MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

VI

NICULAE GHICIU
EMILIA IANCU
VICENȚIU RUSU
FLORENTINA AMALIA ENEA
MARIA POPESCU

MATEMATICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Niculae Ghiciu (coordonator)
Emilia Iancu
Florentina Amalia Enea
Vicențiu Rusu
Maria Popescu

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU
CLASA A VI-A

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Şcoala	Anul şcolar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.						
2.						
3.						
4.						

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.

Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
GHICIU, NICULAE
Matematică: manual pentru clasa a VI-a / Niculae Ghiciu (coordonator), Florentina Amalia Enea, Emilia Iancu, Maria Popescu, Vicenţiu Rusu - Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 2018
ISBN 978-606-31-0619-4

I. Niculae Ghiciu
II. Florentina Amalia Enea
III. Emilia Iancu
IV. Maria Popescu

004

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ S.A.
Str. Spiru Haret nr. 12, sector 1, cod 010176, Bucureşti
Tel.: 021.315.38.20
Tel./fax: 021.312.28.85
e-mail: office@edituradp.ro
www.edituradp.ro
Librăria E.D.P.: Str. Gen. Berthelot nr. 28-30

Comenzi pentru această lucrare se primesc:
- prin poştă, pe adresa editurii
- prin e-mail: comenzi@edituradp.ro
  comercial@edituradp.ro
- prin telefon/fax: 021.315.73.98

Manualul digital
este realizat cu sprijinul
UNIVERSITĂŢII NAŢIONALE DE ARTĂ
TEATRALĂ ŞI CINEMATOGRAFICĂ
„I.L. CARAGIALE”

u n a t c
universitatea naţională de artă teatrală şi cinematografică „I.L.Caragiale”

Redactor: **Claudia Viorelia Urs**
Tehnoredactori: **Claudia Viorelia Urs**
Cati-Narcizia Lupu
Grafician: **Otilia Borş**
Coperta: **Alin Casapu**

Număr de plan: 63103/2018
Tipărit la Regia Autonomă Monitorul Oficial

Cuprins

PREZENTAREA MANUALULUI

Conținuturile lucrării sunt organizate pe **unități de învățare** și **lecții.**

UNITĂŢILE DE ÎNVĂŢARE

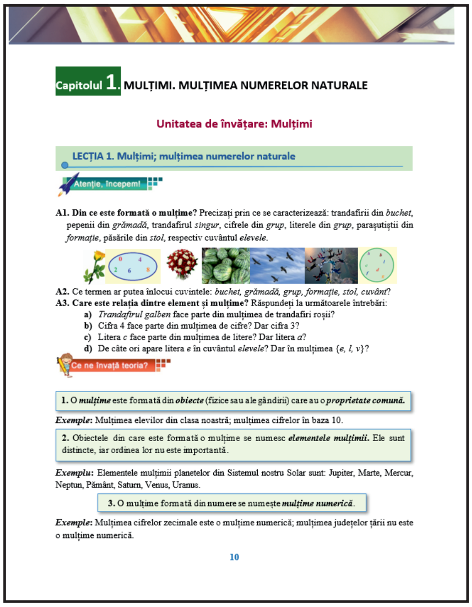
ALGEBRĂ

1. Mulțimi
2. Mulțimea numerelor naturale
3. Rapoarte și Proporții
4. Mărimi
5. Numere întregi 1
6. Numere întregi 2
7. Numere raționale
8. Ecuații

GEOMETRIE

9. Unghiuri
10. Perpendicularitate
11. Paralelism
12. Cerc
13. Triunghiul
14. Congruențe
15. Triunghiuri particulare

Pagini de început de capitol



Capitolul 1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea de învățare: Mulțimi

LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale

Atenție, Începem!

A1. Din ce este formată o mulțime? Precizați prin ce se caracterizează: trandafirii din *buchet*, pepenii din *grămadă*, trandafirul *singur*, cifrele din *grup*, literele din *grup*, parașutiștii din *formație*, păsările din *stol*, respectiv cuvântul *elevele*.

A2. Ce termen ar putea înlocui cuvintele: *buchet, grămadă, grup, formație, stol, cuvânt*?

A3. Care este relația dintre element și mulțime? Răspundeți la următoarele întrebări:

a) *Trandafirul galben* face parte din mulțimea de trandafiri roșii?

b) Cifra 4 face parte din mulțimea de cifre? Dar cifra 3?

c) Litera *c* face parte din mulțimea de litere? Dar litera *a*?

d) De câte ori apare litera *e* în cuvântul *elevele*? Dar în mulțimea {*e, l, v*}?

Ce ne învață teoria?

1. O *mulțime* este formată din *obiecte* (fizice sau ale gândirii) care au o *proprietate comună*.

Exemple: Mulțimea elevilor din clasa noastră; mulțimea cifrelor în baza 10.

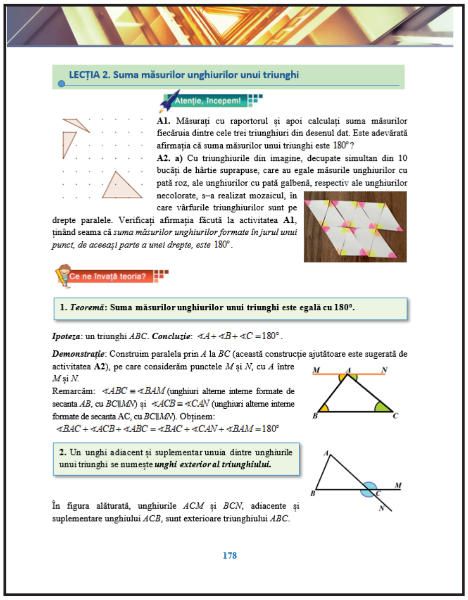
2. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc *elementele mulțimii*. Ele sunt distincte, iar ordinea lor nu este importantă.

Exemplu: Elementele mulțimii planetelor din Sistemul nostru Solar sunt: Jupiter, Marte, Mercur, Neptun, Pământ, Saturn, Venus, Uranus.

3. O mulțime formată din numere se numește *mulțime numerică*.

Exemple: Mulțimea cifrelor zecimale este o mulțime numerică; mulțimea județelor țării nu este o mulțime numerică.

10



LECȚIA 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Atenție, Începem!

A1. Măsurați cu raportorul și apoi calculați suma măsurilor fiecăruia dintre cele trei triunghiuri din desenul dat. Este adevărată afirmația că suma măsurilor unui triunghi este 180°?

A2. a) Cu triunghiurile din imagine, decupate simultan din 10 bucăți de hârtie suprapuse, care au egale măsurile unghiurilor cu pată roz, ale unghiurilor cu pată galbenă, respectiv ale unghiurilor necolorate, s-a realizat mozaicul, în care vârfurile triunghiurilor sunt pe drepte paralele. Verificați afirmația făcută la activitatea A1, ținând seama că *suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct, de aceeași parte a unei drepte, este 180°*.

Ce ne învață teoria?

1. *Teoremă*: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.

Ipoteza: un triunghi ABC. *Concluzie*: $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=180°$.

Demonstrație: Construim paralela prin A la BC (această construcție ajutătoare este sugerată de activitatea A2), pe care considerăm punctele M și N, cu A între M și N.

Remarcăm: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAM$ (unghiuri alterne interne formate de secanta AB, cu $BC \parallel MN$) și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CAN$ (unghiuri alterne interne formate de secanta AC, cu $BC \parallel MN$). Obținem:

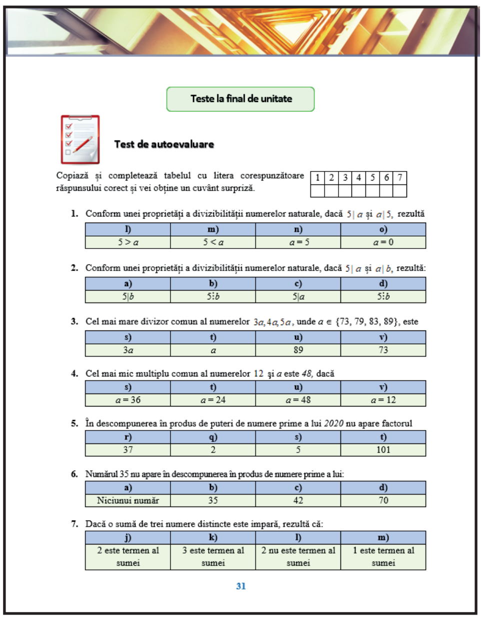
$\sphericalangle BAC+\sphericalangle ACB+\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAN+\sphericalangle BAM=180°$

2. Un unghi adiacent și suplementar unuia dintre unghiurile unui triunghi se numește *unghi exterior al triunghiului*.

În figura alăturată, unghiurile ACM și BCN, adiacente și suplementare unghiului ACB, sunt exterioare triunghiului ABC.

178

Pagina pentru *Test la final de unitate*



Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Conform unei proprietăți a divizibilității numerelor naturale, dacă $5 \mid a$ și $a \mid 5$, rezultă

l)	m)	n)	o)
$5>a$	$5<a$	$a=5$	$a=0$

2. Conform unei proprietăți a divizibilității numerelor naturale, dacă $5 \mid a$ și $a \mid b$, rezultă:

a)	b)	c)	d)
$5 \mid b$	$5 \nmid b$	$5 \mid a$	$5 \vdots b$

3. Cel mai mare divizor comun al numerelor $3a, 4a, 5a$, unde $a \in \{73, 79, 83, 89\}$, este

s)	t)	u)	v)
$3a$	a	89	73

4. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 și *a* este *48*, dacă

s)	t)	u)	v)
$a=36$	$a=24$	$a=48$	$a=12$

5. În descompunerea în produs de puteri de numere prime a lui *2020* nu apare factorul

r)	q)	s)	t)
37	2	5	101

6. Numărul 35 nu apare în descompunerea în produs de numere prime a lui:

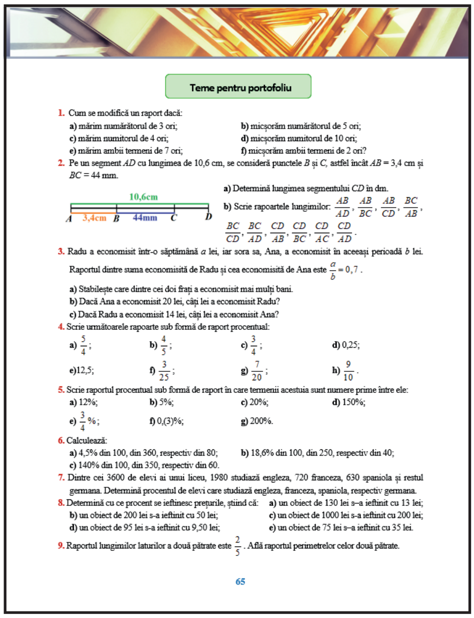
a)	b)	c)	d)
Niciunui număr	35	42	70

7. Dacă o sumă de trei numere distincte este impară, rezultă că:

j)	k)	l)	m)
2 este termen al sumei	3 este termen al sumei	2 nu este termen al sumei	1 este termen al sumei

31

Pagina pentru *Teme pentru portofoliu*



Teme pentru portofoliu

1. Cum se modifică un raport dacă:
a) mărim numărătorul de 3 ori; b) micșorăm numărătorul de 5 ori;
c) mărim numitorul de 4 ori; d) micșorăm numitorul de 10 ori;
e) mărim ambii termeni de 7 ori; f) micșorăm ambii termeni de 2 ori?

2. Pe un segment AD cu lungimea de 10,6 cm, se consideră punctele B și C, astfel încât $AB = 3,4$ cm și $BC = 44$ mm.
a) Determină lungimea segmentului CD în dm.
b) Scrie rapoartele lungimilor: $\frac{AB}{AD}; \frac{AB}{BC}; \frac{AB}{CD}; \frac{BC}{AB}; \frac{BC}{CD}; \frac{BC}{AD}; \frac{CD}{AB}; \frac{CD}{BC}; \frac{CD}{AC}; \frac{CD}{AD}$.

3. Radu a economisit într-o săptămână *a* lei, iar sora sa, Ana, a economisit în aceeași perioadă *b* lei. Raportul dintre suma economisită de Radu și cea economisită de Ana este $\frac{a}{b}=0,7$.
a) Stabilește care dintre cei doi frați a economisit mai mulți bani.
b) Dacă Ana a economisit 20 lei, câți lei a economisit Radu?
c) Dacă Radu a economisit 14 lei, câți lei a economisit Ana?

4. Scrie următoarele rapoarte sub formă de raport procentual:
a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{4}$; d) 0,25; e) 12,5; f) $\frac{3}{25}$; g) $\frac{7}{20}$; h) $\frac{9}{10}$.

5. Scrie raportul procentual sub formă de raport în care termenii acestuia sunt numere prime între ele:
a) 12%; b) 5%; c) 20%; d) 150%; e) $\frac{3}{4}$%; f) 0,(3)%; g) 200%.

6. Calculează:
a) 4,5% din 100, din 360, respectiv din 80; b) 18,6% din 100, din 250, respectiv din 40;
c) 140% din 100, din 350, respectiv din 60.

