorul, un proiect câștigător.

Evaluare

10p din oficiu

20p **1.** Folosind *Figura 32*, asociază fiecărui număr din coloana **A** litera corespunzătoare din coloana **B**.

A	B
1. Rază	a) AE
2. Diametru	b) $\overset{\frown}{AE}$
3. Coardă în cerc care nu este diametru	c) OA
4. Arc de cerc	d) CD
	e) BA

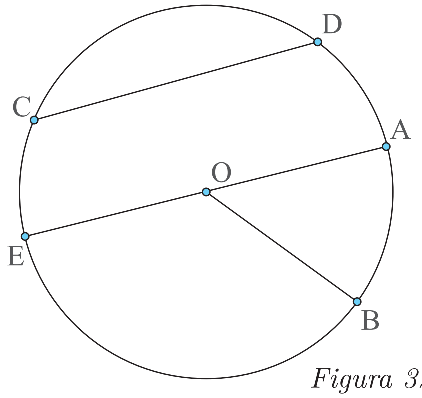


Figura 32

10p **2.** Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:
a) Raza unui cerc cu diametrul de 10 cm măsoară 20π cm.
b) Măsura fiecărui unghi al unui poligon regulat cu 10 laturi este $144°$.

10p **3.** Completează enunțurile de mai jos:
a) Poligonul regulat care are 6 laturi se numește ... .
b) Dacă pe cercul de centru O se consideră punctele A, B şi C astfel încât AB este diametru şi $AC = BC$, atunci măsura unghiului CAB este de ...°.

10p **4.** Alege varianta corectă de răspuns:
Dacă pe cercul de centru O se consideră punctele A, B, C şi D astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate pe cerc, astfel încât $AB \perp CD$ și măsura arcului $\overset{\frown}{BD} = 30°$, atunci măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu:
A. $30°$; B. $150°$; C. $60°$; D. $90°$.

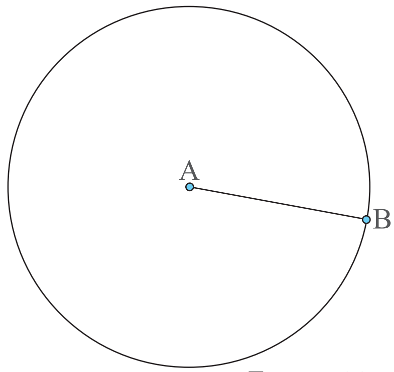


Figura 33

10p **5.** Determină câte rotaţii complete realizează o roată cu raza de 50 cm pe o distanţa de 2 km.

10p **6.** Determină lungimea segmentului AB din *Figura 33*, știind că aria discului, cu centrul în A, este egală cu 50π cm^2.

10p
10p **7.** Grădina lui Victor are forma unui dreptunghi cu lățimea de 10 m și lungimea de două ori mai mare. În grădină se află două ronduri pe care au fost plantate flori, iar suprafața rămasă este acoperită cu gazon. Cele două cercuri sunt tangente între ele și tangente la laturile dreptunghiului, ca în *Figura 34*.
a) Arată că aria suprafeței plantate cu flori este mai mică de 160 m^2. Foloseşte faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
b) Știind că pentru 1 m^2 de gazon se folosesc 500 g de semințe, iar 1 kg de semințe costă 59,99 lei, calculează suma necesară pentru achiziționarea semințelor. În acest caz, folosește aproximarea $\pi \cong 3{,}14$.

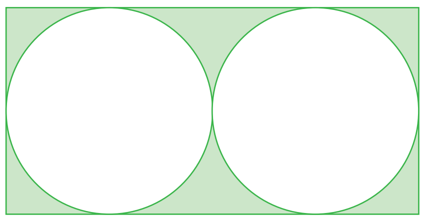


Figura 34

Exersezi și progresezi

1. Numeşte cel puţin câte un exemplu pe *Figura 35* pentru fiecare element al cercului:
- centrul cercului
- rază
- diametru
- tangentă
- unghi la centru
- unghi înscris în cerc

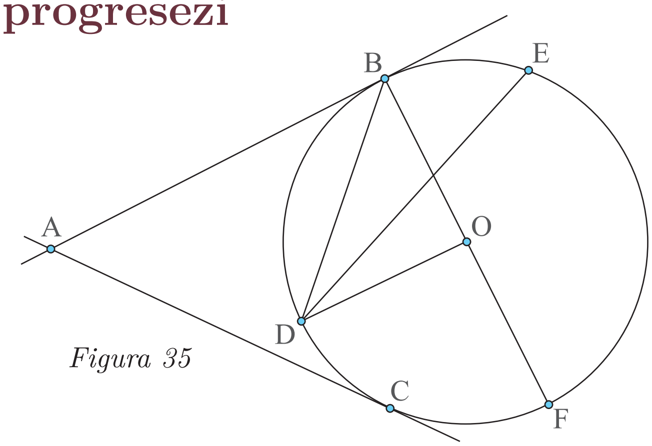


Figura 35

2. În *Figura 36* este desenat un poligon regulat.

a) Care este numele acestuia?

b) Care este măsura unui unghi al poligonului?

c) Care este măsura arcului determinat de două puncte consecutive?

d) Care dintre următoarele poligoane este regulat?

i) $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ ii) $A_3A_6A_9A_{12}$

iii) $A_1A_3A_6A_8A_{11}$ iv) $A_3A_7A_{11}$

Argumentează răspunsul dat.

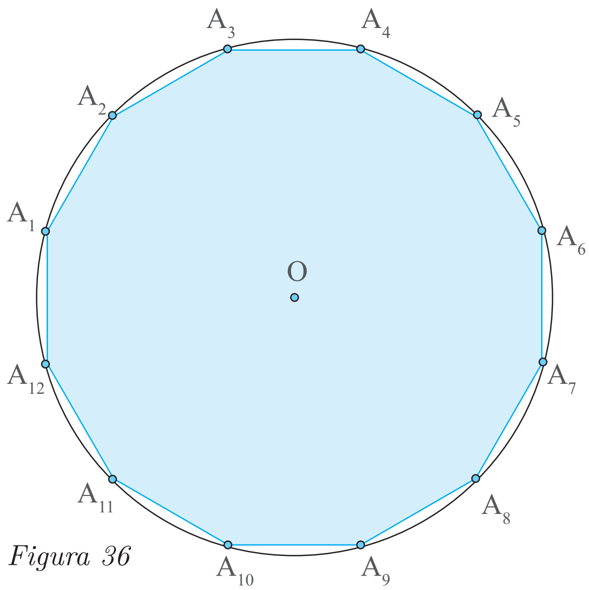


Figura 36

3. Determină măsurile unghiurilor unui poligon regulat care are numărul de laturi egal cu:

a) 18; b) 10; c) 9; d) 6.

4. Determină aria şi lungimea unui cerc cu diametrul egal cu:

a) 12 m; b) 20 cm; c) 7 dm; d) 5 m.

5. Tangentele, duse dintr-un punct T, intersectează cercul, de centru O, în punctele A, respectiv B. Determină lungimea coardei AB, știind că $OT = 20$ cm și aria patrulaterului $AOBT$ este 100 cm^2.

6. Calculează aria porțiunii de culoare roșie din *Figura 37*, știind că pătratul $ABCD$ are latura de 16 cm, iar cele patru cercuri cu centrele în vârfurile pătratului au raza egală cu jumătate din lungimea laturii AB.

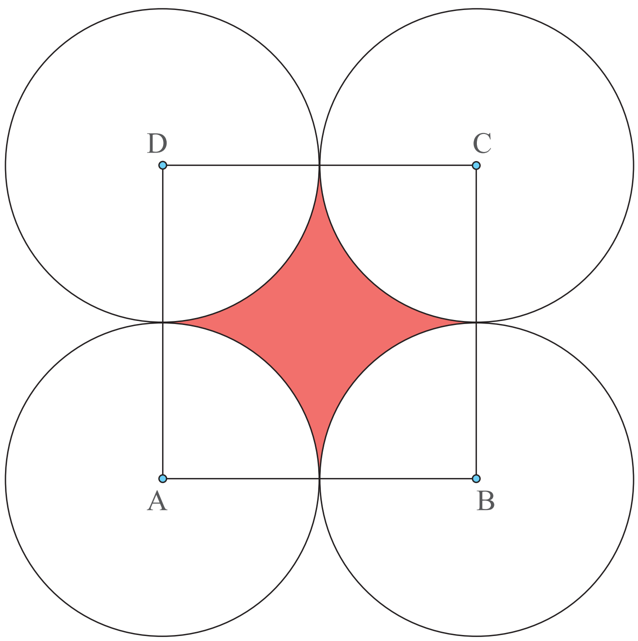


Figura 37

7. Știind că cele două pătrate mari din *Figurile 38 și 39* sunt identice, demonstrează că discul de culoare albastră are aceeași arie cu suma ariilor celor patru discuri de culoare verde.

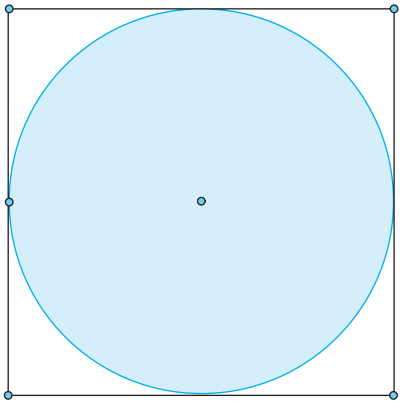


Figura 38

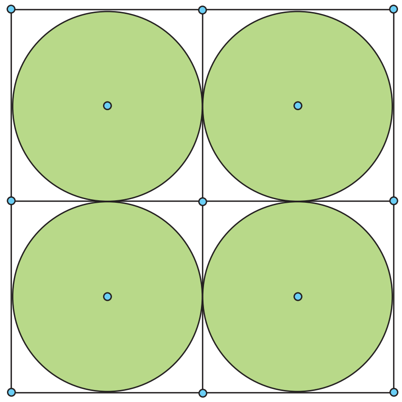


Figura 39

8. În *Figura 40*, cercurile de rază 1 cm și de centre O_1 și O_2 sunt secante, punctul E se află la intersecția celor două cercuri, punctele C și D reprezintă intersecția dintre segmentul O_1O_2 și cele două cercuri, iar punctele A și B sunt alese pe cercuri, astfel încât unghiurile $\sphericalangle AO_1O_2$ și $\sphericalangle BO_2O_1$ sunt drepte. Știind că porțiunea colorată cu portocaliu are aceeași arie precum cea a porțiunii de culoare verde, calculează lungimea segmentului O_1O_2.

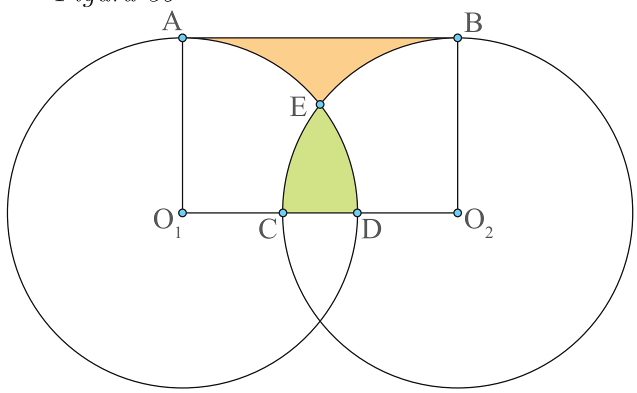


Figura 40

9. Problemă rezolvată.

Lunulele lui Hipocrate. Se consideră ABC un triunghi dreptunghic în A și punctele D, E și F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Se consideră, apoi, cercurile C_1, de centru E și rază AE, C_2, de centru D și rază AD și C_3, de centru F și rază AF.

Demonstrează că suma ariilor colorate cu albastru în *Figura 41* este egală cu aria triunghiului dreptunghic ABC. *(Lunulele sunt tocmai suprafețele colorate cu albastru!)*

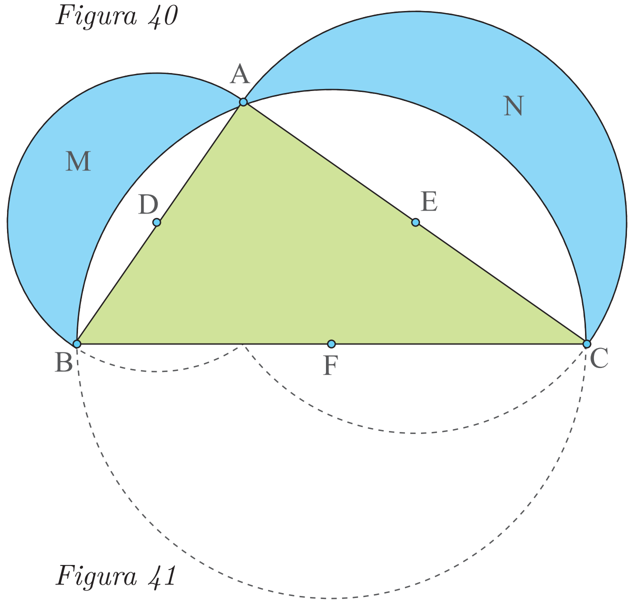


Figura 41

Rezolvare: Notăm $\mathcal{A}$ suma ariilor hașurate, $\mathcal{A}_D$ aria semicercului de diametru AB, $\mathcal{A}_E$ aria semicercului de diametru AC și $\mathcal{A}_F$ aria semicercului de diametru BC.

Avem $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - (\mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA})$.

Pe de altă parte $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA}$, de unde $\mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA} = \mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{\triangle ABC}$. Atunci $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - (\mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{\triangle ABC})$ sau $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - \mathcal{A}_F + \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Deoarece $\mathcal{A}_D = \dfrac{AB^2}{4}\pi$, $\mathcal{A}_E = \dfrac{AC^2}{4}\pi$, și $\mathcal{A}_F = \dfrac{BC^2}{4}\pi$, iar $AB^2 + AC^2 = BC^2$, rezultă $\mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E = \mathcal{A}_F$ și deci $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

10. Un pendul de lungime l oscilează cu un unghi θ față de poziția de echilibru. Determină ce lungime are arcul descris de capătul pendului, dacă:

a) $l = 6\ cm$, $\theta = 30°$;

b) $l = 3\ cm$, $\theta = 60°$;

c) $l = 4\ cm$, $\theta = 45°$.

Ce rezultate ai obținut? Ce observi?

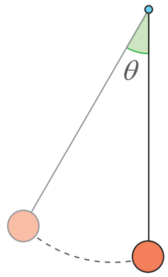


Figura 42

11. Problemă rezolvată: Se consideră trei cercuri cu centrele în punctele O_1,O_2,O_3 și razele egale cu r. Toate cele trei cercuri se intersectează în punctul M și două câte două se intersectează în punctele A, B, respectiv C. Cercul care trece prin punctele A, B, C are aceeași rază cu cercurile date. (Problema piesei de 5 lei, Problema lui Țițeica)

Rezolvare: Începem cu două observații evidente:

1. Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci cercurile circumscrise celor două triunghiuri au razele egale.

2. Cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are aceeași rază cu cercurile date, deoarece $MO_1 = MO_2 = MO_3 = r$.

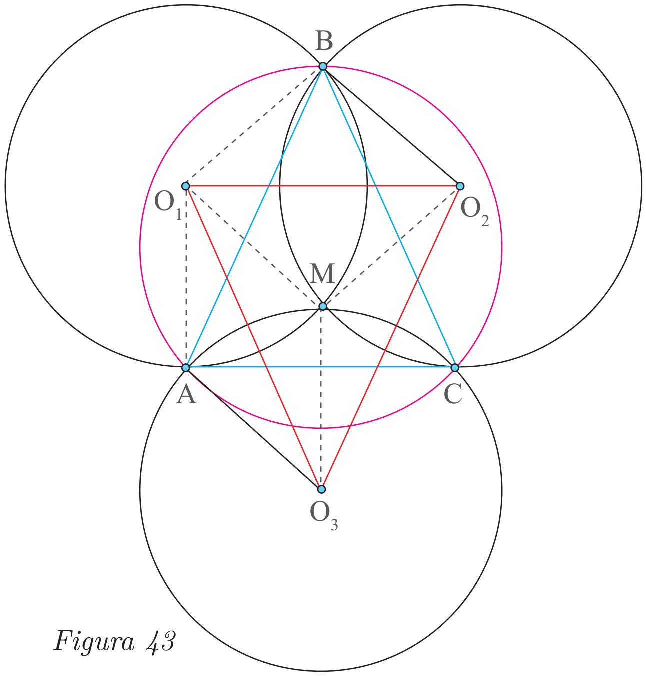


Figura 43

Vom arăta că $\triangle ABC \equiv \triangle O_2O_3O_1$.

În patrulaterul O_1MO_2B, avem $MO_1 = O_1B = BO_2 = O_2M = r$ de unde deducem că O_1MO_2B este romb și atunci $BO_2 \parallel MO_1$ (1).

În patrulaterul O_1MO_3A, avem $MO_1 = O_1A = AO_3 = O_3M = r$ de unde deducem că O_1MO_3A este romb și atunci $AO_3 \parallel MO_1$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $AO_3 \parallel BO_2$. Dar $AO_3 = BO_2 = r$ și deci AO_3O_2B este paralelogram, de unde $AB \equiv O_3O_2$ (3).

Analog, se demonstrează că $AC \equiv O_1O_2$ (4) și $BC \equiv O_1O_3$ (5).

Din (3), (4) și (5), conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle O_2O_3O_1$ și, din prima observație, deducem că cercul care trece prin punctele A, B, C are aceeași rază cu cercurile date.

Portofoliu

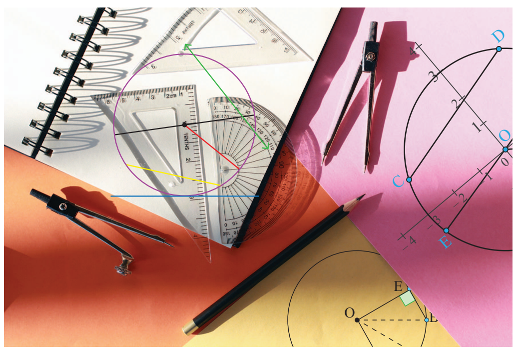
Prezintă portofoliul **Despre geometria cercului**.

Autoevaluare:

a) Portofoliul conține desenele/piesele recomandate?

b) Piesele/desenele respectă cerințele de realizare?

c) Aspectul portofoliului este îngrijit?



Teorema lui Thales

Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Observă și descoperă!

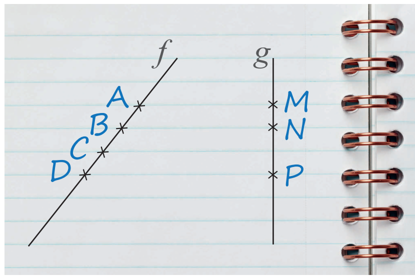


Figura 1

1. În lipsa unui caiet de matematică, Sara a folosit un caiet dictando. La un caiet dictando, distanța dintre oricare două linii consecutive este aceeași. Sara a desenat o dreaptă f și a marcat pe ea punctele A, B, C și D, ca în *Figura 1*. Victor desenează alături dreapta g și marchează pe ea punctele M, N și P.

a) Dacă $AB = 2$ cm, ce lungime are segmentul BC? Dar segmentul BD?

b) Cu cât este egal raportul dintre lungimea segmentului AB și lungimea segmentului BD?

c) Fără a cunoaște lungimile segmentelor MN și NP, poți spune cât este raportul acestor lungimi?

Important

• Numim **paralele echidistante** trei sau mai multe drepte paralele pentru care distanța dintre oricare două drepte consecutive este mereu aceeași.

Exemplu: Liniile caietului dictando sunt paralele echidistante. Liniile portativului din caietul de muzică sunt paralele echidistante.

• Paralelele echidistante determină pe o dreaptă care le intersectează segmente congruente.

Exemplu: În Figura 1, $AB \equiv BC \equiv CD$.

• Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele sunt paralele echidistante.

• Prin **raportul a două segmente** înțelegem raportul dintre lungimile celor două segmente măsurate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: Dacă $AB = 4$ *cm și* $CD = 12$ *cm, atunci raportul dintre segmentele* AB *și* CD *este* $\frac{AB}{CD} = \frac{4\ cm}{12\ cm} = \frac{1}{3}$ *(am simplificat prin 4 și prin cm).*

Să observăm că:

▷ Raportul a două segmente este un număr; nu depinde de unitatea de măsură.

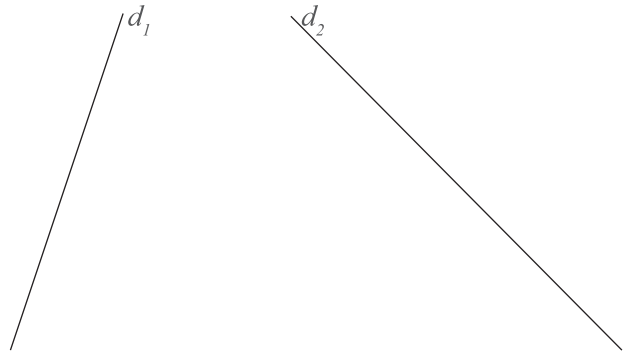
▷ Dacă $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ nu înseamnă că $AB = 2$ cm și $CD = 3$ cm. Putem spune $AB = 32$ cm și $CD = 48$ cm sau $AB = 2$ km și $CD = 3$ km. În general, avem $AB = 2k$ și $CD = 3k$, unde k este factorul prin care s-a simplificat.

• Numim **segmente proporționale** patru segmente cu lungimile cărora se poate forma o proporție.

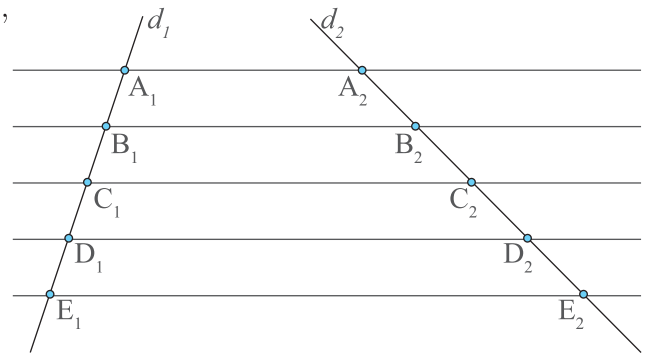
Exemplu: Se consideră segmentele $AB = 6$ *cm,* $CD = 8$ *cm,* $EF = 15$ *cm și* $GH = 20$ *cm. Numerele* 6, 8, 15 *și* 20 *sunt numere proporționale deoarece* $6 \cdot 20 = 8 \cdot 15$. *Atunci segmentele* AB, CD, EF *și* GH *sunt segmente proporționale. Putem forma, de exemplu, proporția* $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

• Putem construi patru segmente proporționale cu ajutorul paralelelor echidistante.

Construim dreptele d_1 și d_2.



Construim paralelele echidistante A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 și E_1E_2.



Acum putem alege ca segmente proporționale segmentele A_1B_1, B_1E_1, A_2B_2 și B_2E_2.

Avem $\frac{A_1B_1}{B_1E_1} = \frac{1}{3}$ și $\frac{A_2B_2}{B_2E_2} = \frac{1}{3}$, adică $\frac{A_1B_1}{B_1E_1} = \frac{A_2B_2}{B_2E_2}$.

Puteam alege segmentele A_1D_1, A_1E_1, A_2D_2, și A_2E_2 dar și alte segmente.

Exersează!

2. Știind că dreptele orizontale din *Figura 2* sunt paralele echidistante, determină valoarea următoarelor rapoarte:

a) $\frac{AE}{EF}$; b) $\frac{AE}{EB}$; c) $\frac{EF}{AB}$; d) $\frac{CH}{HG}$; e) $\frac{DG}{CG}$; f) $\frac{DC}{GH}$.

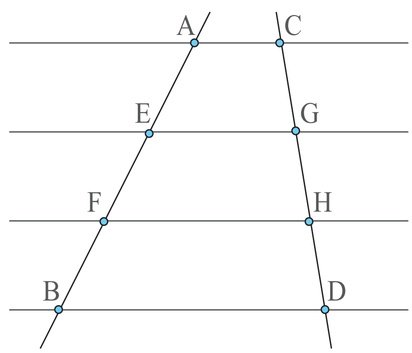


Figura 2

3. În *Figura 3*, dreptele d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 și d_6 sunt paralele echidistante, iar dreptele AD și MQ sunt secante. Folosindu-te de noțiunile învățate, verifică dacă următoarele relații sunt adevărate:

a) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MN}{PQ}$; b) $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{NP}{MQ}$; c) $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{NM}{MP+PQ}$;

d) $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{MQ}{NQ}$; e) $AB \cdot PQ = CD \cdot MN$; f) $AC \cdot MQ = BD \cdot NP$.