7. Dintre cei 3600 de elevi ai unui liceu, 1980 studiază engleza, 720 franceza, 630 spaniola și restul germana. Determină procentul de elevi care studiază engleza, franceza, spaniola, respectiv germana.

8. Determină cu ce procent se ieftinesc prețurile, știind că: a) un obiect de 130 lei s-a ieftinit cu 13 lei;
b) un obiect de 200 lei s-a ieftinit cu 50 lei; c) un obiect de 1000 lei s-a ieftinit cu 200 lei;
d) un obiect de 95 lei s-a ieftinit cu 9,50 lei; e) un obiect de 75 lei s-a ieftinit cu 35 lei.

9. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{2}{5}$. Află raportul perimetrelor celor două pătrate.

65

STRUCTURA LECŢIEI

Lecția conține următoarele secvențe:

Atenţie, începem! *– În care sunt propuse activităţi (Ai) de rezolvare a unor exerciţii și probleme, care conduc la descoperirea noilor cunoştinţe, pe baza cunoştinţelor, competenţelor anterioare şi a unor imagini sugestive. Unele activităţi sunt precedate de întrebări prin care se pune în evidenţă scopul activităţii.*

Ce ne învață teoria? *– Conține noile cunoștințe ce trebuie reținute: noțiuni, proprietăți, reprezentări, reguli, algoritmi etc.*

Să vedem ce am înțeles *– Propune spre rezolvare, exerciții și probleme prin care se verifică nivelul de înțelegere a lecției. Rezolvarea acestora se poate face frontal, pe grupe sau individual. Soluțiile vor fi prezentate întregii clase și discutate pentru a fi înțelese de toți elevii.*

Învățăm să rezolvăm *– Propune exerciții și probleme rezolvate care au drept scop aprofundarea și transferul cunoștințelor, dezvoltarea abilităților elevilor privind: algoritmi, metode de rezolvare și demonstrare, construcții și mod de redactare a soluțiilor.*

Acum să rezolvăm singuri! *– Vizează activitatea independentă a elevului, prin care își fixează, aplică, își dezvoltă cunoștințele și abilitățile, realizează conexiuni și transfer de cunoștințe în contexte variate și pe grade de dificultate crescânde.*

În partea de început a lucrării este propus un „Test inițial", cu scopul stabilirii traseului educațional în funcție de nivelul de pregătire al elevilor.

La finalul fiecărei unități de învățare sunt propuse: teme pentru portofoliul elevului, un test de autoevaluare (grilă cu soluţie în cuvinte tematice) și două Teste, în vederea determinării nivelului de competenţe şi cunoștințe dobândite, în funcție de care se poate continua studiul unităților de învățare următoare. Dacă se constată multe lipsuri în pregătire, este recomandat să se reia sarcinile de învățare prin care să se asigure recuperarea cunoștințelor și a competențelor de bază, în vederea înțelegerii și însușirii noilor cunoștințe.

Fiecare unitate de învățare se termină cu un proiect interdisciplinar (matematică–informatică) ce presupune realizarea unei modelări în Scratch (aflat în programa de Informatică și TIC la clasa a V–a și clasa a VI–a). În funcție de necesități proiectul poate fi realizat în alte medii de programare.

Finalul lucrării prevede Teste prin care se realizează recapitularea finală.

RECAPITULARE CLASA A V-A și TESTE INIȚIALE

1. Scrie cu cifre numărul șapte sute de mii opt.

2. Rotunjește la sute numărul 43827.

3. Determină numărul natural cu 389 mai mare decât 24892.

4. Calculează: **a)** $3024 \cdot 58 + 3024 \cdot 43 - 3024$; **b)** $\left[8 + 8 \cdot \left(8^2 + 8^{98} : 8^{96}\right)\right] : 129$.

5. **a)** Compară numerele $a = \left(3^2\right)^3 \cdot 3^4 : 3^4$ cu $b = 27$;

b) Ordonează crescător numerele: $\frac{11}{3}$, $3\frac{5}{6}$ și 3,(3).

6. Arată că numărul $n = 1 + 2 + ... + 20 + 75 : 5$ este pătrat perfect.

7. Determină ultima cifră a numărului $3^9 + 2^9 + 5^9$.

8. Determină:

a) cel mai mare număr natural care, împărțit la 29, dă câtul 12;

b) cel mai mic multiplu al numărului 25;

c) cel mai mic număr natural care se divide cu 24, 36 și 60.

9. Arată că: **a)** 3429 se divide cu 9; **b)** 175 este multiplu al lui 35; **c)** $\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) \vdots 10$.

10. Arată că produsul oricăror trei numere naturale consecutive este divizibil cu 6.

11. Maria a adunat două coșuri cu piersici. În primul coș are 45 de piersici, iar în al doilea 32 de piersici. Ea le pune pe toate în cutii în care încap exact 8 piersici. Câte cutii va umple și câte piersici vor rămâne în cutia care nu se completează?

12. Dacă 6 caiete costă 18 lei, află cât costă 10 caiete.

13. Într-o curte sunt rațe și iezi. Câte rațe și câți iezi sunt în curte, dacă sunt 11 capete și 30 de picioare?

14. Determină valorile mai mari sau egale cu 5 pe care le poate avea numitorul unei fracții cu numărătorul egal cu 7, astfel încât aceasta să fie supraunitară.

15. Scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă: **a)** $2\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{26}{130}$; **c)** 6,12.

16. Scrie sub formă de fracție zecimală numărul trei întregi și cinci sutimi și apoi sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

17. Calculează: **a)** suma numerelor 3,72 și 2,2; **b)** numărul de 100 de ori mai mic decât 258;

c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{10} + \frac{4}{9} : \frac{10}{9} + \frac{5^2}{5^3}$; **d)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot 2^4$; **e)** $\frac{1}{201} + \frac{2}{201} + ... + \frac{201}{201}$;

f) $\left(1 + 1{,}8^2 \cdot 100\right) : \left(2{,}4 \cdot 15 - 0{,}1^3 \cdot 1000 \cdot 11\right)$; **g)** $5{,}2 + 5{,}(2) - 5{,}02 - 5{,}0(2)$.

18. Diferența a două numere este 78,24. Unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt. Determină cele două numere.

19. Calculează suma și diferența măsurilor unghiurilor de $102°12'25''$ și $62°31'34''$.

20. Dacă A, B, C sunt puncte coliniare și $AB = 2{,}4$ cm, iar $BC = 3{,}2$ cm, calculează lungimea segmentului AC. Câte soluții are problema? Reprezintă printr-un desen.

21. Desenează și notează corespunzător: **a)** două segmente congruente care au un punct comun; **b)** două drepte concurente într-un punct P și alte două puncte distincte, coliniare cu P; **c)** un unghi ascuțit cu vârful în punctul O și laturile OA și OB.

22. Calculează:
a) aria unui dreptunghi cu dimensiunile: lungimea de 0,4 m și lățimea de 15 cm;
b) volumul paralelipipedului dreptunghic cu lungimea de 1 dm, lățimea cât jumătate din lungime și înălțimea un sfert din lungime.

23. Copiază și completează spațiile punctate pentru a obține enunțuri adevărate:
a) 1m = … dm; **b)** 0,25 cm^3 = … mm^3; **c)** 12847 m^2 = … ha.

24. Un acvariu are lungimea de 72 cm, lățimea de 45 cm și înălțimea de 38 cm. **a)** Determină capacitatea acvariului; **b)** Dacă în acvariu se pun 97,2 l de apă, calculează cât din capacitatea acvariului rămâne fără apă; **c)** Calculează distanța de la marginea superioară a acvariului la nivelul apei.

Testul inițial 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Numărul natural trei sute patru mii treizeci și șase se scrie cu cifre … .

10p **2.** Un divizor impropriu al numărului 15 este numărul … .

10p **3.** Două drepte care au un singur punct comun se numesc … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Rezultatul calculului $3^2 + 2^3 + 0^{100} - 100^0 + 1^{1001}$ este:
a) 26; **b)** 25; **c)** 17; **d)** 14.

10p **2.** Dacă fracțiile $\frac{x}{12}$ și $\frac{1}{3}$ sunt echivalente, atunci x este:
a) 36; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

10p **3.** Perimetrul unui dreptunghi cu lățimea de 8cm și lungimea $3\frac{1}{4}$ din lățime este:
a) 68 cm; **b)** 680 cm; **c)** 40 cm; **d)** 22 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Pentru 3 kg de struguri și 5 kg de mandarine s-au plătit 44 lei, iar pentru 5 kg de struguri și 10 kg de mandarine 80 lei. Cât costă un kg de struguri și cât unul de mandarine?

10p **2.** Scrieți numerele naturale de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 9 și cu 5.

10p **3.** Dacă suma măsurilor a două unghiuri reprezintă două treimi din măsura unui unghi alungit și unul dintre unghiuri are măsura o treime din măsura celuilalt unghi, aflați măsurile celor două unghiuri și reprezentați-le prin desen.

Testul inițial 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Dintre fracțiile $\frac{5}{12}$ și $\frac{5}{16}$ mai mică este fracția … .

10p **2.** Fracția ordinară $\frac{7}{20}$ scrisă sub formă de fracție zecimală este… .

10p **3.** Perimetrul unui pătrat cu latura de 0,25 cm este de … cm.

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Dacă numărul $\overline{245a}$ este divizibil cu 3, atunci:

a) $a \in \{0,5\}$; **b)** $a \in \{0,3,6,9\}$; **c)** $a \in \{1,7\}$; **d)** $a \in \{0,2,4,6,8\}$.

10p **2.** Numărul de 3,5 ori mai mare decât 2,8 este:

a) 980; **b)** 98; **c)** 9,8; **d)** $\frac{5}{4}$.

10p **3.** Numărul minim de drepte determinat de 8 puncte distincte este:

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 8.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Aflați două numere naturale a căror diferență este 48, iar unul dintre numere este o cincime din celălalt.

2. Aflați media aritmetică a numerelor: 0,5; 2,4; 5,28 și 2,22.

10p **3.** Calculați: **a)** 4,8 dm + 125,7 m = … dam; **b)** 0,07 hg + 1,2 dag = … kg;

10p **c)** 0,3 m^3 + 300 cm^3 = … l.

Capitolul 1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea de învățare: Mulțimi

LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale

Atenție, începem!

Din ce este formată o mulțime?

A1. Precizați prin ce se caracterizează: trandafirii din *buchet*, pepenii din *grămadă*, trandafirul *singur*, cifrele din *grup*, literele din *grup*, parașutiștii din *formație*, păsările din *stol*, respectiv cuvântul *elevele*.

A2. Ce termen ar putea înlocui cuvintele: *buchet, grămadă, grup, formație, stol, cuvânt*?

Care este relația dintre element și mulțime?

A3. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) *Trandafirul galben* face parte din mulțimea de trandafiri roșii?
b) Cifra 4 face parte din mulțimea de cifre? Dar cifra 3?
c) Litera c face parte din mulțimea de litere? Dar litera a?
d) De câte ori apare litera e în cuvântul *elevele*? Dar în mulțimea $\{e, l, v\}$?

Ce ne învață teoria?

1. O ***mulțime*** este formată din ***obiecte*** (fizice sau ale gândirii) care au o ***proprietate comună.***

Exemple: Mulțimea elevilor din clasa noastră; mulțimea cifrelor în baza 10.

2. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc ***elementele mulțimii.*** Ele sunt distincte, iar ordinea lor nu este importantă.

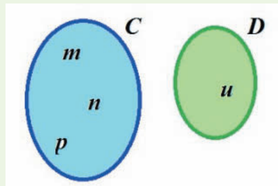
Exemplu: Elementele mulțimii planetelor din Sistemul nostru Solar sunt: Jupiter, Marte, Mercur, Neptun, Pământ, Saturn, Venus, Uranus.

3. O mulțime formată din numere se numește ***mulțime numerică***.

Exemple: Mulțimea cifrelor zecimale este o mulțime numerică; mulțimea județelor țării nu este o mulțime numerică.

4. Mulțimile se notează cu litere mari din alfabetul latin, cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2,...
Mulțimea care nu are niciun element se numește ***mulțimea vidă*** și se notează cu simbolul $\varnothing$.

5. Mulțimile se reprezintă prin:
- **enumerarea elementelor între acolade**
  (Dacă A este mulțimea literelor din cuvântul *elevele*, scriem $A = \{e, l, v\}$),
- **proprietate caracteristică**
  (Dacă B este mulțimea resturilor împărțirii unui număr natural la 5, scriem
  $B = \{r|\ r$ este rest la împărțirea unui număr natural la 5$\}$,
  de fapt $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$),
- **diagrame Venn–Euler**
  (Mulțimile $C = \{m, n, p\}$ și $D = \{u\}$, din figura alăturată).



6. Între un element și o mulțime vorbim de:

a) ***relația de apartenență***, dacă elementul se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\in$”.

b) ***relația de nonapartenență***, dacă elementul nu se regăsește în mulțime și folosim simbolul „$\notin$”.

***Exemple*: a)** Scriem: $2 \in \{x|\ x$ este cifră pară$\}$ și citim „2 aparține mulțimii cifrelor pare”.

b) Scriem: $3 \notin \{x|\ x$ este cifră pară$\}$ și citim „3 nu aparține mulțimii cifrelor pare”.

c) În diagrama de mai sus, $m \in$ C și $m \notin$ D.

7. Mulțimile pot fi ***mulțimi finite*** (dacă numărul lor de elemente poate fi indicat printr-un număr natural) sau ***mulțimi infinite*** (în caz contrar). ***Cardinalul unei mulțimi X*** reprezintă numărul elementelor mulțimii X și îl notăm ***cardX*** sau **|*X*|.**

***Exemple*:**

a) Mulțimea $D_6 = \{d|\ d$ divide $6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ este finită deoarece $cardD_6 = 4$;

b) $\{n \mid n \in \mathbb{N}, n$ este număr prim, $n \vdots 10\} = \varnothing$, iar $card\varnothing = 0$.

***Observație*:** $\{0\} \neq \varnothing$.

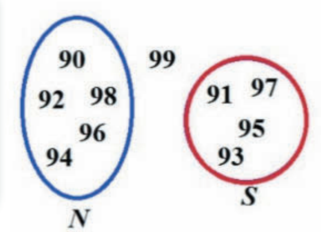
c) Mulțimile $\mathbb{N} = \{n|\ n$ este număr natural$\}$, $P = \{n|\ n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$, $I = \{n|\ n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ sunt infinite.

Să vedem ce am înțeles

Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată, să scriem:

a) relația dintre fiecare element și fiecare mulțime dată prin diagramă, precum și cardinalele acestor mulțimi;

b) elementele fiecărei mulțimi, prin enumerare și apoi folosind o proprietate caracteristică.



Învățăm să rezolvăm

1. Enumerați elementele mulțimii $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x \text{ număr impar, cu } 3\le x<14\}$.

Rezolvare: Numerele care verifică inegalitățile din enunț sunt: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Dintre acestea le selectăm pe cele impare și obținem $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

2. Scrieți mulțimea $B=\{1,5,25,125,625\}$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor.

Rezolvare: Observăm că toate elementele mulțimii B sunt puteri ale lui 5: $1 = 5^0$, $5 = 5^1$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$ și $625 = 5^2$, cu exponenții numere naturale de la 0 la 4. Astfel, mulțimea se poate scrie sub forma $B=\{5^n \mid n\in\mathbb{N}, 0\le n\le 4\}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Dă exemple de mulțimi având ca elemente *obiecte*:

a) din clasa ta; **b)** de la matematică; **c)** de la geografie; **d)** de la limba română.

2. Găsește greșeala și rescrie corect mulțimile: $A = \{3, 5, 7, 9, 5\}$; $B = \{x, y, x, z\}$; $C = \{3, 3, 3\}$; $D = \{2, b, 3, b\}$; $E = \{3, a, 5, a, 3\}$.

3. Scrie mulțimea cifrelor numărului: **a)** 233696; **b)** 44223; **c)** 100000; **d)** 111111.

4. Reprodu și completează spațiile punctate cu simbolul potrivit „$\in$” sau „$\notin$”:

a) $2 \ldots \{1, 2, 3\}$; **b)** $m \ldots \{a, b, c\}$; **c)** $7 \ldots \{5, 7, 6, 8\}$; **d)** $0 \ldots \varnothing$.

5. Reprezintă în trei moduri mulțimile: A = Mulțimea cifrelor impare;
B = Mulțimea vocalelor alfabetului latin; C = Mulțimea multiplilor lui 4, mai mici decât 30;
D = Mulțimea numerelor naturale care, înmulțite cu 3, dau 18; E = Mulțimea divizorilor lui 9.

★★

6. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor enunțuri:

a) $2\in\{x \mid x\in\mathbb{N},\ 3\cdot x-1\}$; **b)** $3\in\{x \mid x=2n, n\in\mathbb{N}\}$; **c)** $0\notin\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^2\le 4\}$.

7. Reprezintă fiecare mulțime prin enumerarea elementelor sale:

$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<7\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 3\le x<8\}$, $C=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 7\,\vdots\, x\}$,

$D=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x+3=4\}$, $E=\{x \mid x\in\mathbb{N}^*, x-1\le 2\}$.

★★★

8. Reprezintă fiecare mulțime, folosind proprietatea caracteristică a elementelor sale:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $B=\{0,2,4,\ldots,16\}$, $C=\{1,3,5,7,\ldots,15\}$,

$D=\{0,3,6,9,12,15\}$, $E=\{0,1,4,9,16,25,36\}$.

9. Precizează care dintre următoarele mulțimi sunt finite și care sunt infinite:

$A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 5\cdot x+4=19\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x-7<3\}$,

$C=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}$, $D=\{x \mid x=3n+2, n\in\mathbb{N}\}$.

LECȚIA 2. Relații între mulțimi

Atenție, începem!

Ce înțelegem prin *mulțimi egale?*

A1. Prin ce se caracterizează *mulțimea vidă?* Arătați că mulțimile: A = {*ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie, decembrie*} și B ={x|x *lună a anului care are 31 de zile*} au aceleași elemente.

A2. Arătați că mulțimea C a literelor cuvântului *analog* este egală cu mulțimea D a literelor cuvântului *golan*.

Ce înțelegem prin submulțime sau parte (mulțime inclusă în altă mulțime) a unei mulțimi?

A3. Dacă A este mulțimea literelor cuvântului *răstit* și B cea a literelor cuvântului *săritor,* scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și răspundeți la întrebările:

a) Orice element al mulțimii A este element al mulțimii B?
Este mulțimea A inclusă în B? Este A submulțime a lui B?

b) Există cel puțin un element al lui B care nu aparține lui A?
Este mulțimea B inclusă în A? Este B submulțime a lui A?

A4. Indicați patru submulțimi ale mulțimii scaunelor de pe stadionul din figură.

Ce ne învață teoria?

1. Două mulțimi A și B sunt ***egale*** dacă au ***aceleași elemente.*** Notăm $\boldsymbol{A = B}$.
Două mulțimi A și B, care nu au *aceleași elemente*, nu sunt egale, chiar dacă au același număr de elemente. Notăm $\boldsymbol{A \neq B}$.

***Exemple*:**

a) Mulțimea $M = \{c, o, ș\}$ a literelor cuvântului „cocoș” și mulțimea $N = \{c, o, ș\}$ a literelor cuvântului „șoc” sunt egale. Notăm $M = N$.

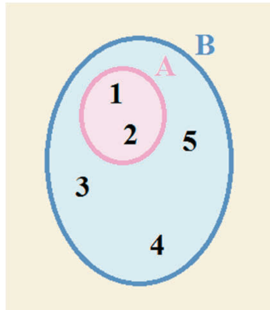
b) Mulțimile $D_3 = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 3\} \neq D_5 = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 5\}$, deoarece $3 \in D_3 = \{1, 3\}$ și $3 \notin D_5 = \{1, 5\}$.

2. O mulțime A este ***submulțime*** a mulțimii B (sau mulțimea A este inclusă în mulțimea B) dacă fiecare element x din A este în același timp și element al mulțimii B. Notăm $A \subseteq B$.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci A nu este submulțime a lui B și notăm $A \not\subseteq B$.

3. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi. Orice mulțime A are submulțimile A și $\varnothing$, numite ***submulțimi improprii***. Orice submulțime a lui A, diferită de $\varnothing$ și de A, dacă există, se numește ***submulțime proprie*** a lui A. Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$.

4. Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi M formează **mulțimea părților mulțimii** $\boldsymbol{M}$ și se notează $P(M)$.

Exemple:



a) În figura alăturată mulțimea $A = \{1, 2\}$ este o submulțime a mulțimii $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru că cele două elemente ale lui A sunt în același timp și elemente ale lui B; notăm $A \subset B$;

b) Mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nu este submulțime a lui $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, pentru că $5 \in B$, dar $5 \notin C$; notăm $B \not\subset C$.

c) Dacă A este mulțimea literelor cuvântului „pici” și B mulțimea literelor cuvântului „cip”, atunci $A = \{p, i, c\}$ și $B = \{c, i, p\}$. Prin urmare $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$. Deci $A = B$.

d) Mulțimea $A = \{0, 1, 2\}$ are următoarele submulțimi: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, A. Acestea formează mulțimea părților lui A, $P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$.

Să vedem ce am înțeles

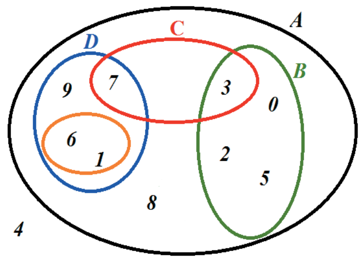
Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată:

a) Să scriem un element din mulțimea B și relația dintre acesta și celelalte mulțimi;

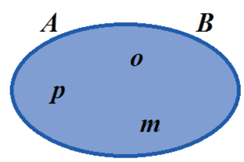
b) Să scriem relația dintre mulțimea B și celelalte mulțimi;

c) Să scriem două submulțimi ale mulțimii D;

d) Să scriem patru mulțimi care nu sunt incluse în D.

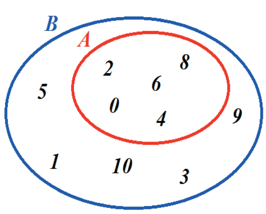


Învățăm să rezolvăm



1. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „*pom*”$\}$ și $B = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „*mop*”$\}$. Stabiliți dacă $A = B$.

Rezolvare: $m \in A$ și $m \in B$, $o \in A$ și $o \in B$, de asemenea $p \in A$ și $p \in B$. Deci $A = B$.



2. Stabiliți relația dintre mulțimile $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$ și $B = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$.

Rezolvare: $0 \in A$ și $0 \in B$, $2 \in A$ și $2 \in B$, $4 \in A$ și $4 \in B$, $6 \in A$ și $6 \in B$, $8 \in A$ și $8 \in B$. Deci toate elementele din A se află în B, adică $A \subseteq B$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Reprodu și înlocuiește spațiile punctate cu unul dintre simbolurile „$\subset$”, „$\not\subset$”sau „$\subseteq$”:

a) $\{b\}$ ... $\{a, b, c\}$; **b)** $\{2\}$ ... $\{1, 2, 4\}$; **c)** $\{l, m\}$ ... $\{l, m, n\}$;

d) $\{l, m, n\}$ ... $\{l, m, n\}$; **e)** $\{0\}$ ... $\varnothing$.

2. Reprodu și completează enunțul cu simbolul potrivit: „=” sau „≠”. Dacă A este mulțimea formată din literele cuvântului *pepene* și B este mulțimea formată din literele cuvântului *pene,* atunci A … B.

3. Descoperă și corectează greșeala:

a) $\Delta \subset \{\Delta, \bigcirc, \square\}$; **b)** $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$; **c)** $\varnothing \in \{0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \vdots x\}$; **e)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 = 2\} \subseteq \{6\}$;

f) $\{x \mid x$ este ultima cifră a puterilor lui $3\} \subseteq \{1, 3, 7, 9\}$; **g)** $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \vdots x\}$;

h) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{0, 3, 6, 9, 12\}$; **i)** $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\} \subset \{1, 2, 3\}$;

j) $\{n \mid 2^n = 1\} \subset \{0, 1\}$; **k)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 2 = 6\} \subset \{1, 2, 3\}$;

l) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \leq 3\} \subseteq \{0, 1\}$; **m)** $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 2 = 1\} \subseteq \{2x - 1 < 3\}$.

4. Determină x, astfel încât mulțimea $\{x, 2\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ este *cifră pară*$\}$ și $B = \{0, x, 4, 6, 8\}$. Stabiliți valoarea lui x, dacă $A = B$.

6. Pentru mulțimea $A = \{a, b, c\}$, scrie:

a) submulțimile improprii; **b)** toate submulțimile.

7. Pentru numărul 12, scrie mulțimea divizorilor:

a) proprii; **b)** improprii.

8. Scrie submulțimea multiplilor lui 2:

a) mai mici decât 12; **b)** cel mult egali cu 14.

9. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 8, pentru numărul 3, apoi rezolvă problema.

10. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 7, pentru numărul 14, apoi rezolvă problema.

11. Fie mulțimea $A = \{0, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Scrie submulțimea mulțimii A formată din:

a) multiplii lui 2; multiplii lui 3; multiplii lui 4; multiplii lui 6;

b) divizorii lui 6; divizorii lui 8; divizorii lui 9; divizorii lui 10.

12. Scrie două submulțimi ale mulțimii $\{3, 6, 8, 15, 27\}$, care să satisfacă simultan condițiile:

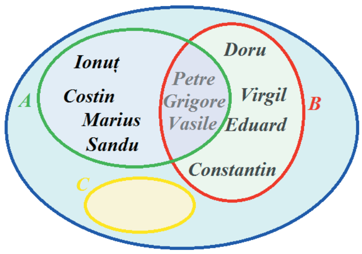
a) nu au elemente comune; **b)** au aceeași sumă a elementelor.