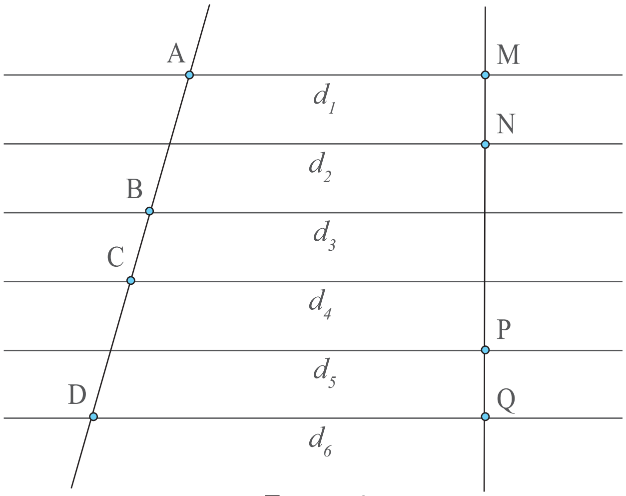


Figura 3

4. Știind că $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și d este o secantă, astfel încât $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$, $d \cap d_3 = \{C\}$ și $d \cap d_4 = \{D\}$, verifică dacă dreptele d_1, d_2, d_3 și d_4 sunt paralele echidistante, ţinând cont de informaţiile date, în fiecare caz:

a) $AB = 3$ cm, $BD = 6$ cm, iar C este mijlocul segmentului BD;

b) $AC = 2 \cdot AB$ și $BD = 2 \cdot CD$;

c) $AC = BD$ și $AC = 2 \cdot BC$.

5. Dacă dreptele orizontale sunt paralele echidistante şi $AM = PQ$, determină care dintre cele două trasee este mai lung, cel colorat cu roșu sau cel colorat cu galben, în fiecare dintre *Figurile 4-5*.

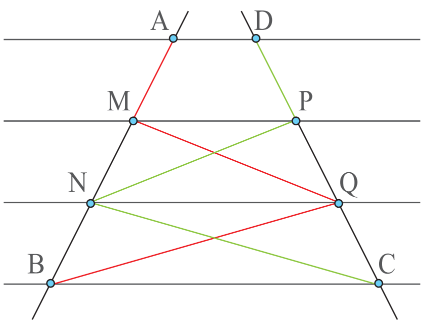


Figura 4

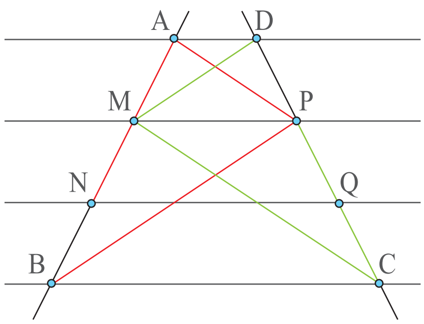


Figura 5

6. Se consideră $d \parallel e \parallel f$ și g o secantă astfel încât $g \cap d = \{A\}$, $g \cap e = \{B\}$ și $g \cap f = \{C\}$. Fie $BD \perp d, D \in d$ și $BE \perp f, E \in f$, precum în *Figura 6*. Folosește metoda triunghiurilor congruente pentru a arăta că dacă $BD = BE$, atunci $AB = BC$.

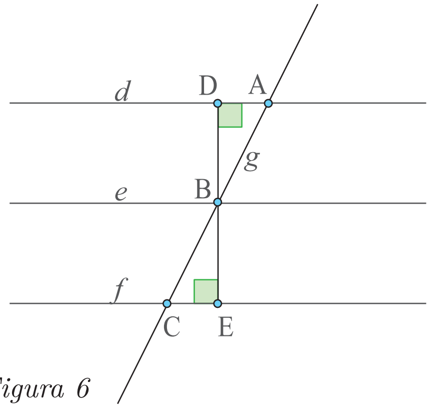


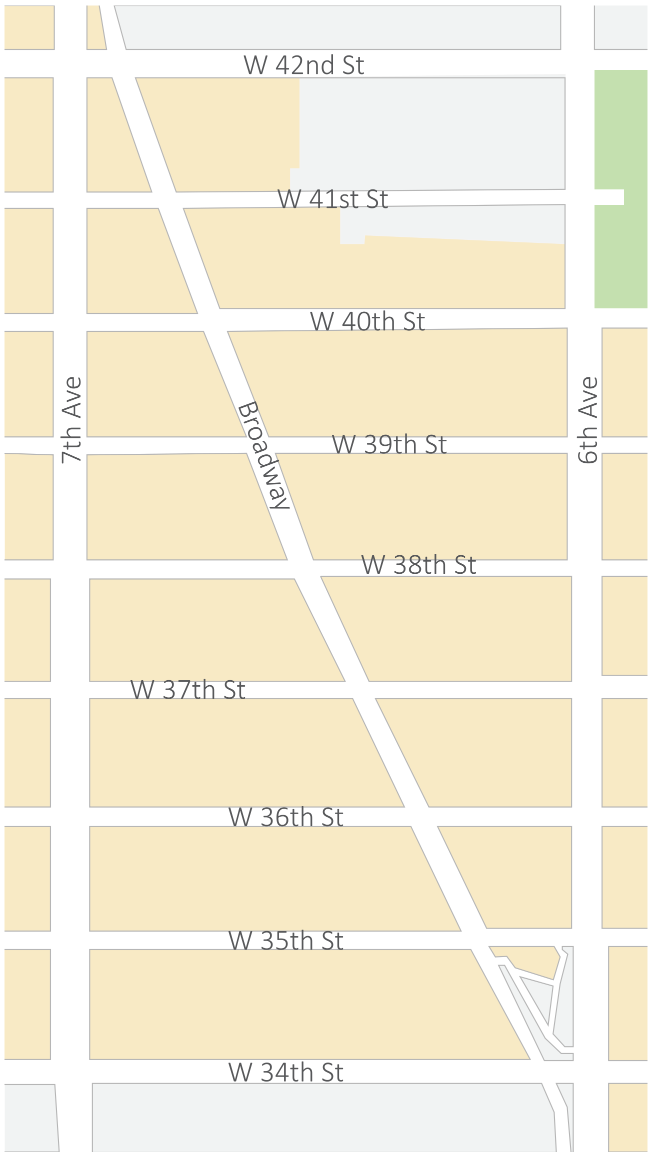
Figura 6

7. În *Imaginea 1*, este reprezentată o porțiune din harta cartierului West Manhattan a orașului New York din SUA. În imagine, apar străzi paralele echidistante, începând de la sud cu strada W 34th până în nord la strada W 42nd. Secantă cu toate aceste străzi este bulevardul Broadway, care este încadrat între bulevardele 7th Ave în vest și 6th Ave în est. Se mai cunoaște faptul că unghiul dintre orice stradă de tipul W și bulevardele 6th Ave, respectiv 7th Ave, este drept.

a) Ce poți spune despre cele 8 porțiuni ale bulevardului Broadway delimitate de străzile de tip W? Dar despre porțiunile din bulevardul Broadway și bulevardele 6th Ave și 7th Ave?

b) Notează acum cu N punctul care se află la intersecția dintre bulevardul 7th Ave și strada W 38th, cu Y punctul de la intersecția 6th Ave – W 38th, iar cu B_1, B_2, ..., B_9 punctele de la intersecțiile bulevardului Broadway cu străzile orizontale, începând cu W 34th, până la W 42nd. Dacă punctul B_5 este mijlocul străzii W 38th, demonstrează că patrulaterele NB_1YB_9, NB_2YB_8, NB_3YB_7 și NB_4YB_6 sunt paralelograme.

c) Dacă punctul T este la intersecția 7th Ave – W 42nd, iar punctul S la intersecția 6th Ave – W 34th, demonstrează că zona determinată de trapezul dreptunghic NTB_9B_5 are aceeași arie precum cea a zonei determinate de trapezul SYB_5B_1.



Imaginea 1 – Harta cartierului Manhattan

Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

Observă și descoperă!

Imaginea 2 – Un stâlp ancorat

1. *Imaginea 2* prezintă stâlpul AC susținut cu ajutorul unor ancore. Una dintre ele este AB. Din cauza uzurii, această ancoră trebuie schimbată, dar nimeni nu știe ce lungime are ancora AB.

Iată cum încearcă Victor să îl ajute pe tatăl său să determine lungimea ancorei! Măsoară distanța BC și găsește că este egală cu 4 m. La 1 m de punctul B, în punctul D înfige un țăruș și măsoară lungimea segmentului BE; o găsește de 2,5 m. Cu aceste date face o schiță pe o foaie de matematică, așa cum arată *Figura 7*.

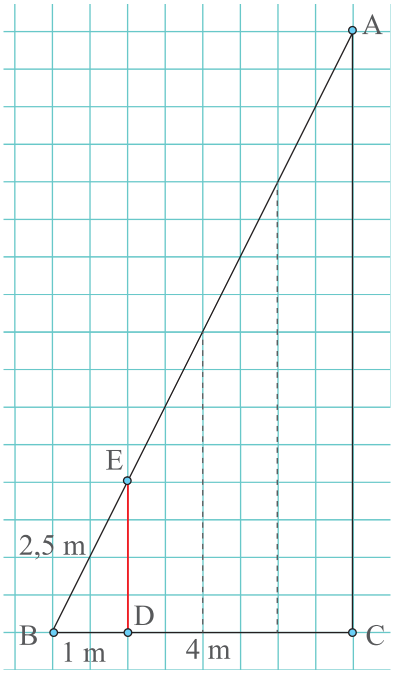
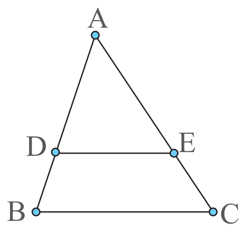


Figura 7

- Spune ce lungime are ancora AB, ținând cont de faptul că dreptele DE, AC și liniile punctate sunt paralele echidistante.

Important

- În orice triunghi, o paralelă la una dintre laturile triunghiului determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale (Teorema lui Thales).

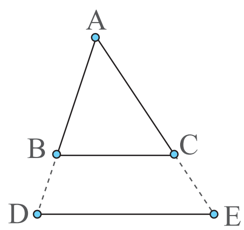


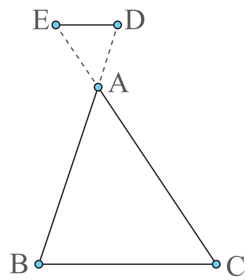
Cazul I. Paralela intersectează laturile.

$$DE \parallel BC \overset{\text{T.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Mai putem scrie $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ sau $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$.

Cazul II. Paralela intersectează prelungirile laturilor.





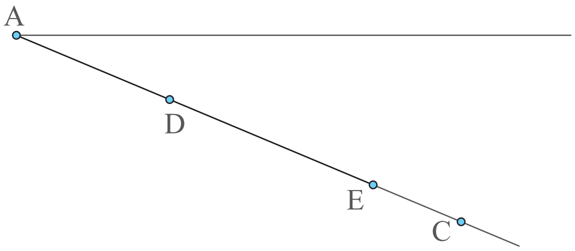
$$DE \parallel BC \overset{\text{T.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Mai putem scrie $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ sau $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$.

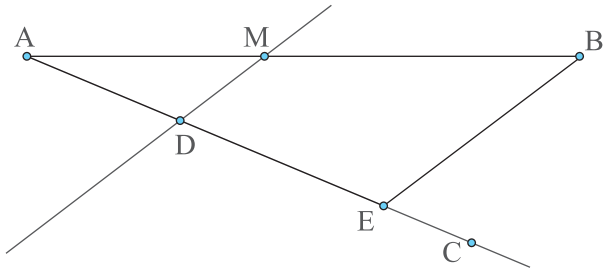
Exemplu: În Figura 7, în triunghiul ABC avem $DE \parallel AC$. Rezultă din teorema lui Thales $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{BA}$, adică $\dfrac{1}{4} = \dfrac{2,5}{BA}$, de unde $AB = 4 \cdot 2,5 = 10$ m.

• Cu ajutorul teoremei lui Thales putem împărți un segment în părți proporționale cu numere date.

Exemplu: Să împărțim un segment $AB = 10$ cm în două segmente AM și BM astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$. Procedăm astfel:



Construim semidreapta AC pe care luăm segmentele $AD = 3$ cm și $DE = 4$ cm.



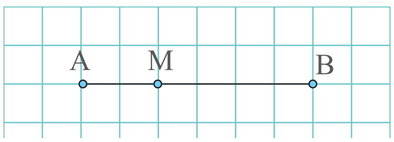
Unim punctele E și B. Paralela prin punctul D la EB intersectează segmentul AB în M punctul căutat.

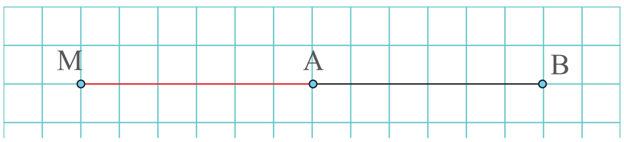
Justificare: În triunghiul ABE avem, $DM \| EB$.

Rezultă, din teorema lui Thales, că $\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DE}$. Dar $\frac{AD}{DE} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{4}$ și atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$.

• Punctul care împarte un segment în părți proporționale cu două numere date este unic în interiorul segmentului. Mai există un punct în exteriorul segmentului care are aceeași proprietate, de aceea este important să precizăm dacă punctul este situat pe segment sau pe dreapta suport, în exteriorul segmentului.

Exemplu: În ambele situații reprezentate în figura de mai jos, $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$, dar în primul caz punctul M este situat pe segment, iar în al doilea caz punctul M este situat pe dreapta suport, în exteriorul segmentului.



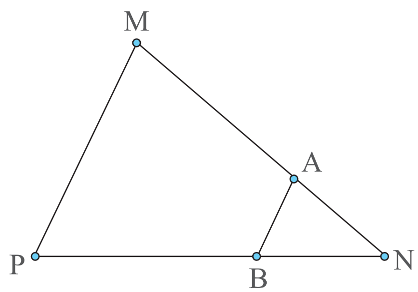


Exersează!

2. Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 48$ mm, $NP = 60$ mm și $MP = 24$ mm și punctele $A \in MN, B \in NP$ și $C \in MP$.

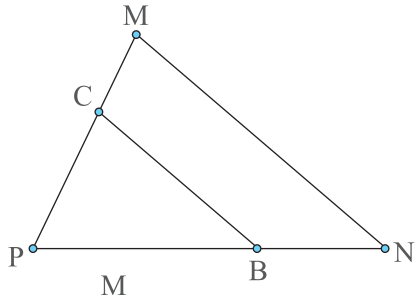
a) Dacă $AB \parallel MP$ și $AN = 16$ mm, determină lungimile segmentelor AM, BN și BP.

b) Dacă $AB \parallel MP$ și $BP = 10$ mm, determină lungimile segmentelor AN, AM și BN.



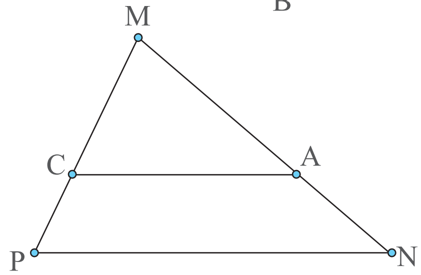
c) Dacă $BC \parallel MN$ și $BP = 24$ mm, determină lungimile segmentelor CP, CM și BN.

d) Dacă $BC \parallel MN$ și $CM = 18$ mm, determină lungimile segmentelor CP, BP și BN.



e) Dacă $AC \parallel NP$ și $AM = 2$ cm, determină lungimile segmentelor AN, CM și CP.

f) Dacă $AC \parallel NP$ și $CP = 2$ cm, determină lungimile segmentelor AM, AN și CM.



3. Împarte un segment cu lungimea de 11 cm în: a) 3 segmente congruente; b) 7 segmente congruente.

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB = 24$ mm și $AC = 32$ mm.

a) Dacă punctul M este în interiorul segmentului AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, iar punctul N este pe dreapta AC, astfel încât $MN \parallel BC$, determină lungimile segmentelor AM, BM, AN și CN.

b) Aceleași cerințe pentru cazul în care punctul M aparține dreptei AB, dar nu și segmentului AB.

5. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor. a) Demonstrează că $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Dacă $OA = 2x$, $OB = x - 4$, $OC = 16$ și $OD = 6$, determină valoarea lui x.

6. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD \cap BC = \{V\}$.

Demonstrează că $\frac{VD}{VA} = \frac{VC}{VB}$.

7. Pentru a rostogoli bolovanul din *Figura 8*, cu ajutorul unei bare metalice, se formează o pârghie. Pârghia este eficientă dacă raportul între lungimea ei până la punctul de sprijun (AS) și lungimea ei totală (AT) este $\frac{1}{3}$. Dacă punctul de sprijin (P) se află la 0,8 m de bolovan, la ce distanță de bolovan stă muncitorul care acționează pârghia?

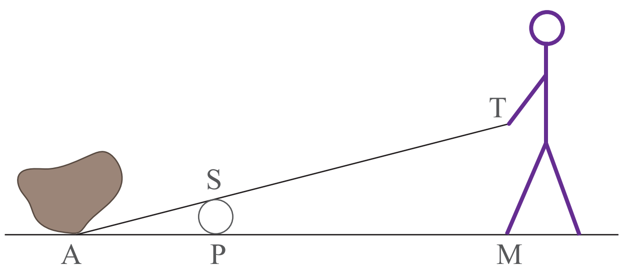


Figura 8

8. Se consideră triunghiul DEF și punctele $P \in DE$, $Q \in EF$ și $R \in DF$ astfel încât $PQ \parallel DF$ și $QR \parallel DE$. Demonstrează că $PD \cdot RD = RF \cdot PE$.

9. Știind că lungimea diagonalei unui pătrat este $l\sqrt{2}$, unde l reprezintă lungimea laturii pătratului, împarte un segment cu lungimea de $3\sqrt{2}$ cm în: a) 3 segmente congruente; b) 12 segmente congruente.

10. Se consideră triunghiul oarecare ABC și AD bisectoarea unghiului BAC, cu $D \in BC$. Paralela prin punctul B la AD intersectează dreapta AC în punctul E, ca în *Figura 9*.

a) Demonstrează că triunghiul ABE este isoscel cu $AB = AE$.

b) Aplică teorema lui Thales în triunghiul EBC și demonstrează că $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$.

c) Folosind rezultatele obținute anterior, verifică relația $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (*Teorema bisectoarei*).

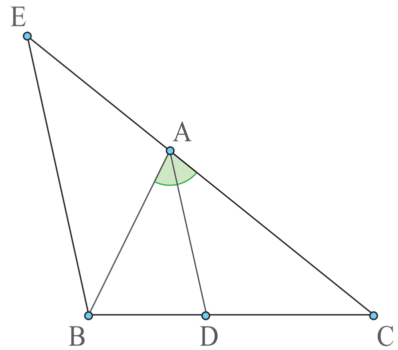


Figura 9

11. Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm și $CA = 24$ cm. Dacă AD este bisectoarea unghiului BAC, cu $D \in BC$, determină lungimile segmentelor BD și DC.

12. Se consideră triunghiul ABC, punctele $P \in AB$ și $Q \in AC$, astfel încât $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{CQ}{AQ} < 1$, M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC și $R \in AB$, astfel încât $RQ \parallel BC$, ca în *Figura 10*.

a) Arată că $BR = AP$, folosind teorema lui Thales.

b) Dacă $MN \cap PQ = \{S\}$, demonstrează că S este mijlocul segmentului PQ.

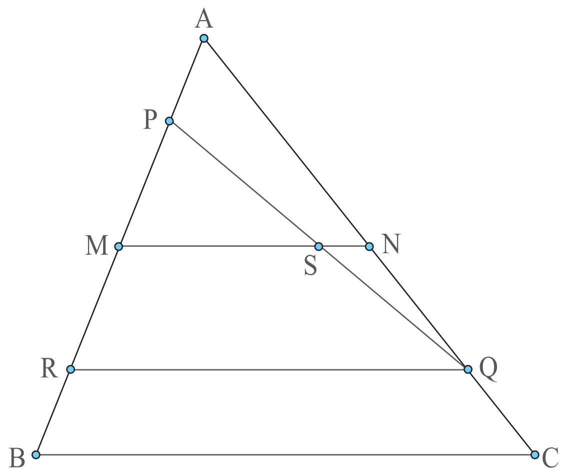


Figura 10

13. Se consideră triunghiul oarecare DEF și G centrul său de greutate. Dacă $GP \parallel DE$, $GQ \parallel EF$ și $GR \parallel DF$, cu $P \in EF$,$Q \in DF$ și $R \in DE$, arată că $\dfrac{DR}{RE} = \dfrac{EP}{PF} = \dfrac{FQ}{QD} = \dfrac{1}{2}$.

Reciproca teoremei lui Thales

Observă și descoperă!

1. Citește dialogul dintre cei doi copii, apoi răspunde la întrebări.

Sara: Știu de la Thales că dacă $DE \parallel BC$, atunci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$. Cum ar fi invers? Dacă $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, atunci $DE \parallel BC$.

Victor: Eu zic că nu este adevărat.

Sara: Bine, atunci eu construiesc prin punctul D o paralelă la BC care intersectează pe AC într-un punct F diferit de E, ca în *Figura 11*. Atunci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AF}{FC}$, dar cum $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ rezultă $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AE}{EC}$.

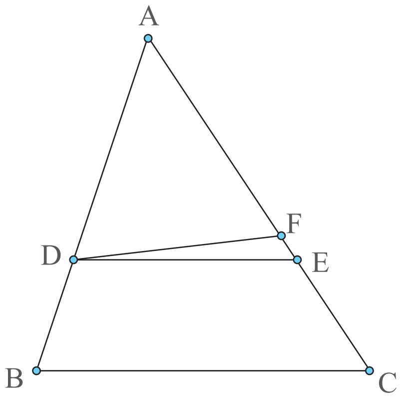


Figura 11

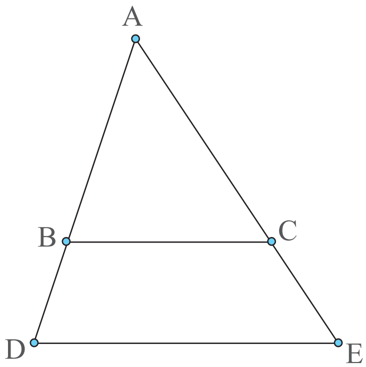
Victor: Asta înseamnă că există două puncte distincte pe segmentul AC care împart segmentul în același raport.

a) Este adevărată afirmația făcută de Victor?

b) Unde a greşit Victor?

Important

● Dacă o dreaptă determină pe două dintre laturile unui triunghi (sau pe prelungirile acestora) segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură. (Reciproca teoremei lui Thales).

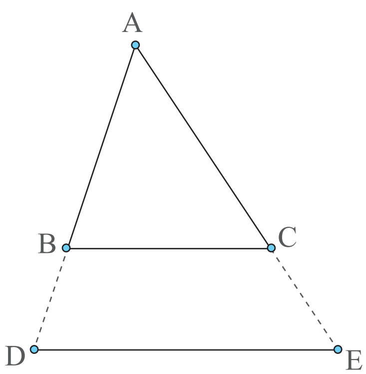


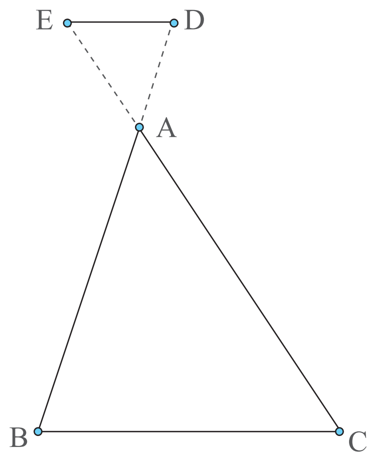
Dreapta intersectează prelungirile laturilor.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xRightarrow[\triangle ABC]{\text{R.Thales}} DE \parallel BC$$

Dreapta intersectează laturile.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xRightarrow[\triangle ABC]{\text{R.Thales}} DE \parallel BC$$





Exersează!

2. Se consideră triunghiul MNP, în care $MN = 30$ mm, $NP = 36$ mm și $MP = 24$ mm.

a) Dacă $A \in MN$, $B \in NP$ și $C \in MP$, astfel încât $AM = 5$ mm, $BN = 30$ mm, $CP = 4$ mm, arată că $AB \parallel MP$ și că $BC \parallel MN$.

b) Dacă $A \in (MN)$, $B \in (NP)$ și $C \in (MP)$, astfel încât $AM = 25$ mm, $BN = 30$ mm, $CM = 20$ mm, arată că $AC \parallel NP$ și că $BC \parallel MN$.

c) Dacă $A \in (MN)$, $B \in (NP)$ și $C \in (MP)$, astfel încât $AM = 5$ mm, $BN = 30$ mm, $CP = 20$ mm, arată că $AB \parallel MP$ și că $AC \parallel NP$.

3. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = 24$ cm, $AB = 42$ cm, $BC = 16$ cm și $CD = 20$ cm, reprezentat în *Figura 12*. Punctele M și P sunt situate pe latura AD, astfel încât $AM = 12$ cm și $DP = 18$ cm, iar punctele N și Q sunt pe latura BC, astfel încât $CN = 8$ cm și $BQ = 4$ cm.