LECȚIA 3. Operații cu mulțimi

Atenție, începem!

A1. Într-o clasă a VI-a, sunt elevi care fac parte din echipa de fotbal a școlii, din echipa de handbal, din ambele echipe și elevi care nu fac sport.

Fie A = {*Ionuț, George, Costin, Vasile, Petre, Sandu, Marius*} mulțimea elevilor care fac parte din echipa de fotbal, B = {*Doru, Virgil, Petre, Vasile, George, Constantin, Eduard*} mulțimea elevilor care fac parte din echipa de handbal și C mulțimea elevilor care nu fac sport. Folosind reprezentarea prin diagrame a mulțimilor date, determinați:



a) mulțimea elevilor care fac parte atât din echipa de fotbal cât și din echipa de handbal;

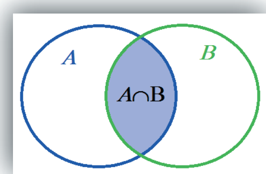
b) mulțimea celor care fac parte numai din echipa de fotbal, respectiv numai din cea de handbal;

c) mulțimea elevilor care fac parte din cel puțin una dintre echipele de fotbal sau de handbal;

d) mulțimea elevilor care sunt în echipa de handbal și care nu fac sport.

Ce ne învață teoria?

1. *Intersecția* a două mulțimi A și B este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B. Scriem $\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}}$. Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc ***mulțimi disjuncte.***



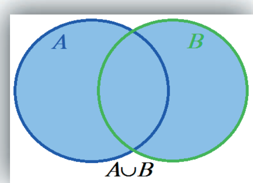
***Exemple*:**

a) Dacă $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d,e\}$ și $C=\{d,e,f\}$ atunci $A \cap B = \{c\}$, iar $A \cap C = \varnothing$;

b) Intersecția mulțimii vide cu o mulțime oarecare M este mulțimea vidă: $M \cap \varnothing = \varnothing \cap M = \varnothing$.

c) *Detectivul și intersecția mulțimilor.* Celebrul detectiv Sherlock Holmes căuta numele unei nave cu pânze, pentru rezolvarea unui caz. El știa doar că, în ianuarie 1883, acea corabie fusese la Pondichéry (sud-estul Indiei), în ianuarie 1885, la Dundee (Scoția), iar în septembrie 1887, când se desfășura ancheta, corabia se afla în portul Londrei. Folosind aceste date el a stabilit denumirea navei, constatând că din intersecția mulțimilor: corăbiilor aflate în ianuarie 1883 la Pondichéry, a celor aflate în ianuarie 1885 la Dundee și a celor aflate în septembrie 1887 la Londra a făcut parte o singură navă.

2. *Reuniunea* a două mulțimi A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Scriem $\boldsymbol{A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}}$.



***Exemple*:**

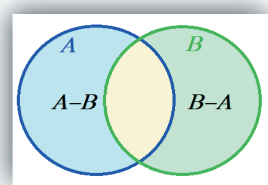
a) Reuniunea mulțimilor $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6\}$ este mulțimea $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

b) Reuniunea mulțimii vide cu o mulțime oarecare M este mulțimea M: $M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M$.

3. *Diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea formată din elementele lui A care nu aparțin lui B. Scriem

$$\boldsymbol{A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}}.$$

Observație: $\boldsymbol{A \setminus B \neq B \setminus A}$.



***Exemple*:**

a) Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5\}$ și $C = \{5, 6, 7\}$, atunci: $A \setminus B = \{2, 3\}$, $B \setminus A = \{5\}$, iar $A \setminus C = \varnothing$;

b) Diferența dintre o mulțime oarecare M și mulțimea vidă este mulțimea M: $M \setminus \varnothing = M$;

c) Diferența dintre mulțimea vidă și o mulțime oarecare M este mulțimea vidă: $\varnothing \setminus M = \varnothing$;

d) Diferența dintre o mulțime oarecare M și ea însăși este mulțimea vidă: $M \setminus M = \varnothing$.

Să vedem ce am înțeles

Considerăm mulțimile A, B, C, D, cu literele din cuvintele: *matematica*, *informatica*, *gramatica*, *aritmetica*. Să scriem prin enumerare:

a) mulțimile A, B, C, D;

b) 6 intersecții ale oricăror două dintre mulțimi;

c) reuniunile oricăror două dintre mulțimi;

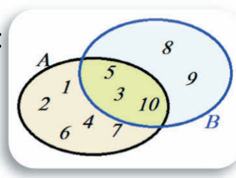
d) 12 diferențe ale oricăror două dinttre mulțimi.

Învățăm să rezolvăm

1. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; **b)** $A \cap B = \{3, 5, 10\}$;

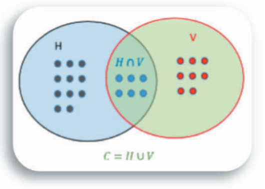
c) $A \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$; **d)** $B \cup \{1, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.



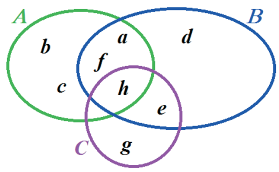
***Rezolvare*:** Din condiția **b)** rezultă: $3 \in A$ și $3 \in B$; $5 \in A$ și $5 \in B$; $10 \in A$ și $10 \in B$. Din condiția **c)** rezultă: $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$, $10 \in A$. Din condiția **d)** rezultă: $3 \in B$, $5 \in B$, $8 \in B$, $9 \in B$, $3 \in B$. Din condițiile **a)**, **b)**, **c)** și **d)** rezultă: $\{2, 4, 6\} \subset A$.

Deci, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$ și $B = \{3, 5, 8, 9, 10\}$.

2. Cei 25 de elevi ai unei clase a VI-a practică cel puțin unul dintre sporturile volei sau handbal. Dacă 17 elevi practică handbal și 14 elevi practică volei, aflați câți elevi din clasă practică numai handbal și câți practică numai volei.



Rezolvare: Fie C mulțimea elevilor clasei, H mulțimea elevilor clasei care practică handbal și V mulțimea celor care practică volei. Avem $|C| = 25$, $|H| = 17$, $|V| = 14$ și obținem $|H \cap V| = 17 + 14 - 25 = 6$. Atunci, $17 - 6 = 11$ elevi practică numai handbal și $14 - 6 = 8$ elevi practică numai volei.



1. În desenul alăturat sunt reprezentate mulțimile A, B și C.

a) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor ;

b) Scrie următoarele mulțimi prin enumerare: $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$; $E = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$; $M = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

2. Identifică egalitățile adevărate:

a) $\{3\} \cap \{a\} = \varnothing$; **b)** $\{1\} \setminus \{2\} = \varnothing$; **c)** $\{5\} \cup \{1\} = \{1, 5\}$; **d)** $\{5\} \cap \{1, 5\} = \varnothing$;
e) $\{1, 5\} \cup \varnothing = \varnothing$; **f)** $\{2, 3, 4\} \cap \varnothing = \{2, 3, 4\}$; **g)** $\{2, 3\} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$.

3. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ și $C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Calculează:

$A \cup B$; $B \cup A$; $A \cap B$; $(A \cup B) \cup C$;
$A \cup (B \cup C)$; $B \cap A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$;
$(A \setminus B) \setminus C$; $A \setminus (B \setminus C)$.

4. Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 16\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^3 \leq 64\}$. Calculează:

$A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

5. Fie mulțimea $C = \{a, b, c\}$. Scrie câte două mulțimi A și B, ale mulțimii C, astfel încât:

a) $A \cup B = C$; **b)** $A \cap B = C$; **c)** $A \setminus B = C$.

6. Fie A și B două mulțimi, cu $|A| = 12$ și $|B| = 10$. Determină:

a) $|A \cap B|$, dacă $|A \cup B| = 15$; **b)** $|A \cup B|$, dacă $|A \cap B| = 5$;

c) cel mai mare și cel mai mic cardinal posibil pentru $A \cup B$ și $A \cap B$.

7. Fie mulțimile $A = \{1, 2, x\}$ și $B = \{1, y, 3\}$. Determină x și y, astfel încât $A \cap B = A \cup B$.

8. Determină mulțimile X și Y, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $X \setminus Y = \{3, 4, 5\}$; **b)** $Y \cap X = \{0, 1\}$; **c)** $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

9. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq 6, a \in \mathbb{N}\}$. Determină $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \cap B = \{4\}$.

Proiect scratch

Modelează scenariul: „Bebe M” intră în scenă și spune „Mulțimi” pentru 2 secunde. Apoi spune „Dacă A = {1,2,3,4,5}” (cele 5 numere sunt aleatorii). Apoi apare „Big M” care întreabă: „Este adevărat că 3 se află în A (D/N)?” (număr aleatoriu). Și se așteaptă răspunsul „D”, adică Da, sau „N”, adică Nu. Dacă răspunsul este corect, „Big M” spune „Bravo !”, dacă nu, atunci „Big M” spune „Of !”.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Dacă $A=\{a,l,f,b,e,t,r\}$, $B=\{a,r,i,t,m,e,c\}$, $C=\{i,m,c\}$, atunci C este:

a)	b)	c)	d)
diferența mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	reuniunea mulțimilor A și B	intersecția mulțimilor A și B

2. Dacă A este mulțimea numerelor naturale cel puțin egale cu 5 și B este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5, atunci *mulțimea vidă* este:

m)	n)	o)	p)
diferența mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	reuniunea mulțimilor A și B	intersecția mulțimilor A și B

3. Dacă A, B sunt mulțimi, atunci $C = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ este:

a)	b)	c)	d)
reuniunea mulțimilor B și A	diferența mulțimilor A și B	diferența mulțimilor B și A	intersecția mulțimilor A și B

4. Mulțimea numerelor naturale obținute ca sumă de două numere naturale de două cifre este:

p)	q)	r)	s)
$\{21,22,22,...,197\}$	$\{10,11,12,...,99\}$	$\{20,21,22,...,198\}$	$\{0,1,2,...,18\}$

5. Cardinalul mulțimii numerelor naturale de două cifre distincte este:

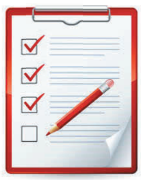
t)	ț)	u)	v)
20	81	90	10

6. Dintre mulțimile: A a literelor cuvântului „cinci”, B a cardinalelor mulțimilor literelor cu care se scriu cifrele, C a obiectelor din penar, D a bomboanelor din acest test, cea numerică este:

h)	i)	j)	k)
A	B	C	D

7. Afirmația falsă este:

l)	m)	n)	o)
nicio mulțime de părți nu este vidă.	o mulțime cu două elemente are exact patru submulțimi.	mulțimea vidă este element al ei înseși.	mulțimea vidă are cardinalul nul.



Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Valoarea de adevăr a propoziției $3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ este … .

10p **2.** Mulțimea literelor din cuvântul „matematica” este mulțimea … .

10p **3.** Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 4, 5\}$, atunci $A \cap B$ este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 3 \leq 9\right\}$ sunt:

a) $\{1, 2, 3\}$; **b)** $\{0, 1, 2, 3\}$; **c)** $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **d)** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

10p **2.** Cardinalul mulțimii $M = \left\{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n - 5, n \in \mathbb{N}, n \leq 30\right\}$ este:

a) 29; **b)** 31; **c)** 30; **d)** 28.

10p **3.** Dacă mulţimea A are 25 elemente, mulţimea B are 34 elemente, iar $A \cap B$ are 15 elemente, atunci cardinalul mulţimii $A \cup B$ este:

a) 9; **b)** 74; **c)** 44; **d)** 59.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Se dau mulţimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$, $C = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.
Calculați: **a)** $A \cup C$; **b)** $A \cap B$; **c)** $C \setminus A$; **d)** $(A \cup C) \setminus B$.

10p **2.** Aflaţi mulţimile X şi Y, ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $X \cap Y = \{3, 4\}$, **b)** $X \setminus Y = \{1, 2\}$, **c)** $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

10p **3.** Fie mulțimile $A = \left\{a \in \mathbb{N} \mid a = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*, n < 3\right\}$, $B = \left\{b \in \mathbb{N} \mid b = a - 2, a \in A\right\}$ și $C = \left\{c \in \mathbb{N} \mid c = 2b - 1, b \in B\right\}$. Determinați mulțimile A, B și C prin enumerare.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Elementele mulțimii $\{x| \ x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 5\}$ sunt… .

10p **2.** Cardinalul mulțimii $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ este … .

10p **3.** Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 4, 5\}$, atunci $A \cup B$ este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < 3x - 2 \leq 10\}$ sunt:

a) $\{2, 3, 4\}$; **b)** $\{3, 4\}$; **c)** $\{7, 8, ..., 12\}$; **d)** $\{5, 6, ..., 10\}$.

10p **2.** Cardinalul mulțimii $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3n - 4, n \in \mathbb{N}, x < 25\}$ este:

a) 10; **b)** 7; **c)** 9; **d)** 8.

10p **3.** Dacă mulţimea A are 125 elemente, mulţimea B are 287 elemente, iar $A \cup B$ are 15 elemente, atunci cardinalul mulțimii $A \cap B$ este:

a) 104; **b)** 412; **c)** 287; **d)** 125.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

1. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x + 2, x \in A\}$, $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 2x, x \in A\}$.