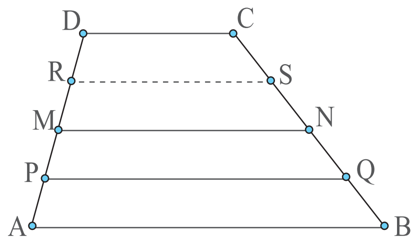


Figura 12

a) Arată că $MN \parallel AB$;

b) Demonstrează că $PQ \parallel AB$;

c) Calculează lungimea segmentului MN;

d) Calculează lungimea segmentului PQ;

e) Verifică dacă următoarele afirmații sunt adevărate: i) $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{1}{3}$; ii) $PQ = \dfrac{AB \cdot 3 + CD \cdot 1}{3+1}$.

f) Demonstrează că $RS = \dfrac{AB \cdot 1 + CD \cdot 3}{1+3}$, unde R este mijlocul segmentului DM, iar S este mijlocul segmentului CN.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și fie punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN$. Dacă punctul P este simetricul punctului N față de mijlocul segmentului AC, demonstrează că $MP \parallel BC$.

5. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și $BC = 25$ cm și punctele $M \in AB$, $N \in AC$ și $P, Q \in BC$, astfel încât $AM = 3$ cm, $CN = 16$ cm, $BP = 5$ cm și $BQ = 20$ cm, ca în *Figura 13*. Demonstrează că:

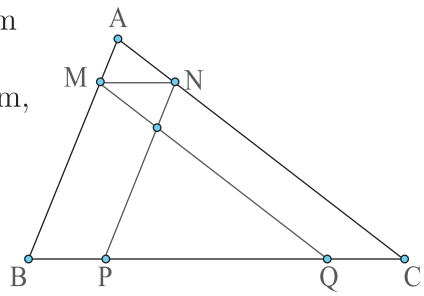


Figura 13

a) $MN \parallel BC$;

b) $MQ \parallel AC$;

c) $NP \parallel AB$;

d) dacă $MQ \cap NP = \{O\}$, atunci $ON \cdot OQ = OM \cdot OP$.

• Calculează acum lungimea segmentului PQ și verifică, în acest caz, relația $PQ = BC - 2 \cdot MN$. Ce valoare ai obține pentru lungimea segmentului PQ, dacă $AM = 7{,}5$ cm și $AN = 10$ cm?

• Ce se întâmplă cu punctele P, O și Q în acest caz? Justifică răspunsul dat!

6. Se consideră patrulaterul convex $MNPQ$ și punctele $A \in MN$, $B \in NP$, $C \in PQ$ și $D \in MQ$, astfel încât $\dfrac{AM}{MN} = 1 - \dfrac{BN}{NP} = \dfrac{CP}{PQ} = 1 - \dfrac{DQ}{MQ}$. Demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram.

Recapitulare

1. Dacă $ST = 30$ cm, iar $U \in ST$ astfel încât $\dfrac{US}{TU} = \dfrac{3}{2}$, ca în *Figura 14*, determină lungimile segmentelor US și UT pentru ambele poziții ale punctului U pe dreapta ST.

Figura 14

2. În *Figura 15* sunt patru drepte paralele echidistante și două secante oarecare. Determină valoarea rapoartelor:
a) $\dfrac{AB}{BD}$; b) $\dfrac{AC}{BD}$; c) $\dfrac{AD}{BC}$; d) $\dfrac{MN}{PQ}$; e) $\dfrac{NQ}{MN}$; f) $\dfrac{PN}{MQ}$.

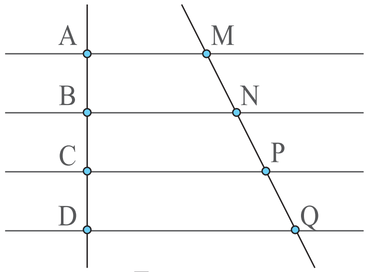


Figura 15

3. Se consideră triunghiul DEF, cu $DE = 40$ cm, $EF = 56$ cm și $DF = 24$ cm. Dacă $A, M \in DE$, astfel încât $AD = ME = 15$ cm, $B, N \in EF$, astfel încât $BE = FN = 21$ cm și $C, P \in DF$, astfel încât $CF = DP = 9$ cm, demonstrează că $AP \parallel EF$, $BM \parallel DF$ și $CN \parallel DE$.

4. Împarte un segment de 7 cm în: a) 3 segmente congruente; b) 5 segmente congruente; c) 7 segmente congruente; d) 14 segmente congruente; e) 11 segmente congruente.

5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, M un punct pe dreapta AB astfel încât $B \in AM$ și fie $CM \cap AD = \{N\}$. Demonstrează că: a) $\dfrac{MB}{BA} = \dfrac{MC}{CN}$; b) $\dfrac{ND}{DA} = \dfrac{NC}{CM}$; c) $\dfrac{MB}{BA} \cdot \dfrac{ND}{DA} = 1$; d) $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{MC}{MN}$; e) $\dfrac{ND}{AN} = \dfrac{CN}{MN}$; f) $\dfrac{MB}{AM} + \dfrac{ND}{AN} = 1$.

6. Se consideră dreptele $d \parallel e$ și dreptele a, b, c paralele echidistante cu proprietatea că $d \perp a$. Notăm $d \cap a = \{A\}$, $d \cap b = \{B\}$, $d \cap c = \{C\}$, $e \cap a = \left\{A'\right\}$, $e \cap b = \left\{B'\right\}$ și $e \cap c = \left\{C'\right\}$. a) Știind că punctele A,B și C sunt coliniare în această ordine ce poți spune despre lungimea segmentelor AB, BC, $A'B'$ și $B'C'$? b) Dacă, în plus, $AC' \cap A'C = \{O\}$, demonstrează că punctele B, O și B' sunt coliniare.

7. Se consideră paralelogramul $MNPQ$, punctul $A \in MN$, astfel încât $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{5}$ și punctul $B \in NP$, astfel încât $\dfrac{BN}{BP} = 2{,}5$. a) Arată că $AB \parallel MP$. b) Dacă $AB \cap NQ = \{C\}$ și $MP \cap NQ = \{O\}$, calculează valoarea raportului $\dfrac{NC}{CO}$. d) Determină valoarea raportului $\dfrac{NC}{CQ}$.

8. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AD$, $Q \in CD$, astfel încât $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$ și $PQ \parallel AC$, ca în *Figura 16*.
a) Demonstrează că $MQ \parallel AD$.
b) Dacă S este intersecția dreptelor MQ și NP, arată că punctul S aparține segmentului BD.

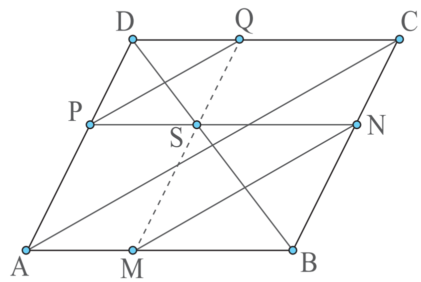


Figura 16

9. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, respectiv $N \in CD$, astfel încât $BM = DN$. Dacă punctele P și Q aparțin diagonalei AC, astfel încât $PM \perp AB$ și $QN \perp CD$, demonstrează că punctul P este simetricul punctului Q față de mijlocul segmentului AC.

Evaluare

10p din oficiu

10p **1.** Stabilește care dintre următoarele două afirmații este falsă și care este adevărată:

a) Raportul a două segmente depinde de unitatea de măsură.

b) Mai multe drepte paralele echidistante determină, pe o secantă oarecare, segmente congruente.

10p **2.** Alege varianta de răspuns corect: *Dacă* $AB = 40$ *cm și* C *aparţine segmenului* AB*, astfel încât* $\frac{CA}{CB} = \frac{5}{3}$*, atunci lungimea segmentului* CA *este egală cu:*

a) 5 cm; b) 25 cm; c) 100 cm; d) 15 cm.

10p **3.** Asociază fiecărui raport din coloana **A** raportul corespunzător din coloana **B**, știind că în *Figura 17* avem cinci drepte paralele echidistante, intersectate de două secante:

A	B
i) $\frac{AB}{BC}$	a) $\frac{MP}{NQ}$
ii) $\frac{AC}{BD}$	b) $\frac{MP}{PQ}$
iii) $\frac{BC}{CD}$	c) $\frac{NP}{MN}$
iv) $\frac{BC}{AB}$	d) $\frac{MN}{NP}$
	e) $\frac{NP}{PQ}$

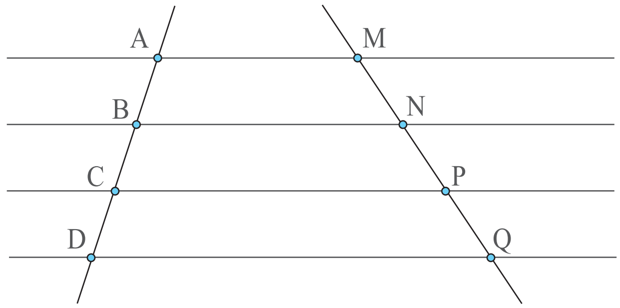


Figura 17

10p **4.** Completează spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă în triunghiul ABC avem $MN \parallel BC$, cu $M \in AB$ și $N \in AC$, $AM = 6$ cm, $AB = 24$ cm și $AC = 16$ cm, atunci $AN = \ldots$.

b) Dacă în triunghiul MNP avem $MN = 30$ cm, $MP = 25$ cm, $A \in MN$, astfel încât $AM = 6$ cm, $B, C \in MP$, astfel încât $BM = 20$ cm și $CP = 20$ cm, atunci $NP \parallel \ldots$.

10p **5.** Considerăm dreptele $d \parallel e \parallel f$ paralele echidistante și a și b două secante, astfel încât dreptele a, b și e sunt concurente în B.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului și notează cu A, respectiv C intersecțiile dreptei a cu dreptele d, respectiv f și cu D, respectiv E intersecțiile dreptei b cu dreptele d, respectiv f.

b) Scrie segmentele congruente care se obțin pe cele două secante.

6. Se consideră triunghiul MNP dreptunghic în M, $A \in MN$, $B \in NP$ și $C \in MP$ astfel încât $AB \parallel MP$ și $BC \parallel MN$.

10p a) Demonstrează că $ABCM$ este un dreptunghi.

10p b) Arată că $\frac{AN}{MN} + \frac{CP}{MP} = 1$.

7. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ și $N \in (BC)$, astfel încât $\frac{BN}{NC} = 3$.

10p a) Arată că $MN \parallel AC$.

10p b) Dacă $MN \cap BD = \{Q\}$, calculează $\frac{BQ}{QD}$.

Exersezi și progresezi

1. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Dacă punctele M și Q de pe latura AD sunt simetrice față de mijlocul laturii AD, iar punctele N și P de pe latura BC sunt simetrice față de mijlocul laturii BC, astfel încât $MN \parallel AB$, demonstrează că:

a) $PQ \parallel AB$;

b) linia mijlocie a trapezului $ABCD$ coincide cu linia mijlocie a trapezului $MNPQ$.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$, reprezentat în *Figura 18* și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$, astfel încât $\frac{AM}{BM} = \frac{BN}{CN} = \frac{CP}{DP} = \frac{DQ}{AQ}$.

a) Arată că $AM = CP$ și că $BN = DQ$.

b) Arată că $MNPQ$ este paralelogram.

Indiciu:
Demonstrează că mijlocul segmentului MP coincide cu mijlocul segmentului AC.

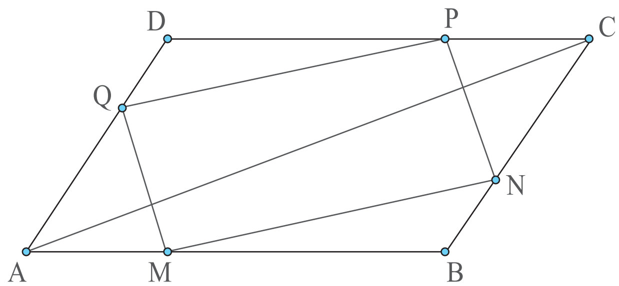


Figura 18

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CA$, astfel încât $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$ și $MP \parallel BC$. Demonstrează că punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor triunghiului.

4. În *Figura 19* este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$, O este punctul de intersecție a diagonalelor hexagonului și punctul M aparține laturii AB. Se consideră $N \in CD$ și $P \in EF$, astfel încât $MN \parallel BC$ și $MP \parallel AF$. Determină poziția punctului M pe latura AB, știind că $NP \parallel AB$.

Indiciu:
Consideră $\{S\} = AB \cap EF$, $\{T\} = CD \cap EF$ și $\{U\} = AB \cap CD$. Aplică apoi teorema lui Thales în triunghiurile SBE, TCF și UAD.

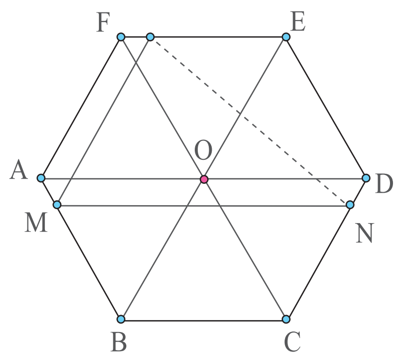


Figura 19

5. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi, $AB = L$ și $BC = l$ și $Q \in AC$. Avem $QM \perp AB$, $M \in AB$, $QN \perp CD$, $N \in CD$, $QS \perp BC$, $S \in BC$, $QT \perp AD$, $T \in AD$, ca în *Figura 20*.

Știind că $\dfrac{AM}{BM} = k$:

a) arată că $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{DN}{CN} = \dfrac{BS}{CS} = \dfrac{AT}{DT} = k$;

b) exprimă $\mathcal{A}_{AMQT}, \mathcal{A}_{MBSQ}, \mathcal{A}_{SCNQ}$ și $\mathcal{A}_{DNQT}$ în funcție de L, l și k. Ce relație există între $\mathcal{A}_{MBSQ}$ și $\mathcal{A}_{DNQT}$?

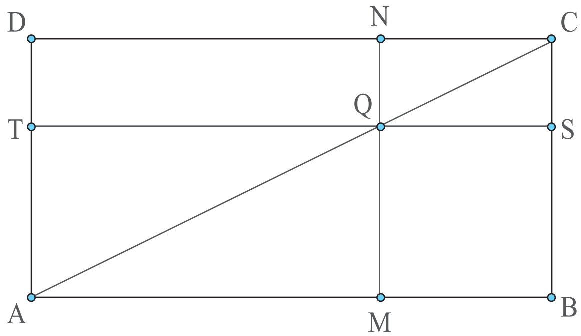


Figura 20

6. În *Figura 21* este reprezentat un triunghi oarecare, ABC și mediana AD, $D \in BC$. Se consideră $M \in AB$, $N \in AC$, astfel încât $MN \parallel BC$. Notăm $AD \cap MN = \{E\}$.

Demonstrează că E este mijlocul segmentului MN.

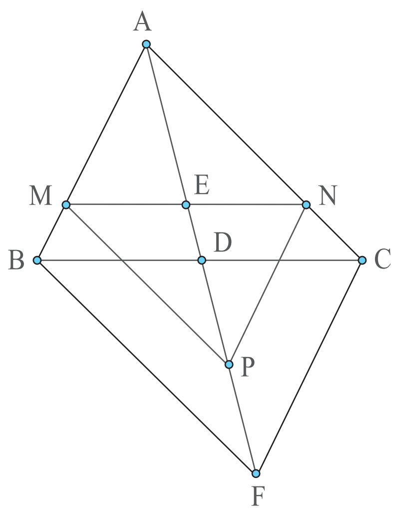


Figura 21

Indicii:

1. Consideră P simetricul lui A față de E, F simetricul lui A față de D.
2. Demonstrează că $ABFC$ este paralelogram.
3. Demonstrează că $\dfrac{AP}{PF} = \dfrac{AE}{ED}$.
4. Demonstrează că $NP \parallel AM$ și că $MP \parallel AN$.
5. Arată că $AMPN$ este paralelogram.

Asemănarea triunghiurilor

Unitatea 9

Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

Observă și descoperă!

1. În *Figura 1* și *Figura 2* sunt două reprezentări ale aceleiași persoane. Privește-le cu atenție și răspunde la întrebările de mai jos:

a) Dacă în *Figura 1* persoana are înălțimea de 6 cm, ce înălțime are în *Figura 2*?

b) Dacă în *Figura 2* unghiul dintre brațul drept și corp este de 90°, ce măsură are același unghi în *Figura 1*?

c) În *Figura 1*, capul se cuprinde în restul corpului de cinci ori. De câte ori se cuprinde capul în restul corpului, în *Figura 2*?

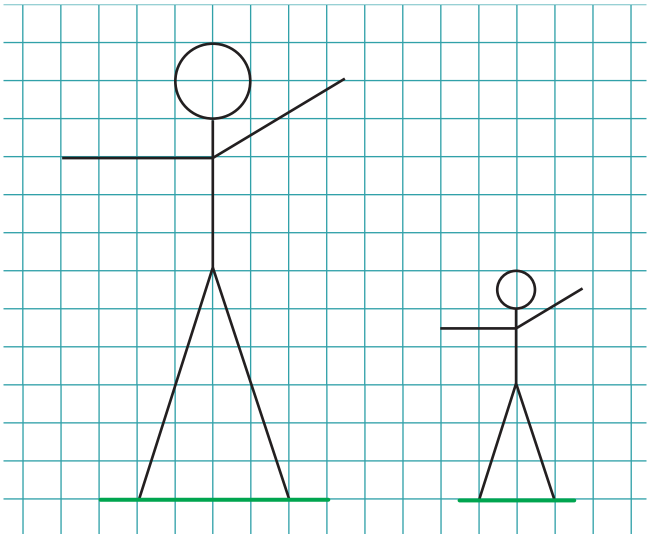


Figura 1 *Figura 2*

Important

• Două figuri se numesc asemenea dacă păstrează nemodificate măsurile unghiurilor și raportul dintre lungimile de același fel.

Exemplu: Persoana F_1 din *Figura 1* este asemenea cu persoana F_2 din *Figura 2*.

Scriu $F_1 \sim F_2$ citesc „F_1 este asemenea cu F_2".

• **Relația de asemănare este**

- **Reflexivă** $F_1 \sim F_1$,
- **Simetrică** Dacă $F_1 \sim F_2$, atunci $F_2 \sim F_1$,
- **Tranzitivă** Dacă $F_1 \sim F_2$ și $F_2 \sim F_3$, atunci $F_1 \sim F_3$.

• În două triunghiuri, numim **laturi omoloage** laturile care se opun unghiurilor congruente.

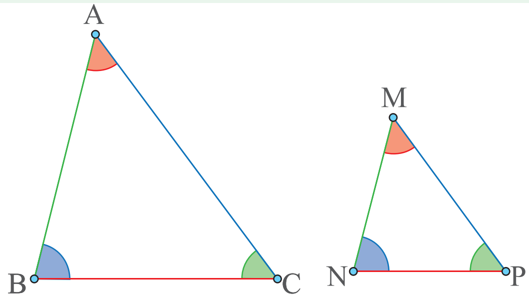
• Numim **triunghiuri asemenea** două triunghiuri care au unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage proporționale.

Exemplu:

Scriu: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

Citesc: triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul MNP.

Înțeleg: $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle NMP$; $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$; $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle NPM$; $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$.



De regulă, valoarea celor trei rapoarte se notează cu litera k și se numește **raport de asemănare**.

• Congruența triunghiurilor este un caz particular de asemănare; în cazul triunghiurilor congruente raportul de asemănare este egal cu 1.

Observă și descoperă!

2. Sara și Victor încearcă să construiască un triunghi asemenea cu triunghiul dat, ABC, din *Figura 3*. Urmărește dialogul dintre cei doi copii.

Victor: Îți propun să construim o dreaptă DE paralelă cu BC.

Sara: Ești convins că vei obține un triunghi asemenea cu triunghiul ABC?

Victor: Unghiul A este unghi comun.

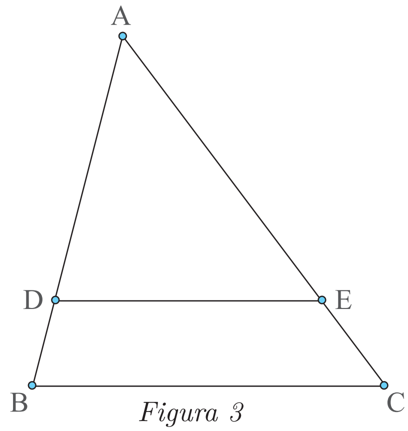


Figura 3

Răspunde la întrebările de mai jos, pentru a-i ajuta pe cei doi să verifice dacă triunghiurile sunt asemenea:

d) Care este motivul pentru care $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$?

e) Care este motivul pentru care $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$?

f) De unde deduc că $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$?

Sara: Până aici ne-au ajutat copiii. Cum arătăm că $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$?

Victor: Foarte simplu! Construim $EF \parallel AB$, ca în *Figura 4*. Din teorema lui Thales în triunghiul ABC, unde $EF \parallel AB$, avem $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$. Pe de altă parte, din $EF \parallel AB$ și $DE \parallel BC$, rezultă că patrulaterul $BFED$ este paralelogram și, prin urmare, $BF \equiv DE$ și, atunci, putem scrie $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$, adică $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

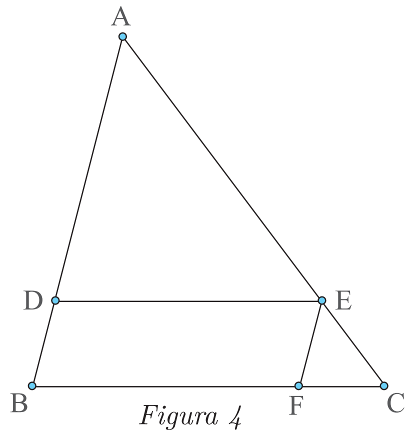


Figura 4

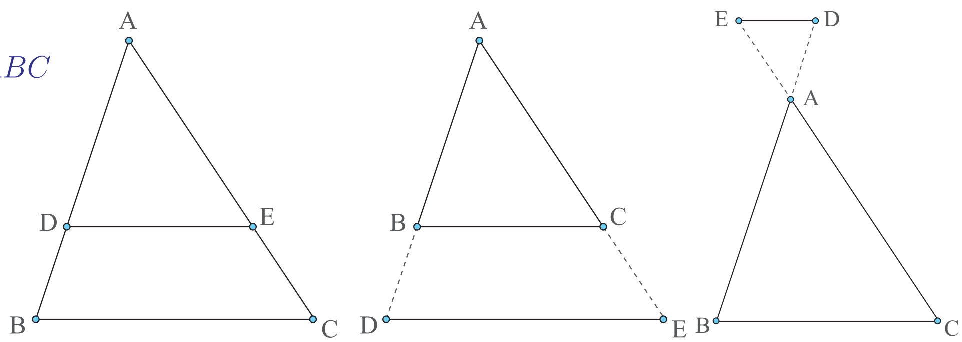
Sara: În concluzie, triunghiurile ABC și ADE au unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage proporționale. Așadar, sunt triunghiuri asemenea.

Important

• În orice triunghi, o paralelă la una dintre laturi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu triunghiul dat. (Teorema fundamentală a asemănării)

În toate cele trei cazuri

$DE \parallel BC \xRightarrow[\triangle ABC]{T.F.A} \triangle ADE \sim \triangle ABC$



Exersează!

3. Triunghirile ABC și MNP din *Figurile 5* și *6* sunt asemenea. Completează spațiile libere, pentru a obține propoziții adevărate:

a) Latura omoloagă laturii AB este latura ....

b) Latura omoloagă laturii NP este latura ....

c) Măsura unghiului N este egală cu ....

d) Măsura unghiului A este egală cu ....

e) $\dfrac{AB}{....} = \dfrac{....}{....} = \dfrac{....}{MP}$.

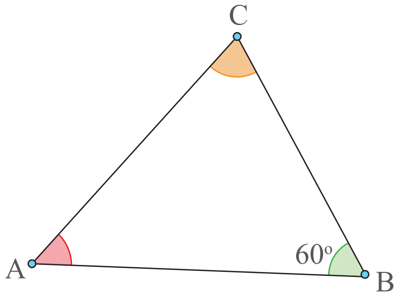


Figura 5

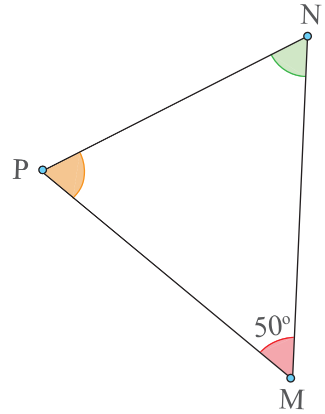


Figura 6

Portofoliu

4. Desenează un triunghi ABC, astfel încât $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $\sphericalangle B = 60°$. Desenează și notează alte triunghiuri, astfel încât raportul de asemănare dintre triunghiul ABC și fiecare dintre acestea să fie:

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{1}{4}$

- Așază desenele în portofoliul ***Despre geometria triunghiului***.

5. Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF. Determină lungimile laturilor triunghiului ABC, dacă $DE = 3$ cm, $EF = 5$ cm, $FD = 7$ cm și perimetrul triunghiului ABC este 45 cm.

6. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, $\sphericalangle P = 50°$ și $\sphericalangle C = 70°$, determină măsurile tuturor unghiurilor celor două triunghiuri.

7. Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF. Laturile triunghiului ABC au lungimile egale cu 6 cm, 8 cm, respectiv 10 cm. Determină perimetrul triunghiului DEF în următoarele cazuri:

a) cea mai mare latură a sa are lungimea de 15 cm.

b) cea mai mică latură măsoară 1,5 cm.

8. Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF. Raportul de asemănare dintre cele două triunghiuri este egal cu 3. Triunghiul DEF este asemenea cu triunghiul MNP. Raportul de asemănare dintre aceste triunghiuri este egal cu 2.

a) Triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea? Argumentează răspunsul dat.

b) Scrie valoarea fiecăruia dintre rapoartele: $\dfrac{AB}{DE}; \dfrac{DF}{AC}; \dfrac{EF}{NP}; \dfrac{MN}{DE}; \dfrac{AB}{MN}; \dfrac{NP}{BC}$.

9. Stabileşte dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate (**A**) sau false (**F**), ţinând cont de faptul că în *Figura 7* dreapta DE este paralelă cu latura BC a triunghiului ABC. În cazul în care afirmația este falsă, modifică relația, astfel încât să devină adevărată.

a) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$ b) $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{DE}{BC}$ c) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

d) $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ e) $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BC}{DE}$ f) $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$

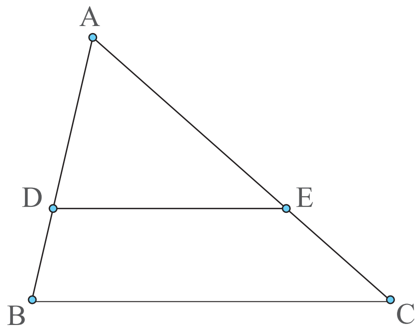


Figura 7

10. Determină valoarea lui x în fiecare caz din *Figurile 8 – 10*:

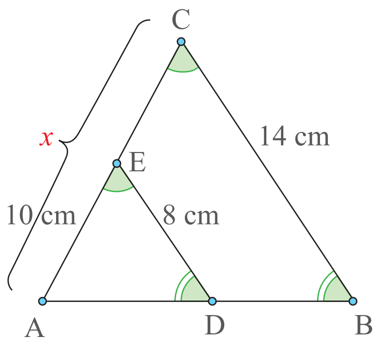
a)


Figura 8

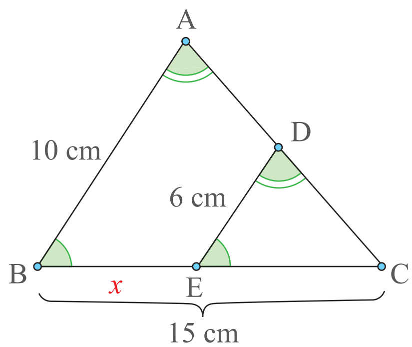
b)


Figura 9

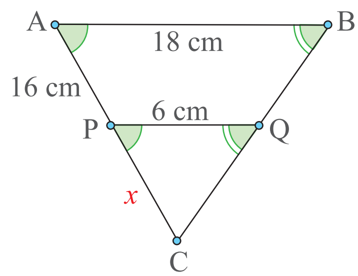
c)


Figura 10

11. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $DE||BC$.

a) Dacă $AD = 2$ cm, $DB = 6$ cm, $AE = DE = 3$ cm, calculează BC şi AC.

b) Dacă $BC = 5DE$, $AD = 3$ cm, $AE = 4$ cm, calculează perimetrul triunghiului ABC.

c) Dacă $AE = 4cm$, $AC = 6cm$, $AD = 5cm$, $BC = 6{,}75cm$, calculează DB şi DE.

Criterii de asemănare a triunghiurilor

Amintește-ți!

1. Citește dialogul dintre cei doi copii și răspunde la întrebare.

Sara: Oare, de fiecare dată când avem de dovedit că două triunghiuri sunt asemenea trebuie să folosim teorema fundamentală a asemănării?

Victor: Cu siguranță nu; nu totdeauna avem o paralelă la una dintre laturi.

Sara: Atunci folosim definiția?

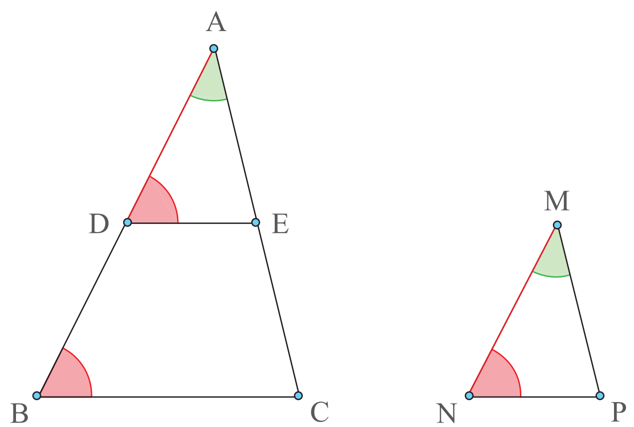
Victor: Bănuiesc că există și aici, așa cum se întâmplă la congruența triunghiurilor, niște criterii.

• Care erau cazurile de congruență pentru triunghiurile oarecare?

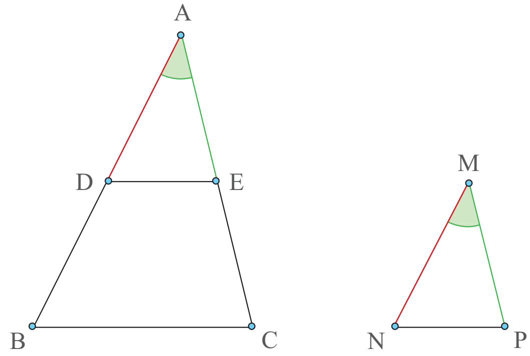
Important

• Criteriul UU: Dacă două triunghiuri au câte două perechi de unghiuri congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.

Ipoteză: $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$; $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle NMP$; $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$
Concluzie: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$
Demonstrație: Pe latura AB construim segmentul AD, astfel încât $AD \equiv MN$ și punctul E pe latura AC, astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle MNP$. Din $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle NMP$ (ipoteză), $AD \equiv MN$ (construcție) și $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle MNP$(construcție) $\overset{ULU}{\Rightarrow} \triangle ADE \equiv \triangle MNP$ (1).
Pe de altă parte, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle MNP$ (construcție) și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$ (ipoteză) implică $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ și cum acestea sunt unghiuri corespondente pentru dreptele DE și BC și secanta AB, rezultă $DE \parallel BC$.
Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (să nu uităm, congruența triunghiurilor este un caz particular de asemănare, iar relația de asemănare este tranzitivă).



• Criteriul LUL: Dacă două triunghiuri au câte o pereche de unghiuri congruente și laturile care formează acele unghiuri proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.



Ipoteză: $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$; $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle NMP$; $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MN}{MP}$

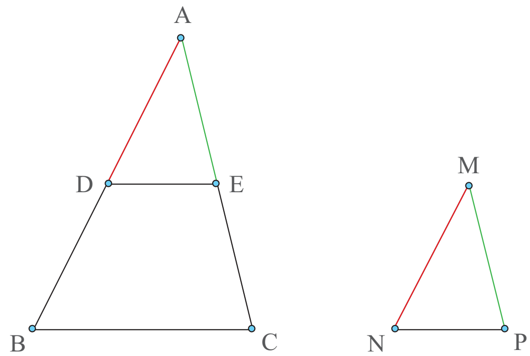
Concluzie: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

Demonstrație: Pe latura AB, construim segmentul AD, astfel încât $AD \equiv MN$ și pe latura AC, construim segmentul AE, astfel încât $AE \equiv MP$. Din $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle NMP$ (ipoteză), $AD \equiv MN$ (construcție) și $AE \equiv MP$ (construcție) $\overset{LUL}{\Rightarrow} \triangle ADE \equiv \triangle MNP$ (1)

Pe de altă parte, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MN}{MP}$ implică $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}$. Cum $AD \equiv MN$ (construcție) și $AE \equiv MP$ (construcție), rezultă $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ și atunci, din reciproca teoremei lui Thales, avem $DE \parallel BC$. Din teorema fundamentală a asemănării, obținem $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (să nu uităm, congruența triunghiurilor este un caz particular de asemănare, iar relația de asemănare este tranzitivă).

• Criteriul LLL: Dacă două triunghiuri au toate laturile proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.



Ipoteză: $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$; $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$

Concluzie: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

Demonstrație: Pe latura AB, construim segmentul AD, astfel încât $AD \equiv MN$ și pe latura AC, construim segmentul AE, astfel încât $AE \equiv MP$. Din $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{CA}{PM}$; $AD \equiv MN$ (construcție) și $AE \equiv MP$ (construcție), obținem $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CA}{AE}$ și atunci, din reciproca teoremei lui Thales, avem $DE \parallel BC$. Din teorema fundamentală a asemănării, obținem $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (1).

De aici, deducem că $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CA}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$. Cum $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$, $AD \equiv MN$ (construcție) și $AE \equiv MP$ (construcție), rezultă $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{BC}{NP}$, adică $DE \equiv NP$. Acum, din $AD \equiv MN$ (construcție), $AE \equiv MP$ (construcție) și $DE \equiv NP$ (demonstrație) $\overset{LLL}{\Rightarrow} \triangle ADE \equiv \triangle MNP$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (să nu uităm, congruența triunghiurilor este un caz particular de asemănare, iar relația de asemănare este tranzitivă).

Exersează!

2. Găseşte perechile de triunghiuri asemenea din *Figura 11* şi, pentru fiecare dintre ele, justifică de ce sunt asemenea.

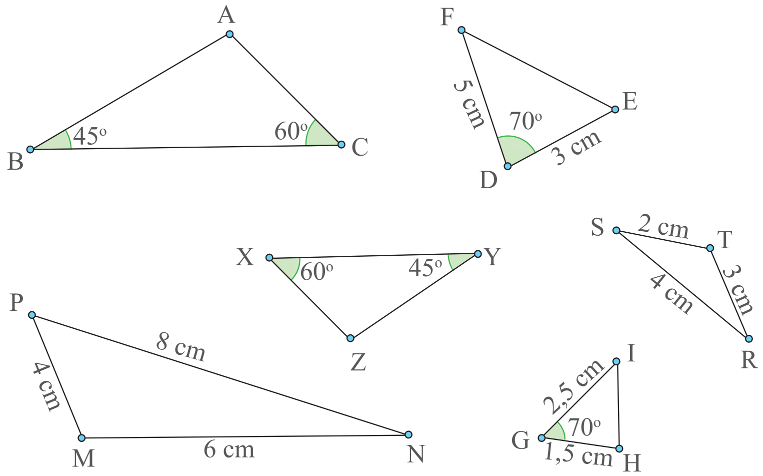


Figura 11

Portofoliu

3. Oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea? Dar oricare două triunghiuri isoscele? Dar dacă triunghiurile sunt dreptunghice isoscele? Argumentează răspunsurile date (eventual folosind un contraexemplu) şi realizează desene corespunzătoare pentru fiecare caz. Așază desenele în portofoliul ***Despre geometria triunghiului***.

4. Dreptele AB şi CD se intersectează în punctul O. În fiecare din situaţiile de mai jos, stabilește dacă triunghiurile ACO și BDO sunt asemenea şi scrie perechile de unghiuri congruente.

a) $AO = 3$ cm, $CO = 4$ cm, $BO = 9$ cm, $DO = 12$ cm

b) $AO = 3$ cm, $CO = 4$ cm, $DO = 9$ cm, $BO = 12$ cm

5. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului din *Figura 12* se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC$.

a) Demonstrează că $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

b) Dacă $BC = 15$ cm, $DE = 9$ cm, $AE = 6$ cm și $AC = 12$ cm, determină lungimile segmentelor AB și AD.

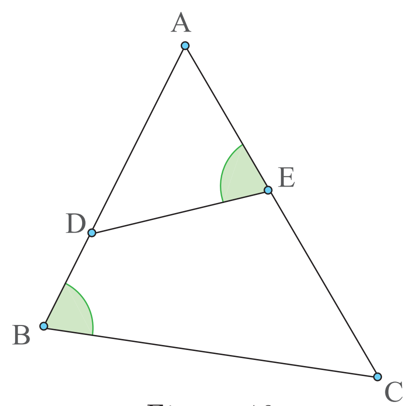
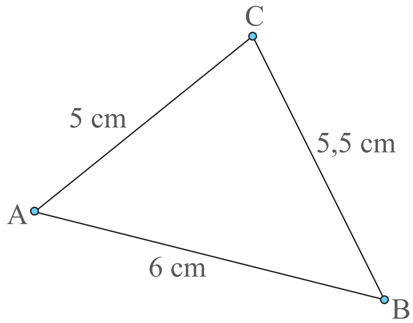


Figura 12

6. În *Imaginea 1* este prezentată schiţa unui teren.

a) Știind că desenul este realizat la scara 1:500, argumentează dacă triunghiul din schiță este asemenea cu triunghiul din realitate.

b) Care sunt dimensiunile triunghiului în realitate?



Imaginea 1

7. Se consideră triunghiul ABC, cu înălțimile AD, $D \in BC$ și BE, $E \in AC$. Arată că:

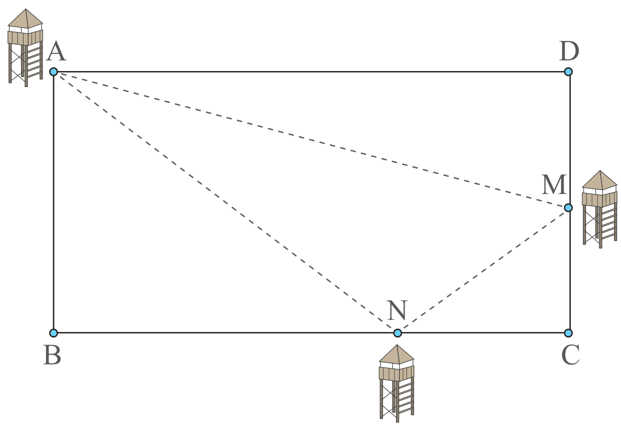
a) $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ b) $BC \cdot AD = AC \cdot BE$

8. În triunghiul isoscel DEF, $DE = DF$, se consideră bisectoarea EN, $N \in DF$. Ştiind că $\sphericalangle EDF = 36°$:

a) demonstrează că triunghiurile DEF şi ENF sunt asemenea;

b) arată că $EF^2 = FD \cdot FN$.

9. În *Imaginea 2* este schiţa curţii unui obiectiv securizat, cu $AD = 30$ m și $AB = 20$ m. În curte urmează să fie amplasate trei puncte de observaţie: unul în punctul A, al doilea la mijlocul M al laturii CD şi al treilea într-un punct N, situat pe latura BC. Unde trebuie fixat al treilea punct de observaţie, astfel încât lungimea drumului $A - N - M - A$ să fie minimă?



Imaginea 2

Indiciu: Punctele A şi M sunt deja fixate, deci porţiunea AM nu influenţează lungimea drumului. Construim simetricul punctului M față de punctul C.

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Aproximarea în situații practice a distanţelor folosind asemănarea

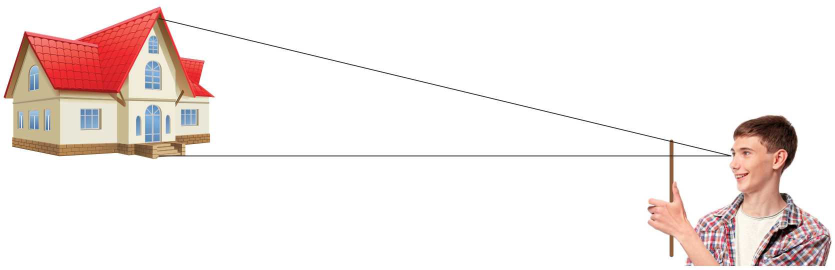
Observă și descoperă!

1. Sara și Victor au mers într-o excursie la munte. În momentul în care au văzut cabana, au dorit să știe ce distanță mai au de parcurs. Iată cum au procedat:

Sara: Observ că sunt trei rânduri de geamuri.

Victor: Asta înseamnă că sunt două etaje plus parterul. Cum un etaj are în jur de 3 metri înălțime, până la streașină sunt 9 metri.

Victor ia un băț și îl așază ca în *Imaginea 3*.



Imaginea 3. Victor măsoară distanța până la cabană

Sara: Brațul tău are aproximativ 50 de centimetri.

Victor: Iar lungimea bățului, de la capătul superior până la degetul meu mare, este de 2 cm.

Sara: Asta înseamnă, că până la cabană, mai avem aproximativ 225 de metri.

- Poți explica cum a aflat Sara distanța până la cabană?

Justificare: *Imaginea 3* poate fi schițată ca în *Figura 13*, unde AM este lungimea brațului, MN este lungimea bățului de la capătul superior până la degetul mare al lui Victor, BC este înălțimea cabanei până la streașină și AB este distanța până la cabană. Deoarece $MN \parallel BC$ rezultă, din teorema fundamentală a asemănării, că $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ și atunci, conform definiției triunghiurilor asemenea, $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BC}{MN} = \dfrac{AC}{AN}$. Rezultă $\dfrac{AB}{50\text{ cm}} = \dfrac{9\text{ m}}{2\text{ cm}}$, de unde $AB = \dfrac{(9\text{ m}) \times (50\text{ cm})}{2\text{ cm}} = 225\text{ m}$.

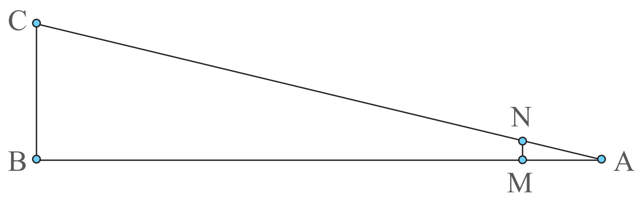
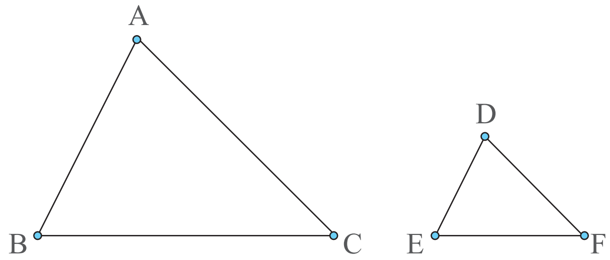


Figura 13

Important

- Folosind procedeul din problemele de mai sus, se poate afirma că:
  - Dacă cunoaștem înălțimea unui obiect, putem determina distanța până la acel obiect.
  - Dacă cunoaștem distanța până la obiect, putem determina înălțimea acelui obiect.

- Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci raportul perimetrelor celor două triunghiuri este egal cu raportul de asemănare.

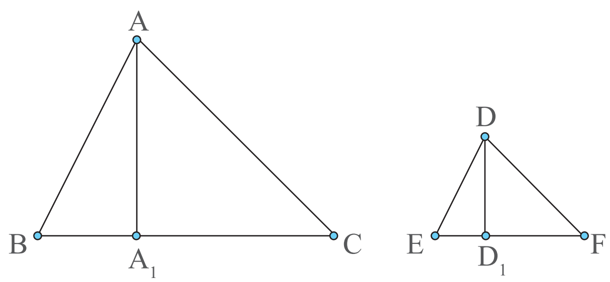


Justificare: $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = k$ și atunci $AB = k \cdot DE$, $BC = k \cdot EF$, $AC = k \cdot DF$. Acum $\dfrac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \dfrac{AB + BC + AC}{DE + EF + DF} = \dfrac{k \cdot DE + k \cdot EF + k \cdot DF}{DE + EF + DF} = \dfrac{k \cdot (DE + EF + DF)}{DE + EF + DF} = k$.

- Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Justificare: $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = k$ și atunci $AB = k \cdot DE$, $BC = k \cdot EF$, $AC = k \cdot DF$. Mai mult, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$. În cele două triunghiuri construim înălțimile $AA_1 \perp BC$ și $DD_1 \perp EF$. Obținem $\triangle ABA_1 \sim \triangle DED_1$ (sunt dreptunghice și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$), de unde rezultă $\dfrac{AA_1}{DD_1} = \dfrac{AB}{DE} = k$, adică $AA_1 = k \cdot DD_1$.

$$\text{Acum } \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{\dfrac{BC \cdot AA_1}{2}}{\dfrac{EF \cdot DD_1}{2}} = \frac{BC \cdot AA_1}{EF \cdot DD_1} = \frac{k \cdot EF \cdot k \cdot DD_1}{EF \cdot DD_1} = k^2.$$



Exersează!

Portofoliu

2. Pe o coală A4, desenează un triunghi. Împarte fiecare latură a triunghiului în n părţi egale. Uneşte punctele, astfel obţinute, ca în imagine ($n = 3$). Răspunde la următoarele întrebări:

a) Triunghiurile ABC şi ADE sunt asemenea? De ce?

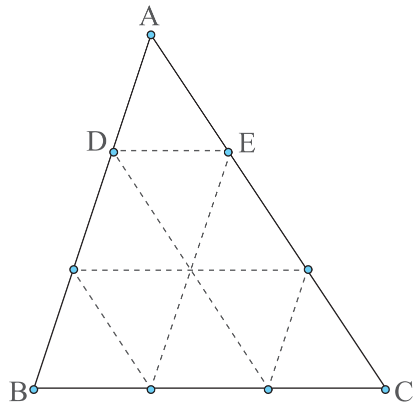
b) Care este raportul de asemănare al triunghiurilor ABC şi ADE?

c) Care este raportul dintre ariile triunghiurilor ABC şi ADE ?

d) Identifică încă trei triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC.

• Realizează un alt desen, pe câte o coală, şi răspunde la întrebările de mai sus, pentru fiecare din cazurile:

a) $n = 2$; b) $n = 4$; c) $n = 5$. Aşază desenele în portofoliul ***Despre geometria triunghiului***.



3. Triunghiurile ABC şi DEF sunt asemenea. Află valoarea raportului ariilor celor două triunghiuri dacă:

$$\text{a) } \frac{AB}{DE} = \frac{1}{2} \quad \text{b) } \frac{DF}{AC} = \frac{3}{2} \quad \text{c) } \frac{BC}{EF} = \frac{4}{5}.$$

4. Raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este 3. Cât este raportul ariilor?

5. Află valoarea raportului $\frac{AB}{MN}$, ştiind că triunghiurile ABC şi MNP sunt asemenea, în fiecare din cazurile:

$$\text{a) } \frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \frac{1}{4} \quad \text{b) } \frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \frac{4}{9} \quad \text{c) } \frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \frac{1}{16}.$$

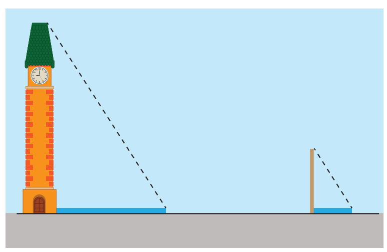
6. Pentru a vopsi o bucată de tablă sub formă de triunghi, sunt necesari 300 mililitri de vopsea. Ce cantitate de vopsea e necesară pentru a vopsi un triunghi care are laturile de patru ori mai mari decât triunghiul iniţial?

7. Triunghiurile ABC, DEF şi MNP sunt asemenea între ele. Dacă $\frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \frac{1}{9}$ şi $\frac{EF}{NP} = 5$, cu cât este egal raportul $\frac{DE}{AB}$?

8. Laturile neparalele AD şi BC ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Cu cât este egală aria trapezului, dacă $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm şi aria triunghiului EAB este egală cu 18 cm^2?

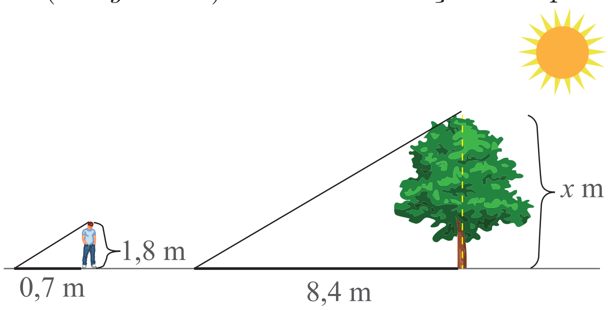
9. În *Imaginea 4* se observă un turn şi un băţ aşezat perpendicular pe sol. Lungimea băţului este de 2 metri, umbra lăsată de băţ are o lungime de un metru, iar cea lăsată de turn de 7 m. Care este înălţimea turnului?

Indiciu: Cum sunt cele două triunghiuri sugerate de *Imaginea 4*? De ce?