10p **a)** Scrie mulțimile A, B și C enumerând elementele lor;

10p **b)** Precizează care dintre propozițiile de mai jos sunt advărate și care sunt false:

i) $\{5,6\} \subset A$; **ii)** $A \subset C$; **iii)** $\{7,8\} \subset B$.

10p **2.** Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:

i) $3 \in \{0, 1, 3, 7, 9\}$; **ii)** $2 \in \{1, 4, 5\}$;

iii) $\{1, 2, 5\} \in \{0, 1, 2, 4\}$; **iv)** $\{1,2,5\} \subset \{0,1,2,5,7\}$.

3. Dacă $A = \{a, b\}$ și $B = \{b, c\}$, calculează:

a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Unitatea de învățare: Mulțimea numerelor naturale

LECȚIA 4. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Atenție, începem!

A1. Un cofetar promovează cele 12 sortimente de bomboane de ciocolată, așezându-le în cutii cu alveole, fiecare alveolă coținând o singură bomboană din fiecare sortiment. Astfel, se așează bomboanele în cutii de tipul:

Un strat cu un rând de 12 bomboane

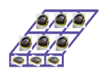
$12 = 1 \cdot 12$

Un strat cu 2 rânduri și 6 coloane

$12 = 2 \cdot 6$

Un strat cu 3 rânduri și 4 coloane

$12 = 3 \cdot 4$



Două straturi cu câte 2 rânduri și 3 coloane

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

a) Ce altă propunere de prezentare a bomboanelor puteți face ?

b) Ce variante de cutii ați prezenta cofetarului dacă numărul noilor sortimente ar fi 18 ?

Ce ne învață teoria?

1. Oricare număr natural a, $a \neq 1$ are cel puțin divizorii 1 și a. Un număr natural mai mare decât 1, care are exact doi divizori (pe 1 și pe el însuși), se numește ***număr prim***. Dacă mai are și alți divizori se numește ***număr compus.***

Observație: **Singurul număr par prim este 2.**

În figura alăturată sunt prezentate, într-o variantă a ciurului lui Eratostene, numerele prime și numerele compuse cel mult egale cu 100. Sunt hașurate cu albastru numere divizibile cu 2, cu roz, numerele divizibile cu 5, cu galben, numerele divizibile cu 3 și cu verde, multipli ai lui 7. În pătratele nehașurate sunt numerele prime.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2 - 3 - 5 - 7
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11 - 13 - 17 - 19
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	23 - 29
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	31 - 37
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	41 - 43 - 47
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	53 - 59
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	61 - 67
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	71 - 73 - 79
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	83 - 89
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	97 ...

2. Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de puteri de numere prime. Scrierea este unică, abstracție făcând de ordinea factorilor.

***Exemplu*:** La descompunerea în produs de puteri de numere prime a numărului 264 procedăm astfel: identificăm cel mai mic divizor prim al lui 264, 2 în acest caz. Efectuăm împărțirea 264 : 2, obținem câtul 132, deci $264 = 2 \cdot 132$. Aplicând procedeul factorului $132 = 2 \cdot 66$ și obținem $264 = 2 \cdot 2 \cdot 66$. Cum $66 = 2 \cdot 33$, rezultă $264 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 33$. Prin înlocuirea lui 33 cu $3 \cdot 11$, obținem $264 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$. Factorul 11 este număr prim, iar descompunerea este terminată. În practică, organizăm calculele astfel: În dreapta liniei verticale apar factorii primi ai lui 264, iar în stânga câturile împărțirilor descrise anterior.

$$\begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Astfel, am obținut descompunerea $264 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Observație: Pentru descompunerea în produs de puteri de numere prime a unui număr natural, care se termină în „0”, utilizăm descompunerile: $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, ..., $\underbrace{100...0}_{n\ zerouri} = 2^n \cdot 5^n$.

3. Pentru identificarea unui număr natural prim, procedăm astfel:
- împărțim numărul dat succesiv la toate numerele naturale prime, luate în ordine crescătoare, până când obținem câtul mai mic decât împărțitorul;
- dacă niciuna dintre împărțirile efectuate nu are restul 0, atunci numărul este prim;
- dacă la una dintre împărțiri restul este 0, atunci numărul este compus

***Exemple*:**

a) Stabilim dacă 139 este număr prim: 139 nu este divizibil cu 2, cu 3, cu 5, $139 = 7 \cdot 19 + 6$ și $7 < 19$, $139 = 11 \cdot 12 + 7$ și $11 < 12$, $139 = 13 \cdot 10 + 9$ și $13 > 10$. Numărul 139 este prim.

b) Stabilim dacă 221 este număr prim: 221 nu este divizibil cu niciunul dintre numerele 2, 3, 5, 7, 11, dar $221 = 13 \cdot 17$. Numărul 221 este compus.

Să vedem ce am înțeles

1. Să scriem numărul 144000 ca produs de puteri de numere prime. Apoi și numărul $(2 \cdot 9 \cdot 49)^2$.

2. Să stabilim dacă sunt adevărate afirmațiile: Dacă un număr natural

a) de 4 cifre se termină în 6, sigur este compus;

b) are o singură cifră, sigur este prim;

c) de cel puțin două cifre are toate cifrele egale, sigur este compus;

d) se termină în 5, sigur este compus.

Învățăm să rezolvăm

1. Descompuneți numărul 3600 în produs de puteri de factori primi.

***Rezolvare*:**

3600	$2^2\cdot 5^2$	$\leftarrow$ 3600 *se divide cu* 100
$3600:100=36\to 36$	2	$\leftarrow$ 36 *se divide cu* 2
$36:2=18\to 18$	2	$\leftarrow$ 18 *se divide cu* 2
$18:2=9\to 9$	3	$\leftarrow$ 9 *se divide cu* 3
$9:3=3\to 3$	3	$\leftarrow$ 3 *se divide cu* 3
$3:3=1\to 1$		Deci: $3600=2^2\cdot 5^2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2$.

2. Demonstrați că orice număr natural mai mare sau egal cu 3 se poate scrie ca sumă de numere prime.

***Rezolvare*:** Considerăm numărul natural oarecare n, cu $n\ge 3$. Numărul n poate fi par sau impar.

Dacă n este un număr par, avem: $n=2k$, cu $k\in\mathbb{N}, k\ge 2$. Atunci, se poate scrie $n=\underbrace{2+2+...+2}_{k \text{ termeni}}$, ca sumă de k numere prime.

Dacă n este un număr impar, avem $n=2k+1$, cu $k\in\mathbb{N}, k\ge 1$. Atunci, se poate scrie $n=2k+1=3+2k-2=3+2\cdot(k-1)=3+\underbrace{2+2+...+2}_{k-1 \text{ termeni}}$, ca sumă de k numere prime.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Se consideră mulțimea $A=\{2,3,6,15,23,31,33,54,67,97\}$.

a) Scrie mulțimea numerelor prime care aparțin mulțimii A;

b) Scrie mulțimea numerelor compuse care aparțin mulțimii A.

2. Scrie ca produs de două numere prime numerele: 15, 22, 35, 39, 65, 77, 91.

3. Determină intersecția mulțimilor $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}$, x număr par$\}$ și $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}$, x prim$\}$.

4. Descompune în produs de puteri de numere prime următoarele numere:

a) 12, 24, 60, 75; **b)** 120, 576, 324, 800; **c)** 2475, 4410, 12100, 19008.

5. Fără a efectua calculele, scrie toți divizorii numerelor:

a) $13\cdot 19$; **b)** $5^2\cdot 11$; **c)** $5\cdot 11^3$; **d)** $5^2\cdot 11^2$; **e)** $5^3\cdot 11^3$; **f)** $5\cdot 11\cdot 13$; **g)** $5^2\cdot 11\cdot 13$.

★★

7. Cunoscând prima descompunere, scrie direct descompunerile numerelor următoare:

a) $250=5^3\cdot 2$;	$750=$	$1000=$	$2500=$
b) $12=2^2\cdot 3$;	$60=$	$36=$	$120=$

8. Scrie ca produs de puteri de factori primi numerele: **a)** 15^3; **b)** 121^4; **c)** 90^2; **d)** $(4\cdot 5)^3$; **e)** $(4\cdot 25)^3$.

★★★

9. Suma a două numere prime este 104. Află cele două numere. Câte soluții are problema?

10. Găsește patru exemple de numere naturale diferite care au același număr de divizori.

LECȚIA 5. Determinarea *c.m.m.d.c.* și a *c.m.m.m.c.*; numere prime între ele

Atenție, începem!

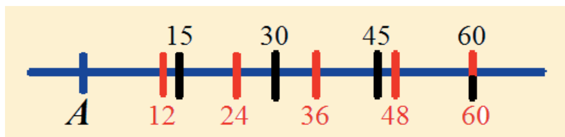
A1. Pentru un eveniment, Radu realizează buchete cu același număr de trandafiri și buchete cu același număr de crizanteme. El are la dispoziție 24 de fire de trandafiri și 36 de fire de crizanteme și remarcă faptul că numărul firelor de trandafiri din fiecare buchet trebuie să fie un divizor al lui 24, în timp ce numărul crizantemelor din fiecare buchet trebuie să fie un divizor al lui 36.

a) Analizați tabelul următor și stabiliți numărul maxim comun al buchetelor de trandafiri și crizanteme pe care Radu le poate realiza:

Numărul firelor de trandafiri dintr-un buchet	1	2	3	4	6	8	12	24	
Numărul buchetelor de trandafiri care se pot obține	24	12	8	6	4	3	2	1	
Numărul firelor de crizanteme dintr-un buchet	1	2	3	4	6	9	12	18	36
Numărul buchetelor de crizanteme care se pot obține	36	18	12	9	6	4	3	2	1

b) Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 24 și 36 și stabiliți legătura dintre acesta și numărul de buchete ce se pot realiza cu 24 fire de trandafir și 36 fire de crizantemă.

A2. Se consideră o dreaptă d și un punct A al ei. Pornind din A, de aceeași parte a lui A, punctele aflate pe dreaptă din 12 în 12 mm sunt marcate cu roșu, iar cele situate din 15 în 15 mm sunt marcate cu negru. Aflați la ce distanță de A se află primul punct marcat și cu roșu și cu negru.



Ce ne învață teoria?

<table>
<tr><td rowspan="2">Cel mai</td><td>mare</td><td>divizor</td><td rowspan="2">comun al două sau al mai multor numere naturale, nu toate nule, este acel</td><td>divizor</td><td rowspan="2">al lor care</td><td>se divide cu</td><td rowspan="2">oricare dintre</td><td>divizorii</td><td rowspan="2">comuni ai</td><td rowspan="2">numerelor date.</td></tr>
<tr><td>mic</td><td>multiplu</td><td>multiplu nenul</td><td>divide</td><td>multiplii</td></tr>
</table>

***Exemplu*:** Pentru numerele $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ și $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, *c.m.m.d.c.* este $(3500, 600) = 2^2 \cdot 5^2 = 100$ și *c.m.m.m.c.* este $[3500, 600] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 21000$.

1. Pentru ***c.m.m.d.c.*** se alege **exponentul minim al factorilor comuni** din descompunere (dacă factorul nu apare înseamnă că exponentul este nul), iar pentru ***c.m.m.m.c.*** se alege **exponentul maxim, al factorilor comuni și necomuni** din descompunere, scriși o singură dată.

2. *c.m.m.d.c.* al numerelor 0 și a, $a \in \mathbb{N}^*$, este $(0, a) = a$.

3. Două sau mai multe numere naturale care au *c.m.m.d.c.* egal cu 1 se numesc ***prime între ele***. Dacă numerele a, b sunt prime între ele, notăm $\mathbf{(a, b) = 1}$.

Exemplu: 2 și 7 sunt prime între ele, pentru că $(2,7) = 1$; dar 2 și 8 nu sunt prime între ele, pentru că $(2,8)=2$.

4. Dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $b|a$, $c|a$ și $(b, c) = 1$, atunci $b \cdot c|a$.

Într-adevăr, deoarece b și c sunt divizori ai lui a, există numerele naturale p și q astfel încât $a = b \cdot p$ și $a = c \cdot q$, deci $b \cdot p = c \cdot q$. Din $(b, c) = 1$ și $c|b \cdot p$ deducem că $c|p$, deci există numărul natural k astfel încât $p = c \cdot k$. Prin urmare $a = b \cdot (c \cdot k) = (b \cdot c) \cdot k$, adică $b \cdot c|a$.

5. Cel mai mic multiplu comun al două sau al mai multor numere naturale, oricare două prime între ele, este produsul lor.

Exemplu: $[2, 5, 13] = 2 \cdot 5 \cdot 13 = 130$, pentru că $(2, 5) = 1$, $(2, 13) = 1$ și $(5, 13) = 1$.

6. Dacă a și b sunt două numere naturale nenule astfel încât $a|b$, atunci $[a, b] = b$

Exemplu: $[13, 39] = 39$, deoarece $13|39$.

7. Relația dintre *c.m.m.d.c.* și *c.m.m.m.c.* al numerelor naturale a și b este

$$\mathbf{(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b}.$$

Exemplu: $(6, 15) = 3$; $[6, 15] = 30$ și $(6, 15) \cdot [6, 15] = 3 \cdot 30 = 90 = 6 \cdot 15$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să scriem cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5, b = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$.

2. Să stabilim dacă sunt adevărate următoarele enunțuri:

a) Dacă două numere sunt prime între ele, atunci *c.m.m.m.c.* este produsul lor;

b) Dacă două numere diferite sunt prime, atunci ele sunt prime între ele;

c) Două numere pare nu sunt niciodată prime între ele;

d) Un număr natural și un număr prim sunt întotdeauna prime între ele.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați *c.m.m.d.c.* și *c.m.m.m.c.* al numerelor 420, 70 și 504.

***Rezolvare*:** Pentru a calcula *c.m.m.d.c.* și *c.m.m.m.c.* ai două sau ai mai multor numere, mai întâi descompunem numerele în produs de puteri de factori primi. Astfel, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ și $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Pentru a afla *c.m.m.d.c.*, alegem factorii comuni din cele trei descompuneri, la puterea cea mai mică și obținem (420, 70, 504) = 2 · 7 = 14. Pentru a afla *c.m.m.m.c.*, alegem atât factorii comuni cât și pe cei necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare și obținem $[420, 70, 504] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

2. Aflați numerele naturale de forma $\overline{4a27b}$ divizibile cu 2 și 5.

***Rezolvare*:** Numerele 2 și 5 fiind prime între ele, e suficient să găsim numerele naturale de forma cerută divizibile cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 2 și 5, adică cu 10. Cum divizibilitatea cu 10 arată că ultima cifră este 0, rezultă $b = 0$. Deducem că numerele căutate sunt: 40270, 41270, 42270, ... , 49270.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Scrie mulțimea divizorilor și apoi află *c.m.m.d.c.* al numerelor din fiecare pereche de numere date:
a) 12 și 8; **b)** 10 și 25; **c)** 18 și 24; **d)** 15 și 25;
e) 20 și 28; **f)** 8 și 26; **g)** 24 și 22.

2. Află *c.m.m.d.c.* al numerelor din perechile date, folosind descompunerea în produs de factori primi:
a) 108 și 45; **b)** 57 și 38; **c)** 120 și 48; **d)** 42 și 54;
e) 182 și 42; **f)** 24 și 36.

3. Află *c.m.m.d.c.*al tripletelor de numere:
a) 36, 16, 48; **b)** 8, 24, 36; **c)** 15, 36, 12; **d)** 20, 30, 40;
e) 126, 162, 270; **f)** 360, 2700, 630.

4. Scrie mulțimea primilor unsprezece multipli ai lui 3 și mulțimea primilor zece multipli ai lui 5 Calculează apoi, intersecția celor două mulțimi și află *c.m.m.m.c.* al numerelor 3 și 5.

5. Calculează *c.m.m.m.c.* al fiecărui grup de numere:
a) 2, 4, 6 și 8; **b)** 10, 15, 30 și 60; **c)** 20, 25, 45 și 70; **d)** 11, 33, 66 și 99.

6. Arată că următoarele perechi de numere sunt prime între ele:
a) 15 și 14; **b)** 12 și 37; **c)** 8 și 35; **d)** 13 și 14;
e) 87 și 88; **f)** n și $n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Scrie toate perechile de numere naturale care au *c.m.m.m.c.* egal cu: **a)** 1; **b)** 2; **c)** 5; **d)** 4; **e)** 6.

8. Află cel mai mic număr de sportivi care se pot alinia în coloane de câte 6, de câte 8 sau de câte 10.

9. Cantitatea de material dintr-un depozit poate fi transportată cu camioane, având capacitatea de 6t, 7t sau 9t. Află această cantitate, știind că este cuprinsă între 2200t și 2300t.

10. Producția zilnică de piese de același fel, a unui atelier, poate fi depozitată în lăzi cu capacitatea de 5, 6, 12 sau 15 piese. Care este numărul pieselor produse într-o zi în atelier, știind că el este cuprins între 400 și 450 ?

11. Află numerele naturale $\overline{a135b}$, scrise în baza zece, divizibile cu 2 și 9.

12. Află perechile de numere naturale care au suma 40 și *c.m.m.d.c.* 5.

LECȚIA 6. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$

Atenție, începem!

A1. În una din sălile de lectură, cu mai multe mese, dintr-o bibliotecă, fiecare masă are același număr de locuri, iar fiecare loc este prevăzut cu o priză electrică.
a) Precizați dacă numărul de locuri de la mese este divizibil cu numărul de prize și cu numărul 1; **b)** Cu ce cuvânt trebuie completat spațiul punctat, pentru ca enunțul „Oricare număr natural este ... cu 1 și cu el însuși" să fie adevărat? **c)** Cum se numesc numerele naturale nenule, diferite de 1, care au numai doi divizori: pe 1 și pe el însuși? **d)** Este divizibil numărul prizelor de la toate mesele cu numărul meselor? **e)** Cum se numesc numerele naturale care, pe lângă 1 și el însuși, au și alți divizori?

Ce ne învață teoria?

$1|a$, oricare ar fi numărul natural *a*.

$a|a$, oricare ar fi numărul natural *a*.

Citim (C): Oricare număr natural *a* este divizibil cu 1 și cu el însuși;

Demonstrăm (D): Într-adevăr $a = a \cdot 1$, oricare ar fi numărul natural *a*;

Exemple (E): $131 \vdots 131$, $131|131$, $131 \vdots 1$, $1|131$.

$a \vdots b$ și $b \vdots a \Rightarrow a = b$, unde $a, b \in$ *C*: Dacă numerele naturale *a*, *b* verifică: *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *a,* atunci $a = b$; *D*: Într-adevăr, cum *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *a*, există numerele naturale *p* și *q* astfel încât $a = bq$ și $b = aq$, de unde deducem $a = apq$. Dacă $a = 0$, atunci avem și $b = 0$; dacă $a \neq 0$, atunci $pq = 1$, deci $p = q = 1$. În concluzie $a = b$; *E:* Dacă $n|12$ și $12|n$, atunci $n = 12$, $n \in \mathbb{N}$.	**$c|b$ și $b|a \Rightarrow c|a$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$** *C*: Dacă numerele naturale *a*, *b*, *c* verifică *c* divide *b* și *b* divide *a*, atunci *c* divide *a*; *D*: Într-adevăr, cum *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *c*, există numerele naturale *p* și *q* astfel încât $a = bp$ și $b = cq$. Obținem $a = (cq)p = c(pq)$, de unde deducem că a este divizibil cu *c*; *E:* Din $3|15$ și $15|45$ rezultă că $3|45$.
$d|b$ și $d|a \Rightarrow d|(a \pm b)$, $d,a,b \in \mathbb{N}$, *C*: Dacă numerele naturale *a* și *b*, sunt divizibile cu *d*, atunci $a + b$ și $a - b$, $a \geq b$, sunt divizibile cu *d*; *D*: Într-adevăr, cum *d* este divizor al numerelor *a* și *b*, există numerele naturale *p* și *q* astfel încât $a = dp$, $b = dq$,	**$a|bc$ și $(a, b) = 1 \Longrightarrow a|c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$** *C*: Dacă *a,b,c* sunt numere naturale nenule și *a* divide produsul *bc*, iar *a* este prim cu *b*, atunci *a* divide *c*; *D*: Dacă numărul prim *p* se regăsește în descompunerea lui *a*, deoarece $a|bc$ rezultă că *p* se află în

unde $p \geq q$ întrucât $a \geq b$. Rezultă că $a + b = d(p + q)$ și $a - b = d(p - q)$. În concluzie, d divide numerele $a + b$ și $a - b$; E: $7 \mid 49$ și $7 \mid 63 \Longrightarrow 7 \mid (49 + 63) \Longrightarrow 7 \mid 112$; $11 \mid 22$ și $11 \mid n \Longrightarrow 11 \mid (n - 22)$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 22$.	descompunerea lui bc. Dar în descompunerea lui b nu se află. Prin urmare se află în descompunerea lui c, cu exponentul său; E: $7 \mid 84035$, dar $84035 = 5 \cdot 16807$ și $(5, 7) = 1$, rezultă că $7 \mid 16807$.

Observație: Dacă a, b și d sunt numere naturale, astfel încât d divide $a + b$ sau d divide $a - b$, $a \geq b$ și d divide un termen al sumei sau al diferenței, atunci d divide și celălalt termen.

Justificare: Într-adevăr, dacă d divide a și d divide $a + b$, atunci $a = dp$ și $a + b = dq$, unde $p, q \in \mathbb{N}$. Obținem $b = dq - dp = d(q - p)$, deci d îl divide pe b. La fel se justifică și celelalte cazuri.

Exemple: $7 \mid 35$ și $7 \mid a + 35 \Rightarrow 7 \mid a$, unde $a \in \mathbb{N}$; $7 \mid 21$ și $7 \mid 21 - b \Rightarrow 7 \mid b$, unde $b \in \mathbb{N}, b \leq 21$.

Să vedem ce am înțeles

1. În mulțimea numerelor naturale au loc: proprietățile relației de egalitate: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = a$; $a, b \in \mathbb{N}, a = b \Rightarrow b = a$; $a, b, c \in \mathbb{N}, a = b, b = c \Rightarrow a = c$; și proprietățile relației de inegalitate: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq a$; $a, b \in \mathbb{N}, a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$; $a, b, c \in \mathbb{N}, a \leq b \Rightarrow a \leq b + c$. Să scriem relațiile asemănătoare relative la divizibilitate.

2. Să arătăm că două numere cu aceeași paritate au suma număr par.

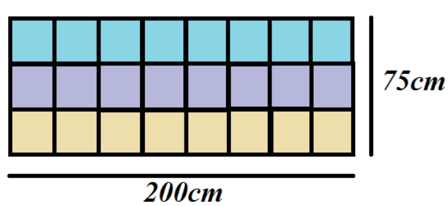
Învățăm să rezolvăm

1. Câte numere naturale de 4 cifre dau restul 4, la împărțirea la 7?

Rezolvare: Numerele care îndeplinesc cerința, sunt de forma $7k + 4$. Deci $1000 \leq 7k + 4 \leq 9999$. Scăzând 4 din cei 3 termeni obținem $996 \leq 7k \leq 9995$. Problema revine la a găsi câte numere divizibile cu 7 sunt între 996 și 9995. Cum $996 = 7 \cdot 142 + 2 < 1001 = 7 \cdot 143$, iar $9995 = 7 \cdot 1427 + 6 > 9989 = 7 \cdot 1427$, rezultă că numerele naturale care satisfac condițiile din enunț sunt cuprinse între 143 și 1427. Numărul lor este $1427 - 143 + 1 = 1285$.

2. Aflați numărul de pătrate cu cea mai mare latură, în care poate fi decupată o placă de polistiren cu dimensiunile de 2 m x 75 cm, astfel încât să nu se arunce nicio bucată din polistiren.

Rezolvare: Latura pătratului trebuie să fie cel mai mare divizor comun al numerelor 200 și 75, deci 25. Prin urmare, placa va fi decupată pe lungime în $200 : 25 = 8$, iar pe lățime în $75 : 25 = 3$. Deci numărul de pătrate este $8 \cdot 3 = 24$.



Acum să rezolvăm singuri!

1. Selectează și scrie egalitățile care reprezintă relația de divizibilitate:

a) $28 = 7 \cdot 4$; **b)** $366 = 122 \cdot 3$; **c)** $183 = 13 \cdot 14 + 1$;

d) $255 = 23 \cdot 11 + 2$; **e)** $157 = 9 \cdot 17 + 4$; **f)** $93 = 3 \cdot (17 + 14)$.

2. Selectează și scrie enunțurile adevărate: **a)** 56 este multiplu al lui 7 și al lui 8; **b)** 72 este multiplu al lui 8 și nu este multiplu al lui 9; **c)** 2 și 7 sunt divizori ai lui 70; **d)** 3 și 5 sunt divizori ai lui 45; **e)** 23 este multiplul lui 3; **f)** 36 este multiplu al lui 6.

3. Reprodu și completează tabelul cu linii pentru: 30, 43, 55, 66, 1, 0, 111 și 84, după model:

Numărul	Mulțimea divizorilor numărului	Numărul este prim sau este compus	Cel mai mic divizor diferit de 1	Cel mai mare divizor al numărului
42	$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$	număr compus	2	42

4. Construiește un tabel de 10 linii și 10 coloane, completează căsuțele cu numerele naturale de la 1 la 100 și încercuiește numerele prime.