Imaginea 4

10. Un copac are umbra de 8,4 m, în timp ce o persoană cu înălţimea de 1,8 m are umbra de 0,7 m (*Imaginea 5*). Care este înălţimea copacului?



Imaginea 5. Copacul, omul și umbrele lor

Știați că...

Fractalul este o figură geometrică care poate fi divizată în părţi, astfel încât fiecare parte să fie o copie miniaturală a întregului. Unul dintre cele mai cunoscute modele de fractali este *Triunghiul lui Sierpinski, Figura 14*.

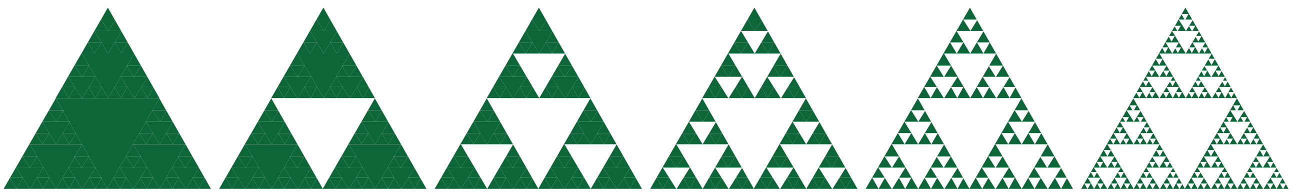


Figura 14

Acesta poate fi obţinut astfel: Pornim cu un triunghi echilateral. Trasăm liniile mijlocii. Obţinem, astfel, patru triunghiuri echilaterale. Cel din centru rămâne neschimbat. Pentru cele trei din colţuri repetăm acţiunile anterioare. Acest procedeu poate fi repetat la nesfârşit.

- Triunghiurile obţinute la Pasul 2 sunt asemenea cu triunghiul iniţial? Argumentează răspunsul dat. În caz afirmativ, care este raportul de asemănare? Dar raportul ariilor?
- Triunghiurile obţinute la Pasul 3 sunt asemenea cu triunghiurile de la Pasul 2?
- Triunghiurile obţinute la Pasul 3 sunt asemenea cu triunghiul iniţial?
- Care este raportul de asemănare dintre cel mai mic triunghi de la Pasul 4 şi triunghiul iniţial?
- Caută pe Internet imagini cu fractali. Ce obiecte din natură au o structură ce imită fractalii?

Portofoliu

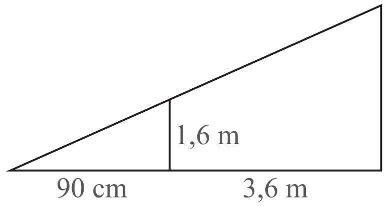
11. Realizează materiale care să includă:

- Stadiul care s-ar obţine la Pasul 8 al *Triunghiului lui Sierpinski* (conform descrierii de mai sus);
- Imagini sau obiecte din natură care prezintă fractali;
- Alte informaţii utile şi interesante despre fractali, sub formă de articol de revistă de popularizare a științei, Internet etc.

Așază materialele în portofoliul ***Despre geometria triunghiului***.

Recapitulare

1. O persoană cu înălţimea de 1,6 m stă în faţa unui stâlp de iluminat, la o distanţă de 3,6 m. Umbra persoanei are o lungime de 90 cm. Ce înălţime are turnul?



2. Vlad urcă o pantă a cărei diferenţă de altitudine este 270 m. Care este diferenţa de altitudine arătată de ceasul inteligent al lui Vlad, după ce el a parcurs o treime din distanţa pe care o avea de parcurs?

Observaţie: Prin diferenţă de altitudine înţelegem diferenţa dintre altitudinea punctului de sosire şi altitudinea punctului de plecare (distanţa pe verticală).

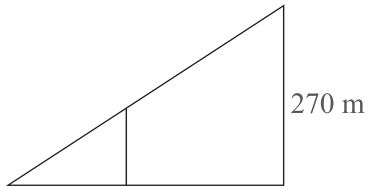


Figura 15

3. Când începe să urce o pantă, Maria vede semnul din *Figura 16*. Ce distanţă mai are de parcurs dacă, după ce a mers 100 m, a urcat 40 m de metri în altitudine?

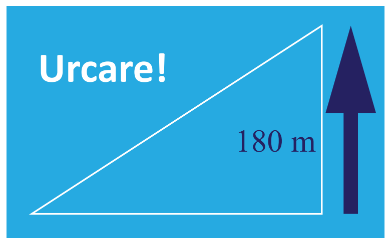


Figura 16

4. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC, se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $DE \parallel BC$. Ştiind că $AB = 12$ cm, $AD = 4$ cm şi $DE = 3$ cm, calculează lungimea laturii BC.

5. Arată că triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea în fiecare caz:

a) $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 4$ cm, $DE = 6$ cm, $EF = 9$ cm, $FD = 12$ cm;

b) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle F = 60°$, $\sphericalangle D = 40°$;

c) $\sphericalangle A = 80°$, $AB = 7$ cm, $AC = 6$ cm, $\sphericalangle E = 65°$, $\sphericalangle F = 35°$, $DE = 3{,}5$ cm, $DF = 3$ cm.

6. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, linia mijlocie MN intersectează diagonalele AC şi BD în punctele P, respectiv Q (*Figura 17*). Dacă $AB = 10$ cm şi $DC = 4$ cm, determină lungimile segmentelor MP, PQ şi QN.

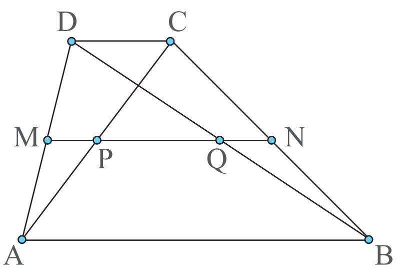


Figura 17

7. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ și O intersecția diagonalelor, se cunosc lungimile următoarelor segmente: $AB = 21$ cm, $CD = 14$ cm, $AC = 15$ cm, $BD = 18$ cm. Calculează lungimile segmentelor AO, CO, BO şi DO.

8. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC, se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{3}$, care este raportul dintre aria triunghiului ADE şi aria trapezului $BCED$?

9. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ şi punctul E, situat pe latura AB, astfel încât $\sphericalangle AED = \sphericalangle ECB = 40°$. a) Determină măsura unghiului DEC. b) Dacă $AD = 30$ cm şi $BE = 35$ cm, calculează aria dreptunghiului.

10. În *Figura 18*, $ABCD$ este un paralelogram. Se dau $AD = 12$ cm, punctul P pe latura BC, astfel încât $BP = 8$ cm, punctul E intersecția dreptelor AP și DC și punctul N intersecția diagonalei BD cu dreapta AP. Calculează valoarea rapoartelor: $\dfrac{AP}{PE}, \dfrac{DC}{CE}, \dfrac{AB}{DE}, \dfrac{NP}{AN}, \dfrac{BN}{BD}$.

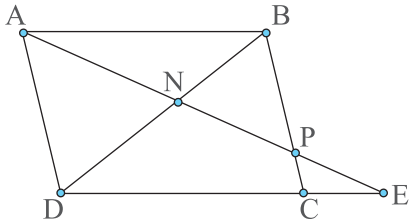


Figura 18

11. Triunghiurile ABC, DEF şi MNP sunt asemenea între ele. Dacă $\dfrac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = 4$ şi $\dfrac{A_{DEF}}{A_{MNP}} = \dfrac{1}{9}$, cu cât este egal raportul $\dfrac{MN}{AB}$?

12. În *Figura 19* $ABCD$, $CDEF$ şi $DEGH$ sunt pătrate.

a) Calculează: $\dfrac{AP}{AF}$ şi $\dfrac{BM}{MG}$.

b) Arată că $AP \cdot MG = AF \cdot BM$.

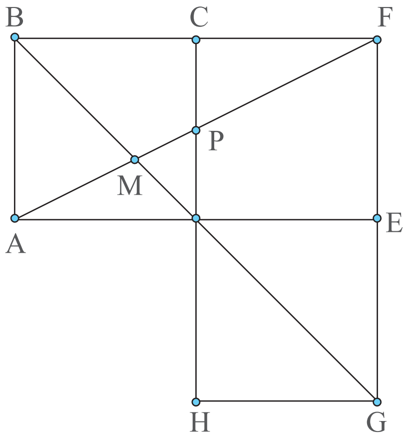


Figura 19

13. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, se consideră M şi N mijloacele laturilor AB şi CD. Arată că $EF \parallel AB$, unde E este punctul de intersecţie a dreptelor AN şi DM, iar F este punctul de intersecţie a dreptelor CM şi BN.

14. Triunghiul ABC este isoscel $AB = AC$, AD şi BE sunt înălţimi ($D \in BC$ şi $E \in AC$), iar H este ortocentrul triunghiului.

Demonstrează că $DC^2 = DH \cdot DA$ şi $BE \cdot AC = AD \cdot BC$.

15. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice ABC și ACD, astfel încât dreapta AC separă punctele B și D. Notăm G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD, respectiv ABD.

a) Demonstrează că triunghiul determinat de cele trei centre de greutate este asemenea cu triunghiul determinat de mijloacele segmentelor BC, CD și BD.

b) Dacă aria triunghiului BCD este egală cu 72 cm^2, determină aria triunghiului $G_1G_2G_3$.

Evaluare

10p Oficiu

1. Se consideră $\triangle MNP \sim \triangle ABC$, $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $MP = 50$ cm, iar raportul de asemănare este $k = \dfrac{5}{2}$.

Uneşte fiecare element din coloana **A** cu mărimea corespunzătoare din coloana **B**:

	A	**B**
2,5p	1. MN	a. 30 cm
2,5p	2. NP	b. 60 cm
2,5p	3. AC	c. 42 cm
2,5p	4. $P_{\triangle ABC}$	d. 25 cm
		e. 20 cm

2. Completează spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate: În triunghiul ABC, $MP \parallel BC$, $M \in AB$ și $P \in AC$. Dacă $AB = 18$ cm, $PC = 4$ cm, $AC = 12$ cm, $MP = 10$ cm, atunci

5p a) $MB = \ldots$ cm

5p b) $P_{\triangle AMP} = \ldots$ cm

3. Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:

5p a) Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci raportul perimetrelor celor două triunghiuri este egal cu pătratul raportului de asemănare. (...)

5p b) Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respective proporționale (...)

10p **4.** Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ şi $AB = 12$ cm, $DC = 6$ cm. Dacă $AC = 9$ cm, $BD = 12$ cm şi O este intersecția diagonalelor, atunci lungimea segmentului OD este egală cu :

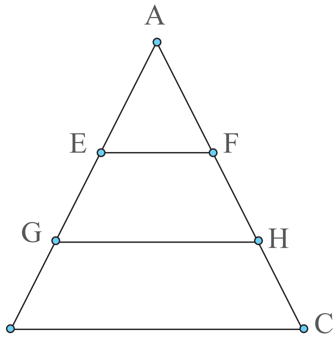
A. 6 cm B. 8 cm C. 4 cm D. 3 cm

10p **5.** Se consideră $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ și $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{1}{3}$. Știind că $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm, calculează aria triunghiului DEF.

6. În figura alăturată, $EF \parallel GH$ și $AE = EG = GB$. Dacă aria triunghiului ABC este egală cu 27 cm^2, se cere:

10p a) Aria triunghiului AEF;

10p b) Aria trapezului $EFHG$.



7. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 19$ cm și $BC = 15$ cm, se consideră punctul E pe latura AB, astfel încât $AE = 10$ cm. Perpendiculara în E pe dreapta DE intersectează latura BC în punctul F.

10p a) Arată că $\triangle DAE \sim \triangle EBF$.

10p b) Determină lungimea segmentului BF.

Exersezi și progresezi

1. Scrie propoziţiile pe caiet şi completează spaţiile punctate, pentru a obţine afirmaţii adevărate:

a) Două triunghiuri asemenea au unghiurile ....

b) Două triunghiuri asemenea au laturile.................. .

c) Dacă raportul laturilor a două triunghiuri asemenea este egal cu $\frac{2}{3}$, atunci raportul ariilor triunghiurilor este egal cu .... .

2. Laturile triunghiurilor ABC şi DEF respectă relaţia: $\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{FD}$.

a) Stabilește dacă cele două triunghiuri sunt asemenea.

b) Care sunt congruenţele de unghiuri din cele două triunghiuri?

Portofoliu

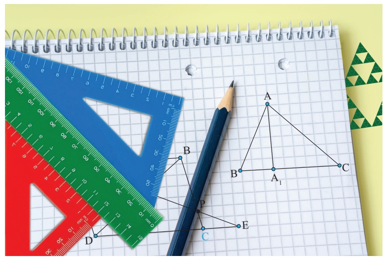
3. Prezintă portofoliul ***Despre geometria triunghiului***.

Autoevaluare:

a) Portofoliul conține desenele/piesele recomandate?

b) Piesele/desenele respectă cerințele de realizare?

c) Aspectul portofoliului este îngrijit?



4. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $MN \parallel BC$. Folosind informaţii din *Figurile 20 – 21*, determină lungimile segmentelor indicate:

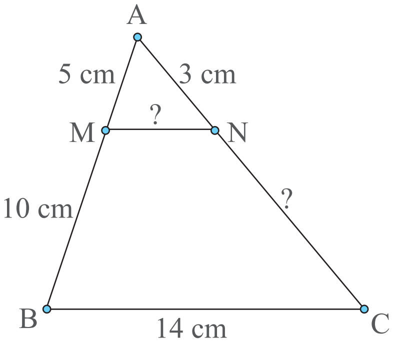


Figura 20

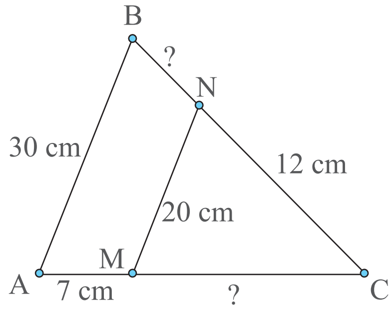


Figura 21

5. Se consideră triunghiul ABC şi D un punct pe latura BC, astfel încât $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se arate că AD trece prin mijlocul medianei CM $(M \in AB)$.

6. În exteriorul triunghiului echilateral ABC, se construiesc pătratele $ABEF$, $BCGH$, și $ACIJ$. Notăm O_1 centrul pătratului $ABEF$, O_2 centrul pătratului $BCGH$ și O_3 centrul pătratului $ACIJ$.

a) Calculează măsura unghiului O_1O_2C.

b) Arată că $O_1O_2 \parallel AC$.

c) Demonstrează că $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$.

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Unitatea **10**

Proiecţii ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălţimii. Teorema catetei

Umbra unei persoane este o proiecție realizată cu ajutorul Soarelui.

Observă și descoperă!

1. Citește dialogul dintre cei doi copii.

Victor: Ce vrea să însemne această imagine?
Sara: Este un joc interesant. Cu ajutorul mâinilor, folosind o sursă de lumină, pot forma imagini ale unor păsări sau animale. Sursa de lumină proiectează mâinile pe perete.
Victor: Adică facem o proiecție așa cum se întâmplă și la cinematograf?
Sara: Întocmai.
Victor: Și ce legătură are asta cu geometria?
Sara: Ai puțintică răbdare!

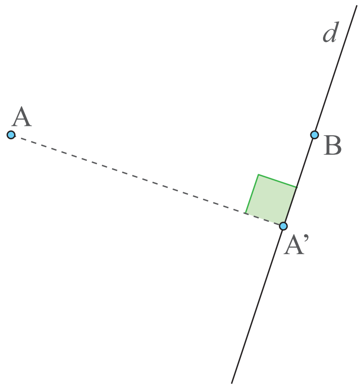
2. Caută pe Internet și alte imagini care să te ajute să formezi diferite animale pe perete.

Important

• **Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă** este punctul în care perpendiculara din acel punct pe dreaptă intersectează dreapta.

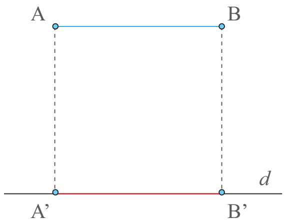
Punctul A este exterior dreptei d. Dacă $AA' \perp d$ ($A' \in d$), atunci punctul A' este proiecția punctului A pe dreapta d. Scriu $A' = \text{pr}_d A$.

Punctul B este pe dreapta d. Proiecția punctului B pe dreapta d este chiar punctul B. Scriu $B = \text{pr}_d B$.

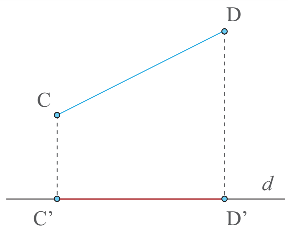


• **Proiecția unui segment pe o dreaptă** înseamnă proiecția tuturor punctelor segmentului pe acea dreaptă.

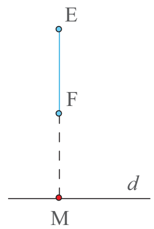
• Pentru a obține proiecția unui segment pe o dreaptă se proiectează, pe acea dreaptă, numai extremitățile segmentului, iar segmentul determinat de proiecțiile pe dreaptă ale extremităților segmentului inițial este proiecția segmentului pe dreaptă.



$A'B' = \text{pr}_d AB$
$L_{\text{proiecție}} = L_{\text{segment}}$



$C'D' = \text{pr}_d CD$
$L_{\text{proiecție}} < L_{\text{segment}}$



$M = \text{pr}_d EF$
$L_{\text{proiecție}} = 0$

Observă și descoperă!

3. Sara are de rezolvat următoarea problemă: *Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) în care AD este înălțime ($D \in BC$), ca în Figura 1. Demonstrați: a) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$; b) $AB^2 = BC \cdot BD$; c) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; d) $AC^2 = BC \cdot CD$; e) $\triangle DAC \sim \triangle DBA$; f) $AD^2 = BD \cdot CD$.*

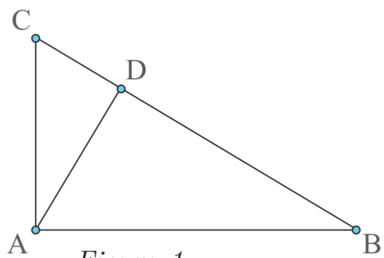


Figura 1

Ipoteză: $\triangle$ABC ($\sphericalangle A = 90°$); $AD \perp BC$

Concluzie: a) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$; b) $AB^2 = BC \cdot BD$; c) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; d) $AC^2 = BC \cdot CD$; e) $\triangle DAC \sim \triangle DBA$; f) $AD^2 = BD \cdot CD$.

Observă cum rezolvă Sara cerințele *a)* și *b)*.

Cum gândește	**Cum scrie**
Cele două triunghiuri sunt dreptunghice și au unghiul din B comun, prin urmare sunt triunghiuri asemenea.	*a)* În $\triangle ABC$ și $\triangle DBA$ avem, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADB$ ($= 90°$); $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DBA$(unghi comun). Rezultă $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.
Relația $AB^2 = BC \cdot BD$ se poate scrie și așa $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB}$. Dacă cele două triunghiuri sunt asemenea, atunci laturile lor sunt proporționale.	*b)* $\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}$. De aici $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot DB$.

4. Urmărește cu atenție raționamentul Sarei și rezolvă cerințele *c)* și *d)*.

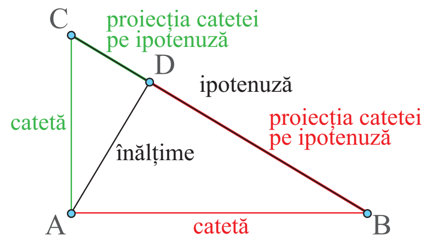
Cum rezolvă Sara cerința *e)*.

Cum gândește	**Cum scrie**
La cerințele *a)* și *c)* același triunghi ABC este asemenea și cu triunghiul DBA și cu triunghiul DAC. Înseamnă că cele două triunghiuri sunt asemenea, deoarece relația de asemănare este tranzitivă.	*e)* $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ (din punctul } a))\\ \triangle ABC \sim \triangle DAC \text{ (din punctul } c))\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle DBA \sim \triangle DAC$

5. Rezolvă cerința *f)*.

Important

• Elementele unui triunghi dreptunghic pot fi denumite ca în figura alăturată.



• **În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii unei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției sale pe ipotenuză (Teorema catetei).**

$(\text{catetă})^2 = (\text{ipotenuză}) \cdot \left(\text{pr}_{\text{ipotenuză}}(\text{catetă})\right)$

$AB^2 = BC \cdot BD$ și $AC^2 = BC \cdot CD$

• **În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii înălțimii este egal cu produsul dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză (Teorema înălțimii).**

$(\text{înălțime})^2 = \left(\text{pr}_{\text{ipotenuză}}(\text{catetă})\right) \cdot \left(\text{pr}_{\text{ipotenuză}}(\text{catetă})\right)$ $\quad AD^2 = BD \cdot CD$

Exersează!

6. În *Figura 2*, avem $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Care este proiecția punctului A pe dreapta BC? Dar pe dreapta CA?

b) Care este proiecția punctului C pe dreapta AD?

c) Care este proiecția laturii AB pe dreapta BC? Dar proiecția segmentului AC pe dreapta AD?

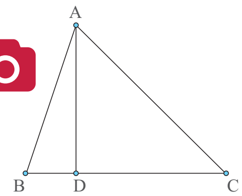


Figura 2

7. Desenează un triunghi MNP și construiește proiecția punctului N pe dreapta MP și proiecția laturii MP pe dreapta NP.

8. Se consideră triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 8$ cm. Ce lungime are proiecția laturii AC pe dreapta BC?

9. În *Figura 3*, triunghiul MNP este dreptunghic, $\sphericalangle N = 90°$, $NA \perp MP$ și $A \in MP$.

a) Care este proiecția punctului N pe ipotenuză?

b) Care este proiecția punctului N pe cateta care trece prin vârful P?

c) Precizează proiecțiile catetelor pe ipotenuză.

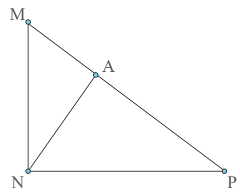


Figura 3

10. Folosind triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), ca în *Figura 4*, în care $AD \perp BC$, completează tabelul de mai jos, după model:

	a	b	c	d	e
BD	4	18			7
CD	12		6		
BC	16	50		4	
AC	$8\sqrt{3}$		$6\sqrt{3}$	$\sqrt{11}$	
AB	8				
AD	$4\sqrt{3}$				$3\sqrt{14}$

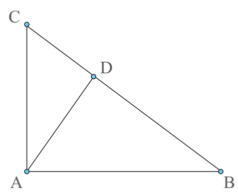


Figura 4

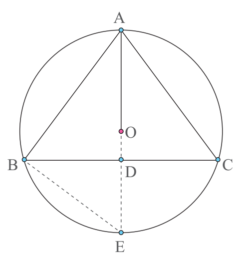


Figura 5

11. În *Figura 5*, triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC = 10$ cm și $AD \perp BC$, $AD = 8$ cm. Triunghiul este înscris în cercul de centru O.

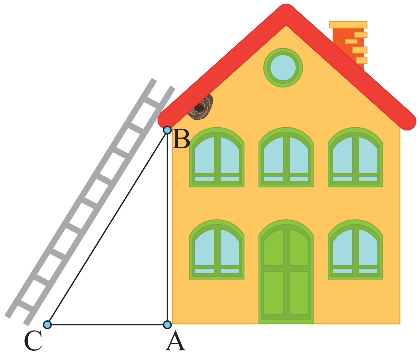
a) Determină raza AO a cercului. b) Calculează perimetrul triunghiului ABC.

Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

Deși este cunoscută drept Teorema lui Pitagora (570 – 500 î.H), această teoremă era cunoscută cu mult timp înainte de către babilonieni (4 tăblițe din perioada 1900 – 1600 î.H) și chiar de către indieni (Baudhayana Sulba-sutra; 800 – 400 î.H).

În prezent se cunosc mai mult de 350 de demonstrații ale minunatei teoreme.

Amintește-ți!



Victor: Oare ce lungime trebuie să aibă scara care ajunge la cuibul de sub streașină?

Sara: Cunoști înălțimea casei până la streașină (AB)? Dar distanța dintre casă și piciorul scării (AC)?

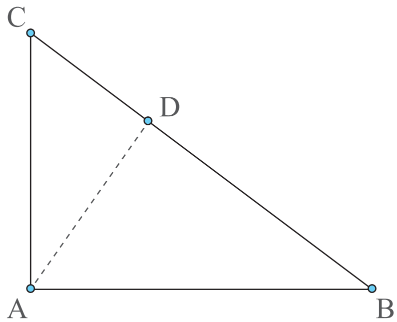
Victor: Le cunosc. Înălțimea casei este de 5 metri și distanța de la casă până la piciorul scării este de 2 metri.

Sara: Atunci e simplu! Sunt $\sqrt{29}$ metri sau, dacă vrei, aproximativ 5,4 metri.