5. Scrie numerele naturale mai mici decât 79, divizibile cu 11.

6. Scrie multiplii lui 6 cuprinși între 40 și 57.

7. Scrie mulțimea divizorilor comuni diferiți de 1 pentru: **a)** 42 și 55; **b)** 30 și 42; **c)** 55 și 30.

8. Scrie primii patru multipli comuni consecutivi pentru: **a)** 3 și 6; **b)** 3 și 5; **c)** 6 și 8; **d)** 15 și 35.

9. Circumferința unei roți de bicicletă este de 12 dm. **a)** Află numărul de rotații complete ale roții pe distanța de 120 dm și pe distanța de 240 dm; **b)** Scrie trei distanțe consecutive mai mari decât 120 dm, între ale căror valori roata face câte 10 rotații complete.

10. Distanța dintre primul și al doilea stâlp al unui gard liniar este de 2 m. **a)** Determină la ce distanță de primul stâlp se află al 13-lea stâlp. **b)** Scrie, în termeni de divizibilitate a numerelor naturale, legătura dintre distanțele stâlpilor gardului față de primul stâlp și numărul 2.

11. Un număr natural *a* este divizibil cu 21. **a)** Află restul împărțirii numărului *a* la 3; **b)** Formulează și rezolvă o problemă similară.

12. Dan are un număr de caiete, iar George are de trei ori mai multe. Câte caiete are Dan, dacă 27 este divizibil cu numărul caietelor lui George ? Câte soluții are problema?

Proiect scratch

Modelează scenariul: „Bebe M" intră în scenă și spune „Divizibilitate" pentru 2 secunde. Apoi spune „Dacă A = {1,2,3,4,5}" (5 numere aleatorii). În acest moment apare „Big M" care întreabă: „Numerele din A divizibile cu 3 sunt: (listă cu virgulă)?" (număr aleatoriu). Și se așteaptă răspunsul. Dacă răspunsul este corect, „Big M" spune „Bravo!", dacă nu, atunci „Big M" spune „Of!".

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Conform unei proprietăți a divizibilității numerelor naturale, dacă $5 \mid a$ și $a \mid 5$, rezultă

l)	m)	n)	o)
$5 > a$	$5 < a$	$a = 5$	$a = 0$

2. Conform unei proprietăți a divizibilității numerelor naturale, dacă $5 \mid a$ și $a \mid b$, rezultă:

a)	b)	c)	d)
$5 \mid b$	$5 : b$	$5 \mid a$	$5 : b$

3. Cel mai mare divizor comun al numerelor $3a, 4a, 5a$, unde $a \in \{73, 79, 83, 89\}$, este

s)	t)	u)	v)
$3a$	a	89	73

4. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 şi a este *48,* dacă

s)	t)	u)	v)
$a = 36$	$a = 24$	$a = 48$	$a = 12$

5. În descompunerea în produs de puteri de numere prime a lui *2020* nu apare factorul

r)	q)	s)	t)
37	2	5	101

6. Numărul 35 nu apare în descompunerea în produs de numere prime a lui:

a)	b)	c)	d)
Niciunui număr	35	42	70

7. Dacă o sumă de trei numere distincte este impară, rezultă că:

j)	k)	l)	m)
2 este termen al sumei	3 este termen al sumei	2 nu este termen al sumei	1 este termen al sumei

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Descompunerea în factori primi a numărului 24 este … .

10p **2.** Numărul a cărui descompunere este $2^3 \cdot 5^2$ este … .

10p **3.** Divizorii primi ai numărului 66 sunt … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 24, 45 și 72 este:

a) 3; **b)** $2^3 \cdot 3^2$; **c)** 8; **d)** 360.

10p **2.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 360 și 432 este:

a) 432; **b)** 72; **c)** 720; **d)** 2160.

10p **3.** Numerele naturale de forma $\overline{53ab}$ divizibile cu 30 sunt:

a) {5322, 5350}; **b)** 5330; **c)** {5310, 5340, 5370}; **d)** {5010, 5310, 5910}.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Aflați cel mai mic număr natural care, împărțit la 6 dă restul 4, împărțit la 8 dă restul 6 și împărțit la 9 dă restul 7 și câtul nenul.

10p **2.** Numerele 3167, 4273, 2481 împărțite la același număr natural nenul dau resturile 17, 23, respectiv 31. Aflați împărțitorul.

10p **3.** Arătaţi că numerele $n+3$ şi $2n+7$, cu $n \in \mathbb{N}$, sunt prime între ele.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Numărul a cărui descompunere este $2^3 \cdot 3^2$ este … .

10p **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 60 și 195 este … .

10p **3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 78 și 65 este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Numerele naturale x care verifică relația $(x+2)|(2x+7)$ sunt:

a) 0; **b)** 1; **c)** {1, 2}; **d)** {1, 3}.

10p **2.** Numerele de forma $\overline{3a7b}$ divizibile cu 45 sunt:

a){3375, 3675, 3975}; **b)**{3270, 3570, 3870}; **c)**{3370, 3875}; **d)**{3870, 3375}.

10p **3.** Numărul divizorilor lui 360 este:

a) 24 ; **b)** 12; **c)** 4; **d)** 10.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Numerele 167 şi 115, împărţite prin acelaşi număr natural nenul, dau resturile 7 şi, respectiv 5. Aflaţi împărţitorul.

10p **2.** Într-o şcoală, mai puţin de 200 de elevi s-au înscris într-o competiţie. Dacă se formează grupe de câte 6, de câte 7 sau de câte 8 elevi, rămâne mereu un grup format din 5 elevi. Câţi elevi s-au înscris în competiţie?

10p **3.** Arătaţi că numerele $n+4$ şi $3n+13$, cu $n \in \mathbb{N}$, sunt prime între ele.

Teme pentru portofoliu

1. Scrie mulțimea formată din:

a) cifrele numărului 12003891; **b)** literele cuvântului *tenacitate*.

2. Stabilește valoarea de adevăr a enunțurilor:

a) $6 \in \{3,6,9\}$; **b)** $m \in \{p,i,l,o,n\}$; **c)** $0 \not\subset \varnothing$;

d) $3 \in \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$; **e)** $7 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 5 \cdot x - 2 = 31\}$.

3. Reprezintă fiecare mulțime prin enumerarea elementelor sale:

$M = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x < 7\}$, $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*,\ 10 \vdots x\}$,

$S = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 2 \cdot x + 3 = 41\}$, $T = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + 1 \leq 6\}$.

4. Reprezintă fiecare mulțime folosind proprietatea caracteristică a elementelor sale:

$A = \{3,4,5,\ldots,14\}$, $B = \{2,4,8,16,32,64\}$,

$C = \{1,6,11,16,21\}$, $D = \{0,1,4,9,\ldots,49\}$.

5. Scrie toate submulțimile mulțimii $A = \{2^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

6. Stabilește dacă mulțimea $B = \{6 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$ include mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x \vdots 3\}$.

7. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \text{ divizor prim al lui } 8\}$ și $B = \{x \mid x \text{ divizor al lui } 10\}$. Calculează: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$

8. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^3 \leq 27\}$. Calculează: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

9. Efectuează: **a)** $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 2 < x \leq 5\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } x < 7\}$;

b) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } x - 1 = 4\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 3x + 2 = 17\}$;

c) $\{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{N} \text{ şi } n < 3\} \cup \{x \mid x = 3^p, p \in \mathbb{N} \text{ şi } p < 2\}$;

d) $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$; **e)** $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$.

10. Fie mulțimile $A=\{1,2,x\}$ și $B=\{1,y,3\}$. Află numerele x și y, dacă $A\cap B=A\cup B$.

11. Fie mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le a, a\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,a\le x\le 6, a\in\mathbb{N}\}$. Determină $a\in\mathbb{N}$, astfel încât $A\cap B=\{4\}$.

12. Stabilește dacă următoarea egalitate este adevărată $\{2,3\}\cup X=\{3,4,5\}$, pentru orice mulțime *X*.

13. Determină numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=611$.

14. Află numărul divizorilor naturali ai numărului:

a) $3^2\cdot5^4\cdot7$; **b)** $10^3\cdot4^6\cdot7^4$; **c)** 644000; **d)** 1245000.

15. Află numerele naturale prime de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 27.

16. Fie numărul natural $A=(1+2+3+...+999)\cdot n+1000$. Determină cel mai mic număr natural *n* pentru care numărul *A* este divizibil cu 10^6.

17. Demonstrează că numărul $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ este divizibil cu 111.

18. Dacă $\overline{ab}$ este un număr prim, află numărul de divizori ai lui $x=\overline{abab}$ și $y=\overline{ababab}$.

19. Prin împărțirea numerelor 1558, 526 și 1043 la același număr natural, se obțin resturile 58, 26 și respectiv 43. Află cel mai mare număr natural la care au fost împărțite numerele date pentru a se obține resturile respective.

20. Află perechile de numere naturale care satisfac condițiile:

a) au suma 50 și *c.m.m.d.c.* este 5; **b)** au suma 540 și *c.m.m.d.c.* este 36;

c) au suma 1089 și *c.m.m.d.c.* estev 121; **d)** au produsul 2400 și *c.m.m.d.c.* este 10;

e) au produsul 1215 și *c.m.m.d.c.* este 9.

21. Află cifra necunoscută, astfel încât numerele din fiecare pereche să fie prime între ele:

a) $\overline{35a}$ și 2; **b)** $\overline{a27}$ și 3; **c)** $\overline{7x2}$ și 5;

d) $\overline{135y}$ și 5; **e)** $\overline{97x}$ și 36; **f)** $\overline{4a8}$ și 18.

22. **a)** Află cel mai mic număr natural care, împărțit la fiecare din numerele 12, 18 și 40, dă restul 7.

b) Află cel mai mic număr natural care, prin împărțirea la numerele 12, 18 și 40, să dea respectiv resturile 11, 17 și 39.

23. Pe o dreaptă, sunt marcate, în același sens, prin puncte albe distanțele de 3 mm și prin puncte verzi distanțele de 5 mm. Știind că cele două culori se suprapun în zero, află următoarea distanță unde se suprapun cele două culori.

24. O suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de 14 dm și 6 dm trebuie acoperită cu dale dreptunghiulare cu dimensiunile de 7 cm și 3 cm. Stabilește cum trebuie așezate și află numărul necesar de dale pentru acoperirea suprafeței, fără a tăia vreo dală.

25. Determină numerele naturale *x* dacă:

a) $x\,|\,(x+3)$; **b)** $(2x)\,|\,(x+5)$; **c)** $(x+2)\,|\,(2x+1)$; **d)** $(3x+1)\,|\,(2x+5)$.

Capitolul 2. RAPOARTE ŞI PROPORŢII

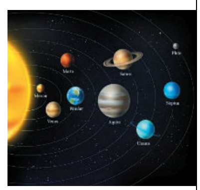
Unitatea de învățare: Rapoarte și proporții

LECȚIA 1. Rapoarte. Procente, probleme în care intervin procente

Atenție, începem!

A1. În tabel sunt prezentate corpurile din sistemul solar și numărul lor

Corpuri în Sistemul Solar	*Număr de corpuri în Sistemul Solar (la data de 18.09.2016 cf. Observatorului astronomic „Amiral Vasile Urseanu”)*
Stele	1
Planete	8
Sateliți ai planetelor	171
Planete pitice	5
Sateliți ai planetelor pitice	8



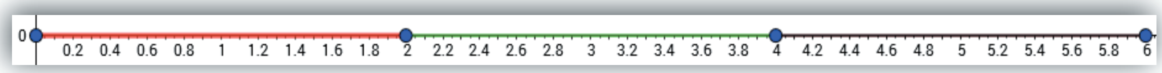
Aflați valoarea raportului și raportul procentual dintre:

a) numărul planetelor și numărul planetelor pitice din Sistemul Solar (aflați de câte ori sunt mai multe planete decât planete pitice, respectiv numărul de planete corespunzător la o sută de planete pitice)

b) numărul de planete pitice și numărul de planete din Sistemul Solar.

Ce înțelegem prin raportul a două mărimi măsurate cu aceeași unitate de măsură și prin valoarea raportului?

A2. Segmentul din desenul de mai jos, cu lungimea de 6 cm, se divizează în trei segmente cu lungimile egale, colorate cu roșu, verde, respectiv negru.



a) De câte ori este mai mare lungimea segmentului inițial decât cea a segmentului verde ?

b) În ce raport se află lungimea segmentului roșu cu lungimea segmentului inițial ?

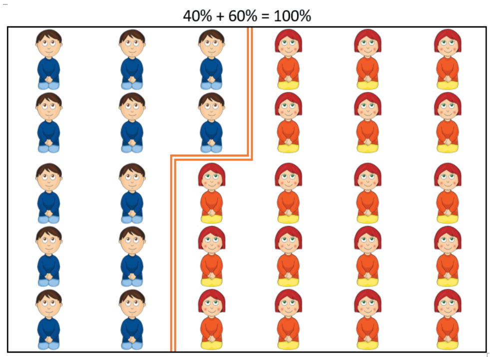
c) Explicați ce se înțelege prin $\frac{6\ cm}{3\ cm}=2$, $(6\ cm:3\ cm=2)$ și prin $\frac{3\ cm}{6\ cm}=0,5\ (3\ cm:6\ cm=0,5)$, referitor la o pereche de segmente, din figură, cu lungimile de 3 cm, respectiv 6 cm.