1. Explică cum a obținut Sara acest rezultat.

Important

• **În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor (Teorema lui Pitagora).**



Ipoteză: $\triangle ABC$ ($\sphericalangle A = 90°$).

Concluzie: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

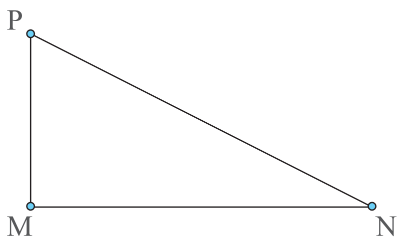
Demonstrație: Construim înălțimea AD.

Din teorema catetei avem:

$AB^2 = BC \cdot BD$ și $AC^2 = BC \cdot CD$. Acum,

$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC \cdot (BD + CD) = BC \cdot BC = BC^2$.

• **Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic (Reciproca teoremei lui Pitagora).**



Ipoteză: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Concluzie: $\triangle ABC$ ($\sphericalangle A = 90°$).

Demonstrație: Construim triunghiul dreptunghic MNP în care $MN = AB$ (1) și $MP = AC$(2). În triunghiul dreptunghic MNP, din teorema lui Pitagora, avem $NP^2 = MN^2 + MP^2$ și din (1) și (2) avem $NP^2 = AB^2 + AC^2$. Dar, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (din ipoteză) și atunci $NP^2 = BC^2$, adică $NP = BC$ (3).

Acum, din (1), (2) și (3) rezultă, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ și cum triunghiul MNP este dreptunghic din construcție, deducem că triunghiul ABC este dreptunghic, cu unghiul din A de $90°$.

Exersează!

2. În *Figura 6*, triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90^\circ$.
a) Dacă $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm, ce lungime are ipotenuza BC?
b) Dacă $AB = 24$ cm și $BC = 26$ cm, ce lungime are cateta AC?
c) Dacă $AC = a\sqrt{2}$ și $BC = a\sqrt{3}$, calculează AB.

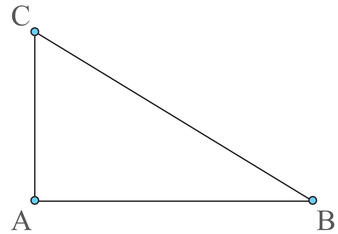


Figura 6

3. Se consideră un triunghi ABC. Stabilește în care dintre situațiile următoare triunghiul este dreptunghic. Precizează, în fiecare caz, care este unghiul drept.
a) $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 8$ cm;
b) $AB = 17$ cm, $BC = 15$ cm, $CA = 8$ cm;
c) $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 16$ cm;
d) $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 4\sqrt{3}$ cm.

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC, în care $AB = 5$ cm.
a) Determină lungimea înălțimii acestui triunghi.
b) Dacă $AB = 7$ cm, poți spune, fără calcule, ce lungime are înălțimea acestui triunghi? Verifică, prin calcul, răspunsul dat.

Indiciu: Este util să reții că într-un triunghi echilateral cu latura de lungime a, înălțimea are lungimea $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

5. Se consideră pătratul $ABCD$, în care $AB = 5$ cm.
a) Determină lungimea diagonalei acestui pătrat.
b) Dacă $AB = 7$ cm, poți spune, fără calcule, ce lungime are diagonala acestui pătrat? Verifică, prin calcul, răspunsul dat.

Indiciu: Este util să reții că într-un pătrat cu latura de lungime a, diagonala are lungimea $a\sqrt{2}$.

6. În triunghiul isoscel ABC, avem $AB = AC = 13$ cm și $BC = 10$ cm. Determină aria triunghiului ABC.

7. În triunghiul oarecare ABC, se știe că $AB = 5$ cm , $BC = 9$ cm și $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$. Calculează aria triunghiului ABC.

8. În triunghiul oarecare ABC, se știe că $AB = 5\sqrt{3}$ cm , $AC = 10\sqrt{2}$ cm și $AD = 10$ cm, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$. Calculează aria triunghiului ABC.

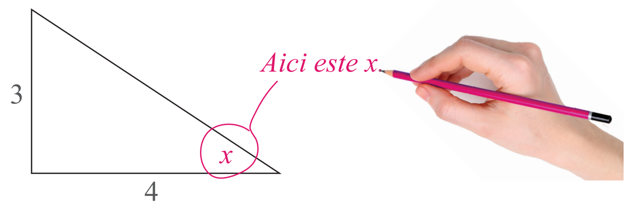
9. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), în care $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 2$ cm și $AD = 3$ cm. Construim $CM \parallel AD$, $M \in AB$.
a) Stabilește ce fel de triunghi este triunghiului BCM.
b) Calculează aria trapezului $ABCD$.

10. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care $AD = BC = 10$ cm, $CD = 12$ cm și $AB = 28$ cm. Construim $CM \parallel AD$, $M \in AB$.
a) Stabilește ce fel de triunghi este triunghiul BCM.
b) Calculează aria trapezului $ABCD$.

11. Se consideră paralelogramul $ABCD$, în care $AB = 8$ cm, $AC = 16$ cm și $AD = 8\sqrt{2}$ cm. Calculează aria paralelogramului $ABCD$.

Noţiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unui unghi ascuţit

Găsește-l pe x.



Trigonometria se referă la legăturile dintre unghiurile și laturile unui triunghi. În limba greacă, **trigonon** înseamnă **triunghi**, iar **metron** înseamnă **măsurare**.

Observă și descoperă!

1. Sara și Victor îți propun următoarea problemă: În *Figura 7* $MA \perp Oy$ și $NB \perp Oy$.

a) Demonstrează că $\triangle OAM \sim \triangle OBN$.

b) Dacă $\dfrac{AM}{OM} = 0{,}6$ ce valoare are raportul $\dfrac{BN}{ON}$?

c) Dacă $\dfrac{OB}{ON} = 0{,}8$ ce valoare are raportul $\dfrac{OA}{OM}$?

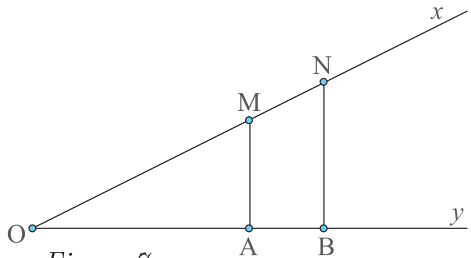


Figura 7

Important

• În orice triunghi dreptunghic, în care un unghi ascuțit are o măsură dată, indiferent de lungimile laturilor, raportul lungimilor a două laturi nu se modifică.

• În funcție de laturile care se iau în calcul, acest raport se va numi sinus, cosinus, tangentă sau cotangentă.

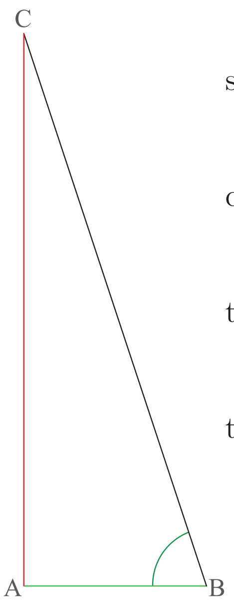


Figura 8

$$\text{sinusul unghiului} = \frac{\text{cateta opusă unghiului}}{\text{ipotenuză}} \qquad \sin B = \frac{AC}{BC} \qquad \sin C = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{cosinusul unghiului} = \frac{\text{cateta alăturată unghiului}}{\text{ipotenuză}} \qquad \cos B = \frac{AB}{BC} \qquad \sin C = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{tangenta unghiului} = \frac{\text{cateta opusă unghiului}}{\text{cateta alăturată unghiului}} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tangenta unghiului} = \frac{\text{cateta alăturată unghiului}}{\text{cateta opusă unghiului}} \qquad \operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} \qquad \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB}$$

• Deoarece unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt unghiuri complementare putem spune:

▷ Sinusul unui unghi este egal cu cosinusul complementului său. $\sin x = \cos(90^\circ - x)$

▷ Cosinusul unui unghi este egal cu sinusul complementului său. $\cos x = \sin(90^\circ - x)$

▷ Tangenta unui unghi este egală cu cotangenta complementului său. $\text{tg } x = \text{ctg}(90^\circ - x)$

▷ Cotangenta unui unghi este egală cu tangenta complementului său. $\text{ctg } x = \text{tg}(90^\circ - x)$

• Valorile pentru sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor de la 1° până la 89° se găsesc în tabelele de mai jos.

sin		cos	sin		cos	sin		cos
1	0,017	89	31	0,515	59	61	0,874	29
2	0,034	88	32	0,529	58	62	0,882	28
3	0,052	87	33	0554,	57	63	0,891	27
4	0,069	86	34	0,559	56	64	0,898	26
5	0,087	85	35	0,573	55	65	0,906	25
6	0,104	84	36	0,587	54	66	0,913	24
7	0,121	83	37	0,601	53	67	0,920	23
8	0,139	82	38	0,615	52	68	0,927	22
9	0,156	81	39	0,629	51	69	0933,	21
10	0,173	80	40	0,642	50	70	0,939	20
11	0,190	79	41	0,656	49	71	0,945	19
12	0,207	78	42	0,669	48	72	0,951	18
13	0,224	77	43	0,681	47	73	0,956	17
14	0,241	76	44	0,694	46	74	0,961	16
15	0,258	75	45	0,707	45	75	0,965	15
16	0,275	74	46	0,719	44	76	0,970	14
17	0,292	73	47	0,731	43	77	0,974	13
18	0,309	72	48	0,743	42	78	0,978	12
19	0,325	71	49	0,754	41	79	0,981	11
20	0,342	70	50	0,766	40	80	0,984	10
21	0,358	69	51	0,777	39	81	0,987	9
22	0,374	68	52	0,788	38	82	0,990	8
23	0,390	67	53	0,798	37	83	0,992	7
24	0,406	66	54	0,809	36	84	0,994	6
25	0,442	65	55	0,819	35	85	0,996	5
26	0,438	64	56	0,829	34	86	0,997	4
27	0,453	63	57	0,838	33	87	0,998	3
28	0,469	62	58	0,848	32	88	0,999	2
29	0,484	61	59	0,857	31	89	0,999	1
30	0,5	60	60	0,866	30			

tg		ctg	tg		ctg	tg		ctg
1	0,017	89	31	0,600	59	61	1,804	29
2	0,034	88	32	0,624	58	62	1,880	28
3	0,052	87	33	0,0649	57	63	1,962	27
4	0,069	86	34	0,674	56	64	2,050	26
5	0,087	85	35	0,700	55	65	2,144	25
6	0,105	84	36	0,726	54	66	2,246	24
7	0,122	83	37	0,753	53	67	2,355	23
8	0,140	82	38	0,781	52	68	2,475	22
9	0,158	81	39	0,809	51	69	2,605	21
10	0,176	80	40	0,839	50	70	7472,	20
11	0,194	79	41	0,869	49	71	2,904	19
12	0,212	78	42	0,900	48	72	3,077	18
13	0,230	77	43	0,932	47	73	3,270	17
14	0,249	76	44	0,965	46	74	3,487	16
15	0,267	75	45	1	45	75	3,732	15
16	0,286	74	46	1,035	44	76	4,010	14
17	0,305	73	47	1,072	43	77	4,331	13
18	0,324	72	48	1,110	42	78	4,704	12
19	0,344	71	49	1,150	41	79	5,144	11
20	0,363	70	50	1,191	40	80	5,671	10
21	0,383	69	51	1,234	39	81	6,313	9
22	0,404	68	52	1,279	38	82	7,115	8
23	0,424	67	53	1,327	37	83	8,144	7
24	0,445	66	54	1,376	36	84	9,514	6
25	0,466	65	55	1,428	35	85	11,430	5
26	0,487	64	56	1,482	34	86	14,300	4
27	0,509	63	57	1,539	33	87	19,081	3
28	0,531	62	58	1,600	32	88	28,636	2
29	0,554	61	59	1,664	31	89	57,289	1
30	0,577	60	60	1,732	30			

Cum utilizăm cele două tabele?

Pe coloanele numite „sin”, „cos”, „tg” sau „ctg” sunt măsurile unghiurilor de la 1° până la 89°, din grad în grad.

În coloanele din dreapta coloanelor „sin” și „tg” sunt valorile pentru sinus, respectiv tangentă.

În coloanele din stânga coloanelor „cos” și „ctg” sunt valorile pentru cosinus, respectiv cotangentă.

Exemplu: $\sin 19^\circ = 0{,}325$, $\cos 48^\circ = 0{,}669$, $\text{tg } 55^\circ = 1{,}428$, $\text{ctg } 82^\circ = 0{,}140$.

Exersează!

2. Problemă rezolvată. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), reprezentat în *Figura 9*, în care $\sphericalangle B = 30°$ și $AC = a$.

a) Ce măsură are unghiul C?

b) Determină lungimile laturilor BC și AB.

c) Calculează valorile lui sinus, cosinus, tangentă și cotangentă pentru unghiurile de 30° și 60°.

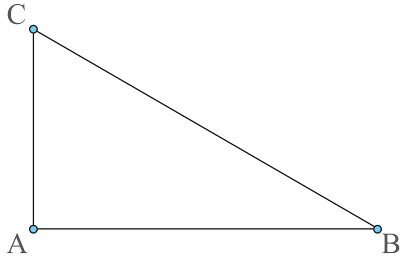


Figura 9

Rezolvare: a) Din $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90° \Rightarrow \sphericalangle C = 60°$.

b) Din $\sphericalangle B = 30°$și $AC = a \Rightarrow BC = 2a$ (în triunghiul dreptunghic cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză). Din teorema lui Pitagora avem, $AB^2 = BC^2 - AC^2$, adică $AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$, de unde $AB = a\sqrt{3}$.

c) $\sin 30° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 30° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg } 30° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$, $\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg } 60° = \text{ctg } (90° - 60°) = \text{ctg } 30^0 = \sqrt{3}$, $\text{ctg } 60° = \text{tg } (90° - 60°) = \text{tg } 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Problemă rezolvată. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), reprezentat în *Figura 10*, în care $AB = AC = a$.

a) Care sunt măsurile unghiurilor B și C?

b) Determină lungimea laturii BC.

c) Calculează valorile lui sinus, cosinus, tangentă și cotangentă pentru unghiurile de 45°.

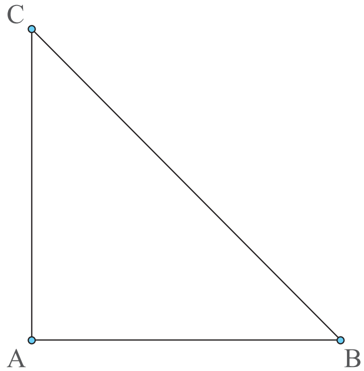


Figura 10

Rezolvare: a) Din $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel și atunci $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$ (suma lor trebuie să fie 90°).

b) Din teorema lui Pitagora avem, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, adică $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, de unde $BC = a\sqrt{2}$.

c) $\sin 45° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{tg } 45° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$,

$\text{ctg } 45° = \text{tg}(90° - 45°) = \text{tg } 45° = 1$.

Rezultatele din cele două probleme le putem sintetiza în *Tabelul 1*.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabelul 1

4. Folosind tabelele pentru sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, asociază fiecărui element din coloana **A** elementul corespunzător din coloana **B**, după model:

A	B
1. $\sin 34°$	a) 6,313
2. $\cos 57°$	b) 0,994
3. $\operatorname{tg} 81°$	c) 0,559
4. $\operatorname{ctg} 54°$	d) 0,992
5. $\sin 84°$	e) 0,324
6. $\cos 7°$	f) 0,122
7. $\operatorname{tg} 18°$	g) 0,544
8. $\operatorname{ctg} 83°$	h) 0,726
	i) 0,305

Model: 1.-c).

5. Calculează: a) $\sin^2 30° + \cos^2 30°$ și $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 30°$, b) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$ și $\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 45°$, c) $\sin^2 60° + \cos^2 60°$ și $\operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{ctg} 60°$.

Indiciu:
Prin $\sin^2 30°$ înțelegem $(\sin 30°)^2$.

6. Folosind triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle ABC = 90°$, din *Figura 11*, și noțiunile învățate, justifică relațiile:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$,

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ și $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

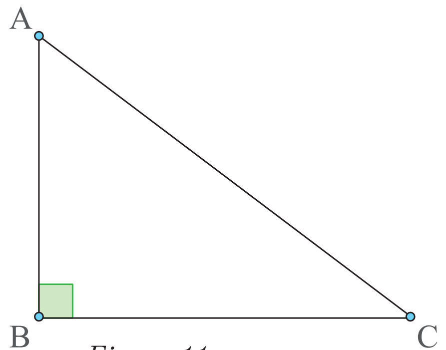


Figura 11

7. Folosind relațiile de la problema 6, calculează $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$, știind că $\sin x = \dfrac{1}{4}$.

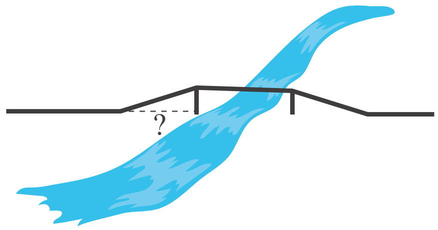
8. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, în care $AB = 8$ cm și $\sphericalangle C = 60°$. Ce lungime are ipotenuza BC? Dar cateta AC?

9. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile egale cu 6 cm, respectiv $6\sqrt{3}$ cm. Determină măsurile unghiurilor ascuțite ale acestui triunghi.

10. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, în care $\sin B = \dfrac{3}{5}$. Dacă ipotenuza BC are lungimea egală cu 40 cm, determină lungimile celor două catete.

11. Se consideră un triunghi dreptunghic în care o catetă are lungimea egală cu 23 cm, iar ipotenuza are lungimea egală cu 25 cm. Folosind valorile din tabelul cu valorile funcțiilor trigonometrice, determină măsurile unghiurilor ascuțite ale acestui triunghi.

Rezolvarea triunghiului dreptunghic



La construcția unui pod sau a unei pasarele, cunosc înălțimea podului sau a pasarelei. Mai știu că panta de urcare trebuie să formeze cu orizontala locului un unghi cu o anumită măsură (nu orice pantă poate fi urcată de către o mașină). Vreau să aflu la ce distanță de pod sau pasarelă trebuie să înceapă panta. Într-o astfel de situație mă ajută trigonometria.

Observă!

1. Sara calculează distanța de la pod până la punctul unde începe panta, în situația în care înălțimea podului este de 3 m și unghiul pantei este de 15°. Ea reprezintă grafic această situație ca în *Figura 12*.

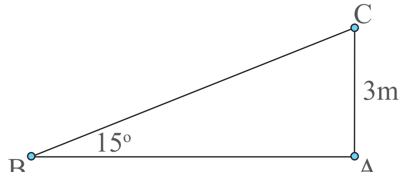


Figura 12

Observă cum a calculat Sara.

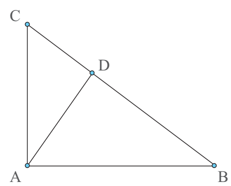
Cum gândește Sara	**Cum scrie Sara**
Trebuie să determin lungimea unei catete, cunoscând cealaltă catetă și un unghi ascuțit. Catetele și un unghi ascuțit sunt „legate” prin tangentă sau cotangentă.	$\text{ctg } 15° = \dfrac{AB}{AC}$
Cotangenta de 15° o caut în tabel, iar pe AC îl cunosc.	$3{,}732 = \dfrac{AB}{3}$
Acum îl pot afla pe AB.	$AB = 3{,}732 \cdot 3 = 11{,}196$ m

Important

● A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă să determin toate elementele triunghiului (lungimile laturilor, lungimea înălțimii și măsurile unghiurilor ascuțite) atunci când cunosc două dintre ele, dintre care, cel puțin una este lungime.

● Sunt mai multe situații în care pot rezolva un triunghi dreptunghic:

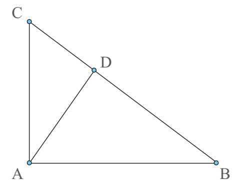
1) Cunosc lungimile catetelor.

Cum procedez	**Exemplu**
- Cu teorema lui Pitagora determin lungimea ipotenuzei. - Cu teorema catetei determin lungimea proiecției uneia dintre catete. - Prin diferență determin lungimea celeilalte proiecții. - Cu teorema înălțimii determin lungimea înălțimii. - Cu definiția pentru sinus (sau oricare alta), folosind tabelele, determin măsura unui unghi ascuțit. - Prin diferență determin măsura celuilalt unghi ascuțit.	 $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2$ $\Rightarrow BC^2 = 25$ $\Rightarrow BC = \sqrt{25} \Rightarrow BC = 5$ cm. $AB^2 = BC \cdot BD \Rightarrow 4^2 = 5 \cdot BD \Rightarrow$ $BD = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$ cm. $DC = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$ cm. $AD^2 = BD \cdot CD \Rightarrow AD^2 = 3{,}2 \cdot 1{,}8 = 5{,}76 \Rightarrow$ $AD = \sqrt{5{,}76} \Rightarrow AD = 2{,}4$ cm $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \sin B = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \sphericalangle B = 37°$. $\sphericalangle C = 90° - 37° = 53°$

2) Cunosc lungimea ipotenuzei și lungimea unei catete.

- Cu teorema lui Pitagora determin lungimea celeilalte catete apoi procedez ca în cazul 1).

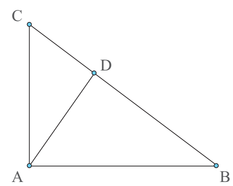
3) Cunosc lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză.

Cum procedez	Exemplu
- Cu teorema catetei determin lungimea catetei a cărei proiecție o știu. - Cu teorema lui Pitagora determin lungimea celeilalte catete. - Prin diferență determin proiecția celeilalte catete. - Cu teorema înălțimii determin lungimea înălțimii. - Cu definiția pentru sinus (sau oricare alta), folosind tabelele, determin măsura unui unghi ascuțit. - Prin diferență determin măsura celuilalt unghi ascuțit.	$BC = 5$ cm și $BD = 3{,}2$ cm. $AB^2 = BC \cdot BD$ $\Rightarrow AB^2 = 5 \cdot 3{,}2 = 16$ $\Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$ cm  $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = 5^2 - 4^2$ $\Rightarrow AC^2 = 9 \Rightarrow AC = \sqrt{9} \Rightarrow AC = 3$ cm. $DC = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$ cm. $AD^2 = BD \cdot CD \Rightarrow$ $AD^2 = 3{,}2 \cdot 1{,}8 = 5{,}76 \Rightarrow AD = \sqrt{5{,}76} \Rightarrow$ $AD = 2{,}4$ cm $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \sin B = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \sphericalangle B = 37°$. $\sphericalangle C = 90° - 37° = 53°$

4) Cunosc lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

- Prin adunare determin lungimea ipotenuzei, apoi sunt în situația de la cazul 3).

5) Cunosc lungimea înălțimii și lungimea unei catete.

Cum procedez	Exemplu
- Cu teorema lui Pitagora in triunghiul format de catetă și înălțime determin lungimea proiecției catetei pe ipotenuză. - Cu teorema catetei determin lungimea ipotenuzei. - Cu teorema lui Pitagora determin lungimea celeilalte catete. - Prin diferență determin proiecția celeilalte catete. - Cu teorema înălțimii determin lungimea înălțimii. - Cu definiția pentru sinus (sau oricare alta), folosind tabelele determin măsura unui unghi ascuțit. - Prin diferență determin măsura celuilalt unghi ascuțit.	$AB = 4$ cm și $AD = 2{,}4$ cm. În $\triangle ABD (\sphericalangle D = 90°)$, $BD^2 = AB^2 - AD^2$ $\Rightarrow BD^2 = 4^2 - 2{,}4^2$  $\Rightarrow BD^2 = 10{,}24 \Rightarrow BD = \sqrt{10{,}24} \Rightarrow$ $BD = 3{,}2$ cm $AB^2 = BC \cdot BD \Rightarrow$ $4^2 = BC \cdot 3{,}2 \Rightarrow BC = \dfrac{16}{3{,}2} = 5$ cm $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = 5^2 - 4^2$ $\Rightarrow AC^2 = 9 \Rightarrow AC = \sqrt{9} \Rightarrow AC = 3$ cm. $DC = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$ cm. $AD^2 = BD \cdot CD \Rightarrow$ $AD^2 = 3{,}2 \cdot 1{,}8 = 5{,}76 \Rightarrow AD = \sqrt{5{,}76} \Rightarrow$ $AD = 2{,}4$ cm $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \sin B = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$ $\Rightarrow \sphericalangle B = 37°$. $\sphericalangle C = 90° - 37° = 53°$

6) Cunosc lungimea înălțimii și lungimea proiecției uneia dintre catete pe ipotenuză.

- Dintr-un triunghi dreptunghic determin lungimea unei catete, apoi sunt în situația de la cazul 5).

7) Cunosc lungimea unei catete și lungimea proiecției sale pe ipotenuză.

- Cu teorema catetei determin lungimea ipotenuzei, apoi sunt în situația de la cazul 2).

8) Cunosc lungimea uneia dintre laturi și măsura unui unghi ascuțit.

- Cu ajutorul lui sinus, cosinus, tangentă sau cotangentă și a tabelelor determin lungimea încă unei laturi, apoi sunt în situația de la cazul 1) sau 2).

Exersează!

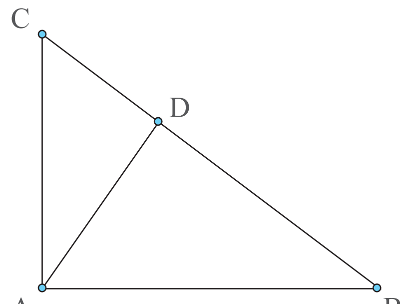


Figura 13

2. În *Figura 13*, triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$ și AD este înălțime. Completează *Tabelul 2*:

	a	b	c	d	e	f	g	h
AB	$10\sqrt{2}$						10	
AC	10	8	6		12			
BC		16				10		
BD				3				8
CD			$6\sqrt{2}$					18
AD				$3\sqrt{3}$			$5\sqrt{3}$	
$\sphericalangle B$					$60°$			
$\sphericalangle C$						$45°$		

Tabelul 2

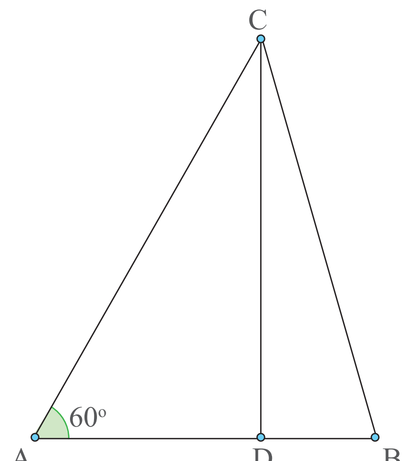


Figura 14

3. Problemă rezolvată. Se consideră triunghiul oarecare ABC, în care $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $\sphericalangle A = 60°$, ca în *Figura 14*. Determină aria triunghiului ABC.

Rezolvare: Construim înălțimea CD. În $\triangle ADC$, $\sphericalangle D = 90°$. Avem $\sin 60° = \dfrac{CD}{AC}$, adică $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{CD}{8}$, de unde $CD = 4\sqrt{3}$ cm.

Acum, $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot CD}{2} = \dfrac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, în care $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Determină sinusul unghiului A.

5. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, în care $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 45°$ și înălțimea AD, $D \in BC$ cu lungimea de $4\sqrt{2}$ cm. Determină perimetrul triunghiului ABC.

6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, în care $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm ,$\sphericalangle A = 60°$. Construim $BD \perp AC$, $D \in AC$.

a) Determină lungimea segmentului BD.

b) Ce lungime are segmentul DC?

c) Determină lungimea laturii BC și calculează perimetrul triunghiului ABC.

7. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, în care $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm ,$\sphericalangle A = 120°$. Construim $BD \perp AC$, $D \in AC$.

a) Determină lungimea segmentului BD.

b) Ce lungime are segmentul DC?

c) Determină lungimea laturii BC și calculează perimetrul triunghiului ABC.

Aplicaţii: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

Amintește-ți!

1. Un poligon regulat este un poligon cu toate laturile și toate unghiurile congruente. Pentru a le construi ne folosim de un cerc.

a) Dă exemplu de poligoane regulate.

b) La construcția unui triunghi echilateral, cercul trebuie împărțit în trei arce egale. Care este măsura unui arc?

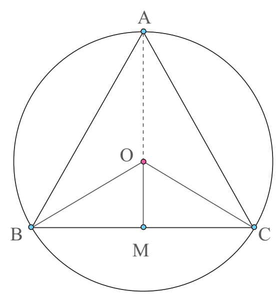
c) Care este măsura unui arc în cazul unui pătrat? Dar al unui hexagon regulat?

Important

• Numim **apotemă a poligonului regulat** distanța de la centrul cercului la o latură a poligonului.

• Lungimea laturii, lungimea apotemei și aria unui poligon regulat se pot exprima cu ajutorul razei cercului circumscris acestuia.

• Dacă notăm l_3, a_3, S_3 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui triunghi echilateral și R raza cercului circumscris, atunci $l_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \dfrac{R}{2}$ și $S_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.



Justificare: Dacă $OM \perp BC$, atunci $BM = CM = \dfrac{BC}{2}$ (OM este un diametru perpendicular pe coardă).

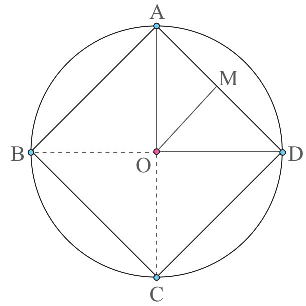
În $\triangle BOC$ isoscel ($OB = OC = R$), avem $\sphericalangle BOC = 120°$ (arcul BC are $120°$) și atunci $\sphericalangle OCM = 30°$. În $\triangle MOC\,(\sphericalangle OMC = 90°)$, avem $\sphericalangle OCM = 30°$, de unde rezultă $OM = \dfrac{OC}{2}$, adică $a_3 = \dfrac{R}{2}$.

În același triunghi, din teorema lui Pitagora, avem $MC^2 = OC^2 - OM^2$, adică $MC^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$, de unde $MC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Din $CM = \dfrac{BC}{2}$, rezultă $BC = 2CM = 2 \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$, adică $l_3 = R\sqrt{3}$.

În $\triangle ABC$, AM este înălțime și $AM = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$.

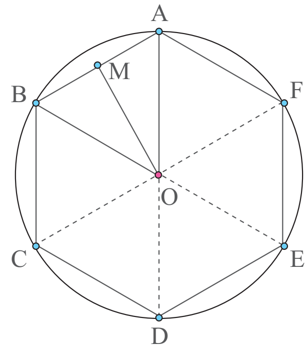
Atunci $S_3 = \dfrac{BC \cdot OM}{2} = \dfrac{R\sqrt{3} \cdot \dfrac{3R}{2}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

• Dacă notăm l_4, a_4, S_4 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui pătrat și R raza cercului circumscris, atunci $l_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ și $S_3 = 2R^2$.



Justificare: $\triangle AOD$ este dreptunghic în O (AC și BD sunt diagonalele pătratului). Din teorema lui Pitagora în $\triangle AOD$ avem $AD^2 = OA^2 + OD^2$, adică $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, de unde $AD = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$. Așadar, $l_4 = R\sqrt{2}$. Acum $OM \perp AD$ în $\triangle AOD$ care este dreptunghic și isoscel ($OA = OD = R$) implică OM este mediană și atunci $OM = \dfrac{AD}{2}$ (media corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză). Deci $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. $S_4 = l_4^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

• Dacă notăm l_6, a_6, S_6 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui hexagon regulat și R raza cercului circumscris, atunci $l_6 = R$, $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ și $S_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.



Justificare: Unind centrul cercului cu cele șase vârfuri ale hexagonului regulat, obținem șase triunghiuri echilaterale. (În $\triangle AOB$ avem, $OA = OB = R$ și $\sphericalangle AOB = 60°$. Un triunghi isoscel cu un unghi de $60°$ este echilateral.)

Dacă $\triangle AOB$ este echilateral, atunci $AB = OA = R$, adică $l_6 = R$.

Dacă $OM \perp AB$, atunci $AM = BM = \dfrac{AB}{2}$ (OM este un diametru perpendicular pe coardă) și $\triangle AOM$ este dreptunghic în M. Din teorema lui Pitagora în $\triangle AOM$ avem, $OM^2 = AO^2 - AM^2$, adică $OM^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$, de unde $OM = \sqrt{\dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Deci, $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Acum $S_6 = 6 \cdot \mathcal{A}_{\triangle AOB} = 6 \cdot \dfrac{R \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Exersează!

2. Copiază pe caiet și completează *Tabelul 3*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui triunghi echilateral, iar l_3, a_3, S_3 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui triunghi.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_3		$6\sqrt{3}$		
a_3			5	
S_3				$4\sqrt{3}$

Tabelul 3

3. Copiază pe caiet și completează *Tabelul 4*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui pătrat, iar l_4, a_4, S_4 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui pătrat.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_4		$6\sqrt{2}$		
a_4			5	
S_4				16

Tabelul 4

4. Copiază pe caiet și completează *Tabelul 5*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui hexagon, iar l_6, a_6, S_6 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui hexagon.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_4		6		
a_4			$5\sqrt{3}$	
S_4				$\sqrt{3}$

Tabelul 5

5. Problemă rezolvată: În *Figura 15*, $ABCD$ este un trapez isoscel, în care baza mare $AB = 5\sqrt{3}$ cm, baza mică $CD = 3\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 60^\circ$. Determină raza cercului circumscris acestui trapez.

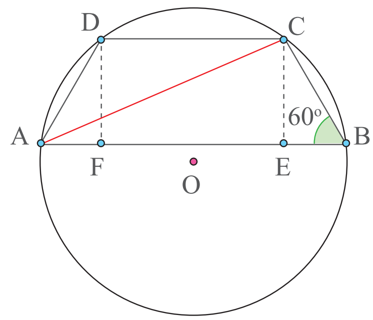


Figura 15

Rezolvare:

Cum gândesc	**Cum scriu**
Dacă unghiul B are 60° înseamnă că arcul ADC are 120° (unghiul B este unghi înscris în cerc), prin urmare coarda AC poate fi privită ca latură a triunghiului echilateral înscris în acest cerc (un cerc se împarte în trei arce cu măsura de 120°).	$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle B = 60^\circ \\ \sphericalangle B - \text{ unghi înscris}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = 120^\circ \Rightarrow$ $AC = l_3$
Dacă voi construi CE și DF perpendiculare pe AB, voi putea determina lungimile următoarelor segmente: BE, EC, AE și apoi, cu teorema lui Pitagora în triunghiul ACE, voi putea determina lungimea lui AC.	Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $CF \perp AB$, $F \in AB$. Avem, $EF = CD = 3\sqrt{3}$ cm ($CDFE$ este dreptunghi) și $EB = AF = \dfrac{AB - EF}{2} = \sqrt{3}$. În $\triangle EBC(\sphericalangle E = 90^\circ)$, $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{EC}{EB} \Rightarrow$ $\sqrt{3} = \dfrac{EC}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{EC = 3 \text{ cm}}$ $AE = AB - EB \Rightarrow \boxed{AE = 4\sqrt{3} \text{ cm}}$ În $\triangle ACE(\sphericalangle E = 90^\circ)$, din teorema lui Pitagora rezultă $AC^2 = AE^2 + CE^2 \Rightarrow$ $AC^2 = 48 + 9 = 57 \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{57} \text{ cm}}$
Latura triunghiului echilateral și raza cercului circumscris sunt „legate” prin relația $l_3 = R\sqrt{3}$. De aici voi determina raza cercului circumscris trapezului.	Din $l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{57} = R\sqrt{3} \Rightarrow$ $R = \dfrac{\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = \sqrt{19}$. În concluzie, $R = \sqrt{19}$ cm.

Aproximarea în situații practice a distanţelor folosind relaţii metrice

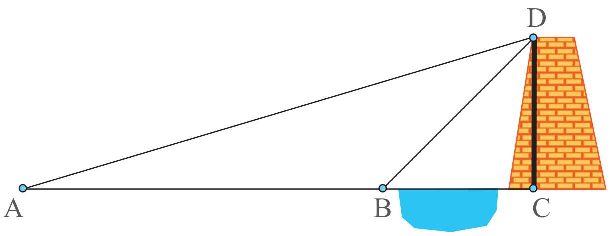
Astăzi folosim foarte multe gadget-uri care ne dau tot felul de informații. Să luăm de exemplu, GPS-ul care ne arată locația sau softurile de navigație. Alte gadget-uri ne permit să determinăm înălțimea unei clădiri, a unui copac sau chiar a unui vârf de munte. În spatele acestor gadget-uri stă foarte multă matematică.

Observă și descoperă!

1. Observă cele două exemple care ne pot ajuta atunci când gadget-urile nu mai au baterie.

A. Înălțimea unui turn inaccesibil

Trebuie să determinăm înălțimea unui turn aflat de cealaltă parte a unui râu, ca în *Imaginea 1*. Prin urmare, nu putem măsura distanța de la noi până la turn.



Imaginea 1 – Determinarea înălțimii unui turn

Pentru a rezolva problema, folosesc un instrument care îmi permite să determin măsuri de unghiuri.

Determin măsura unghiului DBC ($\sphericalangle DBC = 40°$) și măsura unghiului DAB ($\sphericalangle DAC = 15°$), apoi determin distanța dintre punctele A și B ($AB = 10$ m).

Acum, din $\triangle BCD$ dreptunghic în C, avem $\text{ctg } 40° = \dfrac{BC}{DC}$. Dar $\text{ctg } 40° = 1{,}191$ și atunci $1{,}191 = \dfrac{BC}{DC}$, de unde $BC = 1{,}191 \cdot DC$ (1).

Din $\triangle ACD$ dreptunghic în C, avem $\text{ctg } 15° = \dfrac{AC}{DC}$. Dar $\text{ctg } 15° = 3{,}732$ și atunci $3{,}732 = \dfrac{AC}{DC}$, de unde $AC = 3{,}732 \cdot DC$ (2).

Dar $AC - BC = AB$, adică $3{,}732 \cdot DC - 1{,}191 \cdot DC = 10$ sau $2{,}541 \cdot DC = 10$, de unde $DC = 10 : 2{,}541$. Cu aproximație, înălțimea turnului este egală cu 3,93 m.

Putem determina acum și distanța de la punctul B până la turn.

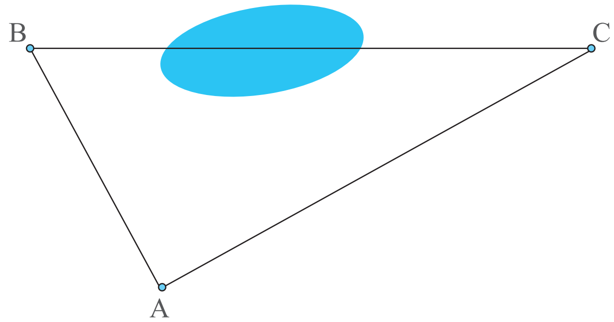
Obținem $BC = 1{,}191 \cdot 3{,}93 = 4{,}68$

B. Distanța, în linie dreaptă, între două puncte inaccesibile pe teren.

Folosesc un instrument care îmi permite să măsor unghiuri. Mă poziționez astfel încât unghiul BAC să aibă măsura de $90°$. Măsor, apoi, distanțele AB și AC ($AB = 50$ m, $AC = 120$ m).

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2$, adică $BC^2 = 50^2 + 120^2 = 2\,500 + 14\,400 = 16\,900$, de unde $BC = \sqrt{16\,900} = 130$.

Distanța între punctele B și C este de 130 de metri.



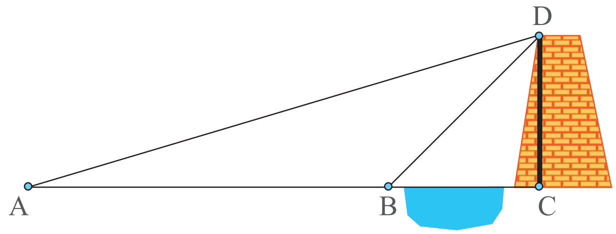
Imaginea 2 – Determinarea distanței dintre două puncte

Exersează!

2. a) Determină înălțimea turnului din *Imaginea 3*, știind că $\sphericalangle DBC = 45°$, $\sphericalangle DAC = 30°$ și $AB = 2{,}19$ m.

b) Ce lungime minimă trebuie să aibă o scară, care, situată la 2 m distanță de turn, să ajungă până în vârful turnului?

Indiciu: Pentru aproximarea radicalilor, atunci când apar, folosește un calculator sau o foaie de lucru Excel.



Imaginea 3 – Determinarea înălțimii unui turn

3. În *Figura 16* este schița unei case. Avem posibilitatea să măsurăm următoarele lungimi: AB, AC și BC. Dacă $AC = BC = 5{,}2$ m și $AB = 9{,}6$ m, determină panta acoperișului. (Panta acoperișului este unghiul format de AC și AB, adică unghiul CAB).

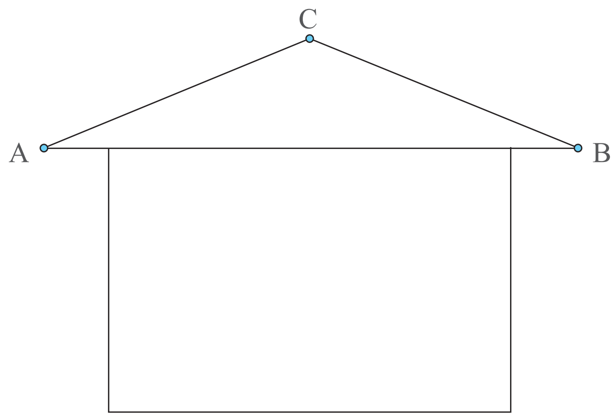


Figura 16

4. Rampa pentru scaunul cu rotile este un plan înclinat care este folosit de către persoanele cu dizabilități motrice în locul scărilor la trecerile de nivel. Standardele de construcție a acestor rampe spun că la fiecare 30 de cm parcurși trebuie să ne ridicăm, față de orizontala locului, cu 2,5 cm. Ce măsură, aproximativă, are unghiul format de rampă cu orizontala locului?

5. Un avion, care zboară la altitudinea de 10 000 de metri, este văzut de către un observator de pe pământ sub un unghi cu măsura de $34°$. După un minut, avionul se află exact deasupra observatorului, adică pe verticala locului. Care este viteza aproximativă a avionului?

Recapitulare

1. Folosind datele din *Figurile 17 – 22* de mai jos determină, în fiecare caz, valoarea lui x.

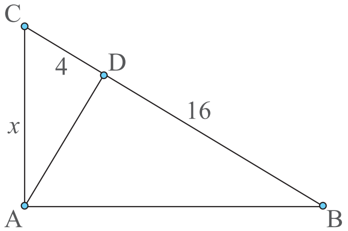


Figura 17

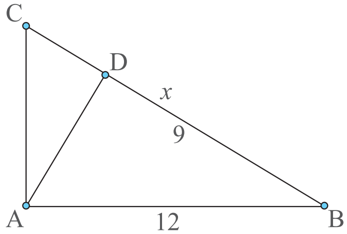


Figura 18

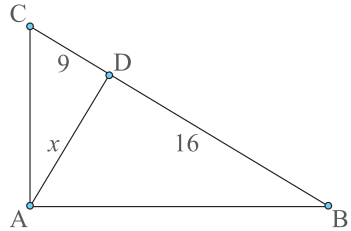


Figura 19

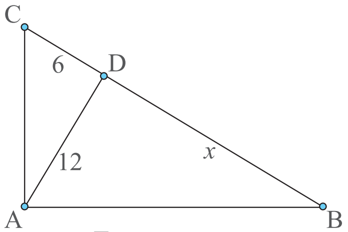


Figura 20

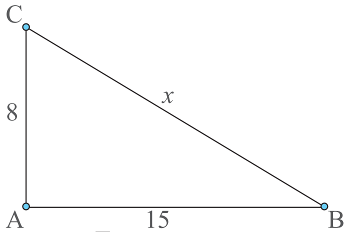


Figura 21

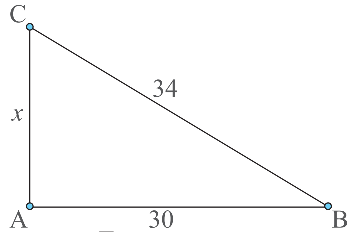


Figura 22

2. Stabilește dacă triunghiul ABC este dreptunghic și precizează unghiul drept în următoarele cazuri: a) $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm; b) $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 11$ cm; c) $AB = 4$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm.

3. Verifică dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a) $\sin 60° = 2\sin 30° \cos 30°$; b) $\text{tg } 60° = \dfrac{2\text{tg } 30°}{1 - \text{tg}^2 30°}$.

4. Determină perimetrul triunghiului dreptunghic $ABC(\sphericalangle A = 90°)$ în următoarele cazuri:

a) $\sin B = \dfrac{1}{3}$ și $BC = 9$ cm; b) $\sin B = 0{,}5$ și $AC = 2$ cm; c) $\cos C = \dfrac{1}{4}$ și $BC = 12$ cm;

d) $\cos C = 0{,}5$ și $AC = 3$ cm; e) $\text{tg } B = 0{,}7$ și $AB = 10$ cm.

5. În *Figura 23*, triunghiurile ABC și ACD sunt dreptunghice în A. Știind că $AB = AC$, $\dfrac{AD}{AB} = \sqrt{3}$ și $BD = 10(1 + \sqrt{3})$ cm, calculează aria și perimetrul triunghiului BCD.

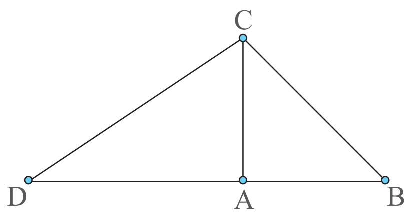


Figura 23

6. Determină perimetrul unui hexagon regulat cu aria de $24\sqrt{3}$ cm^2.

7. Apotema unui triunghi echilateral este egală cu 3 cm. Determină aria și perimetrul acestui triunghi.

8. Apotema unui hexagon regulat este egală cu 3 cm. Determină aria și perimetrul acestui hexagon.

9. Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC(\sphericalangle A = 90°)$ în care $AD \perp BC, D \in BC$ și $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{1}{3}$. Dacă $AD = 3\sqrt{3}$cm, calculează perimetrul și aria triunghiului ABC.

10. Se consideră triunghiul ABC în care $AM, M \in BC$ și $BN, N \in AC$ sunt mediane. Dacă $AM = 6$ cm, $BN = 9$ cm și $AM \perp BN$, determină perimerul triunghiului ABC.

11. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AD = 4$ cm. Dacă M este un punct pe latura AB, astfel încât $MB = 2AM$, determină lungimea lui AM, astfel încât triunghiul DMC să fie dreptunghic.

12. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, în care $AD = 6$ cm și $AB = 8\sqrt{2}$ cm. Dacă M este un punct pe latura AB, astfel încât $MB = 3AM$, demonstrează că triunghiul DMC este dreptunghic.

13. Se consideră un paralelogram $ABCD$, în care $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 120°$. Determină aria paralelogramului.

14. Un romb are lungimea laturii egală cu 10 cm și unghiul ascuțit cu măsura de 30°. Determină aria rombului.

15. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care baza mică $CD = 4$ cm, $AD = BC = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle A = 30°$. Determină aria și perimetrul trapezului $ABCD$.

16. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care baza mică $CD = 14$ cm, $AD = BC = 30$ cm și baza mare $AB = 50$ cm. Arată că $AC \perp BC$.

17. Un romb $ABCD$ are lungimea laturii egală cu 6 cm și lungimea uneia dintre diagonale egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Determină lungimea celeilalte diagonale.

18. Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 12$ cm și $CA = 8\sqrt{3}$ cm. Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

19. Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 12$ cm, $\sphericalangle A = 75°$ și $\sphericalangle B = 60°$. Determină perimetrul triunghiului ABC.

20. În parc este amenajat un spațiu cu flori, ca cel din *Figura 24*. $ABCDEF$ este un hexagon regulat cu latura de 2 m. Pe suprafața hașurată sunt plantate flori, iar pe suprafața rămasă este plantat gazon.

a) Demonstrează că triunghiul ACE este un triunghi echilateral.

b) Arată că suprafața pe care sunt plantate flori are aceeași arie cu suprafața pe care este plantat gazon.

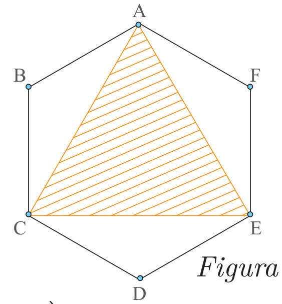


Figura 24

21. Problemă rezolvată În afară de media aritmetică $\left(m_a = \dfrac{a+b}{2}\right)$ și media geometrică $\left(m_g = \sqrt{ab}\right)$, în matematică putem vorbi și de alte tipuri de medii. Una dintre acestea este media armonică $\left(m_h = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \text{ sau } m_h = \dfrac{2ab}{a+b}\right)$. Între cele trei medii există următoarea relație: $m_h \leq m_g \leq m_a$ cunoscută ca **inegalitatea mediilor**. Egalitatea are loc atunci când $a = b$. Această inegalitate se poate demonstra geometric, cu ajutorul unui triunghi dreptunghic.

Rezolvare. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și construim înălțimea AG ($AG \perp BC, G \in BC$), mediana AO, $O \in BC$ și $GH \perp AO$, $H \in AO$ (*Figura 25*). Este evident că $GH \leq AG \leq AO$. (*) Notăm $BG = a$ și $GC = b$. Din teorema înălțimii în $\triangle ABC$, avem $AG = \sqrt{ab}$ (1). Acum, $AO = \dfrac{a+b}{2}$ (Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei).

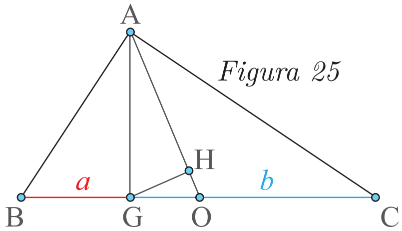


Figura 25

În sfârșit, din teorema catetei în triunghiul AGO, avem $AH = \dfrac{2ab}{a+b}$ (3). Din (*) și (1), (2), (3) rezultă inegalitatea din enunț.

Când $G = O = H$, triunghiul ABC este isoscel și, prin urmare, $a = b$.

Evaluare

10p din oficiu

1. În *Figura 26*, triunghiul ABC este dreptunghic în A și AD este înălțime.

5p a) Dacă $BD = 4$ cm și $BC = 9$ cm, atunci lungimea catetei AB este egală cu ... cm.

5p b) Dacă $BD = 6$ cm și $CD = 24$ cm, atunci lungimea înălțimii AD este egală cu ... cm.

5p c) Dacă $AC = 6$ cm și $AB = 9$ cm, atunci lungimea ipotenuzei BC este egală cu ... cm.

5p d) Dacă $BC = 20$ cm și $AC = 16$ cm, atunci lungimea catetei AB este egală cu ... cm.

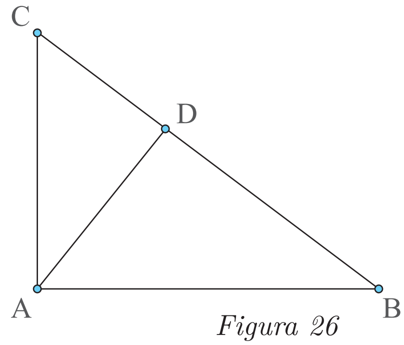


Figura 26

10p **2.** Calculează: $\sin 30° + \cos 60° - \text{tg } 45°$.

10p **3.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), în care $\sin C = \frac{1}{5}$ și $AB = 4$ cm. Determină lungimea laturii BC.

4. Apotema unui hexagon regulat este egală cu 6 cm. Calculează:

5p a) perimetrul hexagonului.

5p b) aria hexagonului.

10p **5.** Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 6$ cm, $\sphericalangle A = 75°$ și $\sphericalangle B = 45°$. Determină perimetrul triunghiului ABC.

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC = 13$ cm. Dacă AD, $D \in BC$, este înălțimea triunghiului și $AD = 5$ cm, calculează:

5p a) perimetrul triunghiului ABC.

5p b) aria triunghiului ABC.

7. În trapezul isoscel $ABCD$, bazele sunt $AB = 4$ cm şi $CD = 8$ cm, iar laturile neparalele sunt $AD = BC = 4$ cm.

5p a) Calculează măsura unghiului C.

5p b) Determină lungimea diagonalelor trapezului.

10p **8.** În *Figura 27* este reprezentat schematic un pod peste un râu. Folosind datele înscrise pe figură, determină lungimea podului.

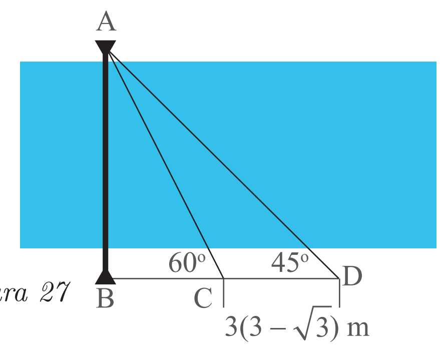


Figura 27

Exersezi și progresezi

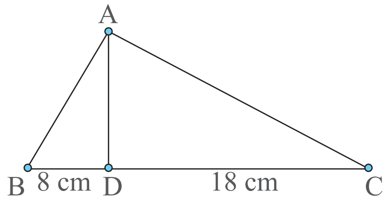
1. Într-un triunghi dreptunghic, proiecțiile catetelor au lungimile egale cu 8 cm, respectiv 18 cm. Determină lungimea ipotenuzei, lungimea înălțimii și lungimile catetelor.

2. Într-un triunghi dreptunghic, o catetă are lungimea egală cu 30 cm, iar proiecția ei pe ipotenuză are lungimea egală cu 18 cm. Determină, pentru acest triunghi, lungimea ipotenuzei, lungimea înălțimii și lungimea celeilalte catete.

3. Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC(\sphericalangle A = 90°)$, în care $\text{tg } C = \dfrac{12}{5}$.

Dacă $AC = 10$ cm, determină AB și BC.

4. Calculează: $\sin 60° + \cos 30° - \text{tg } 60°$.

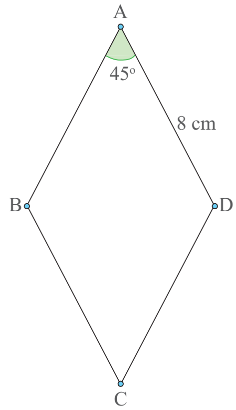


5. Un pătrat este înscris într-un cerc cu raza de 4 cm.

a) Determină perimetrul pătratului.

b) Stabilește dacă perimetrul pătratului este mai mare decât 23 cm.

6. Un romb, cu latura de lungime 8 cm, are un unghi ascuțit cu măsura de 45°. Determină aria acestui romb.



7. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), în care $AB = 20$ cm, $AD = 8$ cm, $DC = 4$ cm și $\sphericalangle A = 60°$.

a) Calculează perimetrul trapezului.

b) Determină măsurile unghiurilor trapezului.

8. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul M în interiorul său, astfel încât triunghiul AMB să fie echilateral.

a) Arată că măsura unghiului DCM este egală cu 15°.

b) Dacă P și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv DC, demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare și calculează lungimea segmentului MN.

c) Calculează tg 15°.

9. În *Figura 28* este o schiță a urcării la altitudine (distanță față de sol) a unui avion, din momentul decolării. Viteza de urcare este de 5 000m/min, adică într-un minut avionul parcurge 5 000 de metri. Unghiul de urcare este de 23°.

a) La ce altitudine se află avionul după 1 minut?

b) După câte minute, avionul se află la altitudinea de 9 750 de metri?

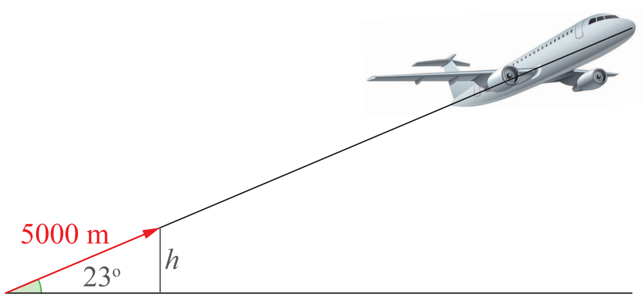


Figura 28

Unitatea

11

Bun venit, vacanță!

Recapitulare finală

1. Aproximează, prin lipsă cu o eroare mai mică de o sutime, următoarele numere: $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{99}$ și $\sqrt{1\,001}$.

2. Ordonează crescător următoarele numere reale:

a) $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; 1,5; $\left|-\sqrt{7}\right|$;   b) $(-2)^2$; $\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$; $\sqrt{6}$;   c) $3\sqrt{10}$; 10; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{3}$.

3. Fie $A = \left\{\sqrt{1{,}44} - \sqrt{3};\ \dfrac{5}{2}\sqrt{169};\ -\dfrac{7}{3}\sqrt{729};\ -\sqrt{3{,}24};\ \sqrt{288}\right\}$.
Determină $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ și $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

4. Reprezintă, pe axa numerelor, numerele întregi care verifică:
a) $|x-3| < 2$; b) $|\sqrt{x} - 3| < 2$; c) $|2x-1| < \sqrt{5}$.

5. Alege răspunsul corect: Rădăcina pătrată a numărului 27^{36} este egală cu:
a) 9^{36};   b) 3^{36};   c) 3^{54};   d) 9^{18}.

6. Fie $ABCD$ un pătrat și $AC \cap BD = \{O\}$. Compară lungimea traseului $A-O-D-C-B-O-A$ cu lungimea traseului $A-B-C-O-D-A$.

7. Efectuează următoarele operații:

a) $\sqrt{12}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$;   b) $\sqrt{21}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3} + 1\right)$;

c) $\dfrac{2}{3}\sqrt{8} + \dfrac{3}{5}\sqrt{72} + \dfrac{11}{13}\sqrt{288}$;   d) $\dfrac{1}{11}\sqrt{27} - \dfrac{2}{7}\sqrt{108} + \dfrac{5}{13}\sqrt{432}$.

8. Un nufăr își dublează suprafața o dată la două luni. De câte ori își mărește suprafața într-o singură lună? Dar în 11 luni?

9. Efectuează următoarele operații:

a) $\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^5$;   b) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^5 + \left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{-1} - \left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{-3}$;

c) $\sqrt{24}^3\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}} + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right) - \sqrt{20}^3\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;   d) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27}} - \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45}}$.

Proiect

Istoria numărului de aur

• Ce veți face?
Veți căuta informații despre numărul de aur.

• De ce veți face?
Pentru a investiga prezența numărului de aur în istorie, în natură, în arhitectură, în pictură sau în alte domenii.

• Cum veți face?
Veți căuta în diverse cărți sau pe Internet date, imagini, informații despre numărul de aur.

• Cum veți ști că ați reușit?
Veți prezenta proiectul vostru, iar colegii din celelalte grupe vor face aprecieri și sugestii.

• Ce se evaluează?

- utilizarea informațiilor relevante din cărți sau de pe Internet;
- participarea tuturor membrilor grupului la căutarea informațiilor;
- forma atractivă a desenelor/imaginilor utilizate;
- prezentarea clară a proiectului.

Sugestii:

- Organizați-vă în grupuri și stabiliți-vă rolurile.
- Folosiți imagini și informații relevante pentru a prezenta un domeniu/mai multe domenii importante în care a fost folosit numărul de aur.

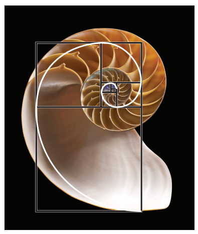
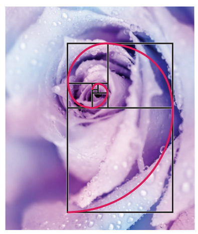
Model de prezentare

Numărul de aur este prezent în natură, apariția lui ajutându-ne să înțelegem o parte din tainele creației.

În natură îl găsim:

- la flori, în dispunerea petalelor;
- la insecte (de exemplu, furnica are corpul împărțit în trei segmente care respectă diviziunea de aur);
- la cochilia melcului (spirala de aur).

Chipul omului are la bază raportul numărului de aur. De exemplu, raportul dintre distanța de la linia zâmbetului (unde se unesc buzele) până la vârful nasului și de la vârful nasului până la baza sa respectă raportul de aur.


- Prezentați proiectul într-un mod inedit.
- Stabiliți, împreună cu profesoara/profesorul, un proiect câștigător.

10. Numărul de vizualizări ale unui clip video a crescut după o lună de trei ori, iar în următoarea lună de încă 12 ori. De câte ori a crescut, în medie, pe lună numărul de vizualizări?

11. Dacă $x^2 = 7$ și $y^2 = 28$, determină toate valorile posibile ale sumei $x + y$.

12. Dacă $x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{99}\right)$, iar $y = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$, calculează media geometrică a numerelor x și y.

13. Fie $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ și $C = \{0, 1\}$. a) Calculează $A \times B$, $B \times C$ și $A \times C$. b) Câte elemente din $A \times B$ sunt de tipul (x, x^2), cu $x \in \mathbb{R}$?

14. Fie $A = \{-3, -1, 2, 5\}$ și $B = \{-1, 3\}$. Reprezintă elementele mulțimii $A \times B$ într-un sistem de axe ortogonale.

15. Demonstrează că punctele $A = (3, -4)$, $B = (5, 0)$, $C = \left(-2, +\sqrt{21}\right)$, $D\left(\sqrt{17}, 2\sqrt{2}\right)$, $E\left(-\sqrt{11}, -\sqrt{14}\right)$, $F\left(\sqrt{2}, -\sqrt{23}\right)$, $G\left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right)$ și $H\left(-2\sqrt{3}, -\sqrt{13}\right)$ se află pe cercul de centru $O(0, 0)$ și rază 5.

16. Fie $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ și $C(0, 3)$. Arată că triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel.

17. Demonstrează că punctele $M(-3, -1)$, $N(0,1)$, $P(2,4)$ și $Q(-1,2)$ reprezintă vârfurile unui romb.

18. Arată că punctele $S(-4, -2)$, $T(1, -4)$, $U(3, 1)$ și $V(-2, 3)$ sunt vârfurile unui pătrat.

19. Rezolvă următoarele ecuații:

a) $3x + 2 = \dfrac{5}{3}$; b) $x\sqrt{3} + 2 = \dfrac{5}{3}$;

c) $3x + \sqrt{2} = \dfrac{5}{3}$; d) $3x + 2 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

20. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{5}{6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y = \sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \sqrt{\dfrac{5}{6}} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y = \sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = \sqrt{\dfrac{5}{6}} \end{cases}$

21. În primul tabel, avem relația $y = 2x - 4$, iar în al doilea tabel avem relația $y = -x - 1$.

x	-2	-1	3	4
y				

x	-3	-2	2	3
y				

a) Completează primul tabel, folosindu-te de relația din enunț. Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale, perechile de numere reale (x, y) obținute. Verifică dacă punctele reprezentate de tine sunt coliniare. În cazul în care nu sunt, verifică calculele și descoperă greșeala! Unește apoi punctele coliniare printr-un segment.

b) Repetă același raționament și pentru al doilea tabel și reprezintă punctele pe același desen obținut la subpunctul a).

c) Observă, pe desen, coordonatele punctului ce se află la intersecția celor două segmente. Verifică, apoi, că această pereche de numere reale este soluția sistemului $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$.

22. În figura de mai jos, este reprezentat traseul unui vas de croazieră de la regiunea autonomă a Portugaliei numită Madeira, până la Ford Lauderdale, situat în Florida, SUA.

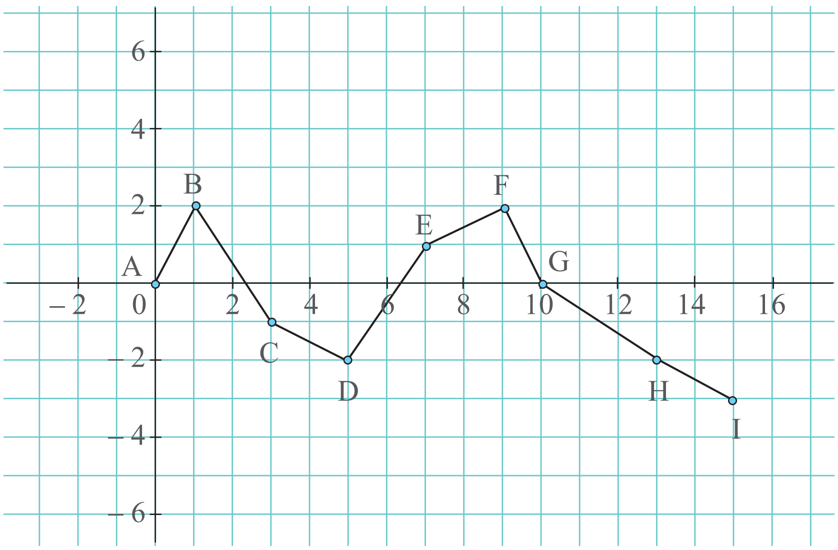
Într-un sistem de axe ortogonale, ales de conducerea vasului, portul Madeira are coordonatele (3,2; 1,1), iar portul Ford Lauderdale are coordonatele (0,1; 0,1), unde o unitate de măsură reprezintă o mie de mile nautice (o milă nautică are 1 852 km).

Știind că vasul a consumat pentru această croazieră în jur de jumătate de milion de litri de carburant, calculează cât a consumat, în medie, vasul pentru a parcurge o milă nautică.

23. Tatăl Anastasiei parcurge traseul din localitatea A până în localitatea I, pe drumul descris în figura de mai jos. El va parcurge traseul A – B – C – D în prima zi, iar în a doua zi din D până în I. Punctele din imagine sunt de coordonate: $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(3,-1)$, $D(5,-2)$, $E(7,1)$, $F(9,2)$, $G(10,0)$, $H(13,-2)$ și $I(15,-3)$, unde o unitate de distanță reprezintă 100 km.

a) Demonstrează că $AB = CD = EF = FG = HI$ și că $BC = DE = GH$.

b) Dacă în prima zi mașina a consumat 66 de litri de carburant, iar în a doua zi 112 litri de carburant, calculează cât carburant consumă mașina la fiecare sută de kilometri.



24. Se consideră triunghiul ABC, M un punct pe latura BC astfel încât $BM = 3MC$ și P mijlocul segmentului AM. Dacă aria triunghiului ABP este egală cu 6 cm^2, determină aria triunghiului ABC.

25. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Bisectoarele unghiurilor DAB și ABC se intersectează în $M \in DC$.

a) Arată că triunghiurile ADM și BCM sunt isoscele.

b) Demonstrează că triunghiul AMB este dreptunghic.

c) Dacă $AM = 8$ cm și $BM = 6$ cm, calculează aria și perimetrul paralelogramului $ABCD$.

26. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ pentru care există un punct O în interiorul său, astfel încât triunghiurile AOB și COD sunt dreptunghice isoscele. Arată că perpendiculara prin O pe BC trece prin mijlocul laturii AD.

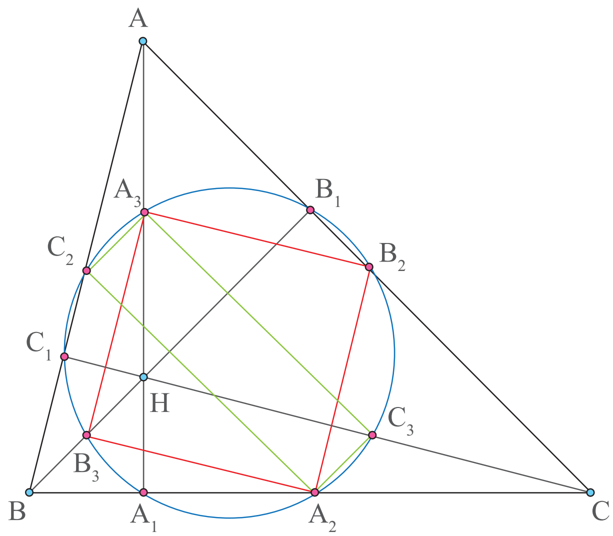
Indiciu: Paralela prin A la OD intersectează perpendiculara în F și $\triangle AOF \equiv \triangle BOC$.

27. Se consideră triunghiul ABC, în care $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$, $BB_1 \perp AC$, $B_1 \in AC$, $CC_1 \perp AB$, $C_1 \in AB$, punctele A_2, B_2, C_2, mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB și punctele A_3, B_3, C_3, mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

a) Arată că patrulaterele $A_2B_2A_3B_3$ și $A_2C_2A_3C_3$ sunt dreptunghiuri.

b) Demonstrează că dreptele A_2A_3, B_2B_3 și C_2C_3 sunt concurente;

c) Dacă $\{O\} = A_2A_3 \cap B_2B_3 \cap C_2C_3$, arată că $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OB_1 = OB_2 = OB_3 = OC_1 = OC_2 = OC_3$.



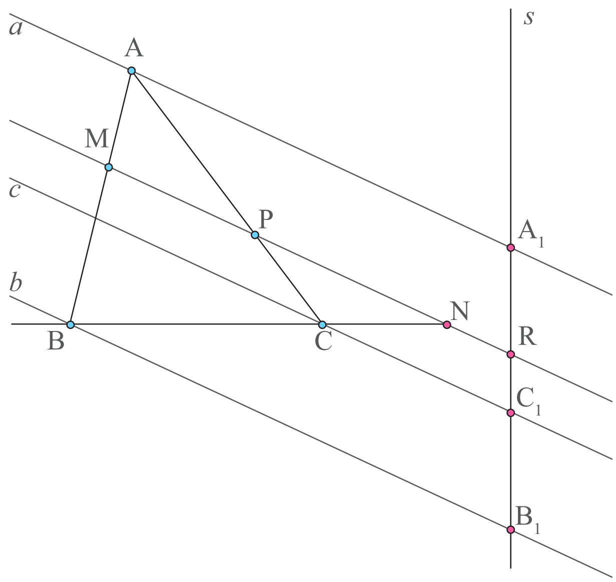
Cercul cu centrul în O care trece prin punctele $A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3,C_1,C_2,C_3$ se numește cercul lui Euler sau cercul celor nouă puncte.

28. Se consideră triunghiul isoscel ABC, în care $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72°$. Dacă bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în punctul D, arată că $BC^2 = AC \cdot DC$.

29. Folosind numai o riglă negradată și un compas, desenează un segment cu lungimea $\dfrac{AB \cdot EF}{CD}$, unde segmentele AB, CD și EF sunt cele din figura de mai jos.

30. Se consideră dreptele $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ și secantele s_1 și s_2, astfel încât $s_1 \cap d_1 = \{A_1\}$, $s_1 \cap d_2 = \{B_1\}$, $s_1 \cap d_3 = \{C_1\}$, $s_2 \cap d_1 = \{A_2\}$, $s_2 \cap d_2 = \{B_2\}$, $s_2 \cap d_3 = \{C_2\}$.

Arată că $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.



31. Se consideră triunghiul ABC și transversala $M-N-P$ (o dreaptă care intersectează dreptele pe care se află laturile triunghiului).

Prin vârfurile triunghiului A, B, C se construiesc dreptele a, b, respectiv c astfel încât $a \parallel b \parallel c \parallel MP$. O secantă s intersectează cele patru paralele astfel: pe a în A_1, pe b în B_1, pe c în C_1, pe MP în R. Demonstrează că $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$. (*Teorema lui Menelaus*)

32. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in AB$, $N \in AC$ și $P \in BC$, astfel încât $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

Demonstrează că punctele M, N, P sunt coliniare. (*Reciproca teoremei lui Menelaus*)

33. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P pe laturile AB, BC, respectiv AC astfel încât $AN \cap BP \cap CM = \{O\}$. Demonstrează că $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$. (*Teorema lui Ceva*)

34. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in AB$, $N \in BC$ și $P \in AC$, astfel încât $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$. Arată că $AN \cap BP \cap CM = \{O\}$. (*Reciproca teoremei lui Ceva*)

35. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm și $AD = 8$ cm. Dacă M este mijlocul laturii AB și N este un punct pe latura BC, astfel încât $\frac{BP}{CP} = \frac{9}{7}$, stabilește natura triunghiului DMN.

36. Se consideră un trapez $ABCD$. Notăm M mijlocul bazei mari AB, N mijlocul bazei mici CD, O intersecția diagonalelor și P intersecția laturilor neparalele. Arată că:

a) $\frac{DO}{DN} = \frac{BO}{BM}$;

b) $\triangle DON \sim \triangle BOM$;

c) punctele M,O,N sunt coliniare;

d) $\frac{DP}{DN} = \frac{AP}{AM}$;

e) $\triangle PDN \sim \triangle PAM$;

f) punctele M, N, P sunt coliniare.

37. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul de centru O. Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că patrulaterul $ABOC$ este paralelogram. Dacă raza cercului este de 6 cm, determină perimetrul triunghiului ABC.

38. Se consideră un cerc cu centrul în punctul O și raza $r = 9$ cm. Punctul A este exterior cercului, astfel încât $OA = 15$ cm și punctul M este intersecția lui OA cu cercul. Dacă AT_1 și AT_2 sunt tangentele din A la cerc, iar tangenta în M la cerc intersectează AT_1 și AT_2 în B, respectiv C, determină perimetrul și aria triunghiului ABC.

Evaluare finală

10p din oficiu

5p **1.** a) Calculând $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}$ vei obține .... .
5p b) Soluția ecuației $3x - 2 = 13$ este .... .

10p **2.** Calculează media geometrică a numerelor:
$a = \frac{1}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}$ și $b = \sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$.

10p **3.** Rezolvă sistemul de două ecuații $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

4. Se consideră tabelul:

x	-2	-1		3
$y = 2x - 1$			3	

5p a) Completează tabelul de mai sus.
5p b) Reprezintă, într-un sistem de axe ortogonale, perechile (x, y) obținute la punctul a).

10p **5.** Un hexagon regulat este înscris într-un cerc de rază 4 cm. Determină apotema și aria acestui hexagon.

10p **6.** Calculează perimetrul unui triunghi dreptunghic ABC, în care $\sin B = \frac{3}{4}$ și ipotenuza $BC = 10$ cm.

7. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, în care $AD = 6$ cm, $AB = 15$ cm și M un punct pe AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$.
10p a) Arată că $\triangle ADM \sim \triangle BMC$.
10p b) Demonstrează că $DM \perp CM$.
10p c) Determină distanța de la punctul B la dreapta MC.