A3.

a) Scrieți „1 *procent*“, utilizând notația învățată la matematică, în clasa a V-a.	**b)** Precizați ce se înțelege prin *raport procentual*.
c) Transformați raportul $\frac{3}{5}$ în raport procentual.	**d)** Transformați raportul $\frac{15}{100}$ într-un raport în care numărătorul și numitorul să fie prime între ele.

A4. Într-o clasă a VI-a sunt 30 de elevi, 40% sunt băieți și restul fete.
a) Estimați care dintre numere este mai mare: cel al băieților sau cel al fetelor din acea clasă ?
b) Calculați numărul fetelor din clasă.

A5. Într-o clasă a VI-a sunt 30 de elevi, 18 dintre aceștia sunt fete și restul băieți. Calculați cât la sută din numărul elevilor clasei reprezintă fetele și cât la sută băieții.



A6. 60% din numărul elevilor dintr-o clasă sunt fete și restul băieți. Calculați numărul elevilor din acea clasă, știind că numărul fetelor este 18.

A7. Din cei 30 de elevi ai unei clase a VI-a, 10% nu au optat pentru cercul de TIC. Calculați numărul elevilor care vor merge la acest cerc.

Ce ne învață teoria?

1. Numărul rațional $a : b$, unde a și b sunt numere raționale pozitive, b nenul, se numește ***raportul numerelor a și b*** și se notează $\frac{a}{b}$; a și b se numesc ***termenii raportului***. Numărul rațional pozitiv c, astfel încât $c = a : b$, adică $\frac{a}{b} = c; a, b \in \mathbb{Q}_+$, se numește ***valoarea raportului*** $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Raportul dintre 36 și 15 este $\frac{36}{15}$, termenii sunt 36 și 15, iar valoarea este $36 : 15 = 2,4$;

Observație: fracție ordinară este un raport cu numărătorul număr natural și numitorul număr natural nenul.

I. Rapoartele $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ sunt diferite, oricare ar fi numerele raționale pozitive nenule și diferite a, b.

Exemplu: Rapoartele $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{2}$ sunt diferite, deoarece 2 : 3 = 0,(6), iar 3 : 2 = 1,5. Notăm $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

II. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă ambii membri ai raportului sunt înmulțiți cu același număr rațional pozitiv nenul. Altfel scris: $\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = c$, unde $a, b, c, m \in \mathbb{Q}_+, b \neq 0, m \neq 0$.

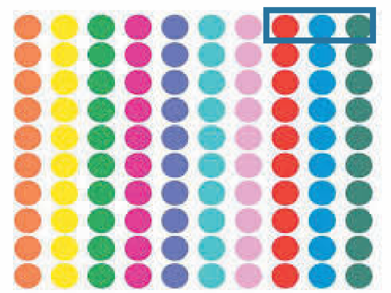
Exemplu: Raportul $\frac{3}{2}$ are valoarea 1,5 pentru că $3:2=1,5$. Raportul $\frac{3\cdot 4}{2\cdot 4}$ are aceeași valoare 1,5.

III. Raportul a două mărimi, exprimate prin aceeași unitate de măsură, este raportul măsurilor lor.

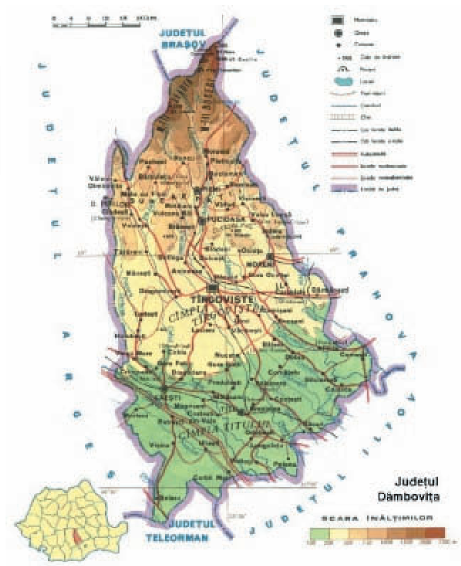
Exemplu: Dacă un dreptunghi are lungimea de $2,4$ dm și lățimea de 8 cm, atunci raportul dintre lungime și lățime este $\frac{24\text{ cm}}{8\text{ cm}}=3$, iar raportul dintre lățimea și lungimea sa este $\frac{8\text{ cm}}{24\text{cm}}=0,(3)$.

2. Exemple de rapoarte utilizate în practică:

a) Raportul $\frac{p}{100}$ care se notează p%, unde p este un număr rațional pozitiv, se numește ***raport procentual*** și se citește „*p* procente ” sau „*p* la sută”.



Exemplu: În figura alăturată sunt reprezentate 100 de puncte. Dacă 3 dintre puncte sunt încadrate într-un dreptunghi, atunci ne referim la $\frac{3}{100}=3\%$ (care se citește „3 la sută” sau „3 procente”) din punctele din figură .



b) Raportul dintre distanța pe o hartă și distanța din teren se numește ***scara hărții*** respective.

Exemplu: Pe harta județului Dâmbovița, unui segment care are lungimea de 1 cm îi corespunde o distanță din teren de 4 km. Scara acestei hărți este

$\frac{4\ \text{cm}}{400\ 000\ \text{cm}}=\frac{1}{100\ 000}$ și se notează 1:100 000 .

c) Raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției este ***concentrația soluției*** respective.

Exemplu: 30 g sare se dizolvă în 1470 g apă, pentru a obține saramura pentru castraveți murați. Concentrația soluției este egală cu $\dfrac{30}{30+1470}=\dfrac{30}{1500}=\dfrac{2}{100}=2\%$.

d) Raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului este ***titlul aliajului*** respectiv.

Exemplu: Titlul unui aliaj care conține la 16 g aur, 234 g cupru este $\dfrac{16}{16+234}=\dfrac{16}{250}=0,064$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să calculăm valoarea raportului dintre 136 și 8.

2. Să scriem raportul și raportul procentual determinate de numerele din perechile:

a) 125 și 1000; **b)** 1000 și 125; **c)** 12,5 și 250; **d)** 25 și 12,5.

Învățăm să rezolvăm

1. Un elev a depus la bancă suma de 250 lei. Știind că banca oferă dobânda anuală de 1%, iar statul impozitează dobânda cu 16%, aflați ce sumă va avea elevul după un an de la depunere.

Rezolvare: Calculăm ce sumă de bani reprezintă 1% din 250 lei: $\dfrac{1}{100}\cdot 250=2,5$ lei. Calculăm impozitul pe dobândă, adică 16% din 2,5 lei: $\dfrac{16}{100}\cdot 2,5=\dfrac{4\cdot 10}{100}=0,4$ lei. Dobânda rămasă după impozitare este: 2,5 – 0,4 = 2,1 lei. Suma avută de elev la bancă, după un an, se obține adăugând dobânda impozitată la suma depusă: 250 lei + 2,1 lei = 252,1 lei.

2. Prețul de 190 lei al unui obiect se mărește cu 20%. Cu ce procent trebuie să se reducă noul preț, pentru ca obiectul să coste 193,80 lei?

Rezolvare: Prețul obiectului după scumpirea cu 20% este: $190+\dfrac{20}{100}\cdot 190=228$ lei. Noul preț se va reduce cu x%. Obținem ecuația $228 - x : 100 \cdot 228 = 193,8 \Leftrightarrow 228 - 2,28 \cdot x = 193,8 \Leftrightarrow 2,28 \cdot x = 228 - 193,8 \Leftrightarrow 2,28 \cdot x = 34,2 \Leftrightarrow x = 3420 : 228 \Leftrightarrow x = 15$. Așadar, reducerea trebuie să fie de 15%.

Acum să rezolvăm singuri!

★ **1.** Scrie rapoartele următoarelor perechi de numere (și efectuează simplificările posibile):

a) 24 și 8; 11 și 55; 169 și 13; 20 și 400;

b) 20 și $\frac{2}{3}$; $0{,}13$ și $6{,}5$; $5\frac{2}{5}$ și $\frac{9}{20}$; $100\frac{1}{2}$ și $70\frac{1}{8}$;

c) $0,(6)$ și $0,(3)$; $1,1(3)$ și $11,(3)$; $\frac{169}{33}$ și $5,(12)$; 2^7 și 4^3.

2. Calculează rapoartele dintre:
35 m și 25 km; 24 dm și 36 mm; 2 t și 400 kg; 12 l și 15 hl;
11 m^2 și 132 dm^2; 10 dm^3 și 25 cm^3.

3. Un stadion are 44000 de locuri. La un meci de fotbal, 95% din numărul de locuri au fost ocupate. Câți spectatori au fost la stadion, la acest meci?

4. Află cantitatea de sare care se găsește în 72 kg de soluție cu concentrația de 15%.

5. Ce cantitate de argint se află în 400 g de aliaj cu titlul de 0,325?

6. Lungimea unui segment *AB* este împărțită de punctul *C* (situat între *A* și *B*) în raportul $\frac{AC}{AB}=\frac{2}{3}$. Reprezintă punctul *C* pe segmentul *AB*.

★★

7. Raportul dintre distanța pe hartă și distanța reală este 1 : 1000000. Calculează:
a) Distanța reală dintre două localități, în km, dacă distanța pe hartă este de 2 cm;
b) Distanța în cm dintre două localități pe hartă, dacă distanța reală este de 26 km.

8. Un amator de muzică are 475 de CD-uri. Știind că 56% din acestea conțin melodii internaționale, 32% melodii românești și restul muzică clasică, află numărul de CD-uri cu muzică clasică. Câte procedee de calcul poți folosi?

★★★

9. După ce s-au vândut 25% din numărul biletelor pentru un spectacol, au rămas 300 de bilete nevândute. Află numărul total de bilete puse în vânzare pentru spectacol.

10. Dintr-o sumă se cheltuiește în prima zi 40%, iar a doua zi 10% din cât s-a cheltuit în prima zi. Cât la sută din suma inițială s-a cheltuit a doua zi?

11. Din cei 30 de elevi ai unei clase, rămân 3 corigenți. Află procentul de promovabilitate al clasei.

12. Prețul unui caiet este 12% din prețul unei cărți. Știind că o carte și un caiet costă împreună 8,40 euro, află: **a)** prețul cărții; **b)** costul a 5 caiete.

LECȚIA 2. Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor

Atenție, începem!

Ce înțelegem prin proporție.

A1. a) Construiți un pătrat cu latura de 2,5 cm și un pătrat cu latura de 4 cm; **b)** Calculați raportul dintre lungimea laturii pătratului mic și lungimea laturii pătratului mare și raportul dintre perimetrul pătratului mic și perimetrul pătratului mare; **c)** Comparați rapoartele obținute la punctul **b)**; **d)** Comparați raportul dintre lungimea laturii pătratului mare și a laturii pătratului mic, exprimate în cm, cu raportul acelorași lungimi exprimate în mm.

Cum formăm o proporție având date un raport și un număr.

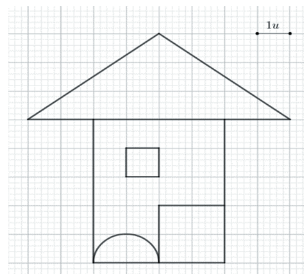
A2. Dacă egalitatea a două rapoarte se numește *proporție*, formați proporții:

a) Înmulțind ambii termeni ai raportului $\frac{3}{5}$ cu 17; **b)** Împărțind ambii termeni ai raportului $\frac{45}{6}$ la 15.

Proprietatea fundamentală a proporției și formarea proporțiilor derivate cu aceeași termeni.

A3. În proporția $\frac{2,5}{4}=\frac{5}{8}$, termenii 2,5 și 8 se numesc extremi, iar termenii 4 și 5 se numesc mezi.

a) Comparați produsele $2,5 \cdot 8$ și $4 \cdot 5$ și enunțați o proprietate a proporției; **b)** În proporția $\frac{2,5}{4}=\frac{5}{8}$, dacă schimbați locul extremilor, apoi locul mezilor și în final inversați rapoartele, ce concluzie trageți?



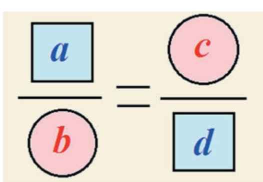
A4. La schița căsuței pentru păpuși, din desenul alăturat, realizată la scara 1 : 20, s-a folosit ca unitate de măsură 2cm. **a)** Dacă înălțimea peretelul casei din schiță este egală cu 5 unități de măsură, aflați înălțimea peretelul jucăriei. **b)** dacă înălțimea căsuței este de 60 cm, aflați lățimea căsuței din schiță.

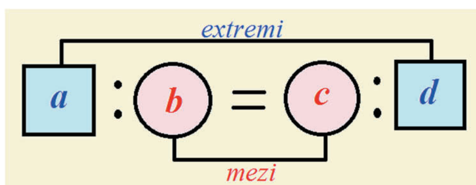
Ce ne învață teoria?

Egalitatea a două rapoarte se numește ***proporție***.

Fiind dată proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ numerele raționale pozitive a, b, c, d, unde b și d sunt nenule, se numesc ***termenii proporției***.

Termenii a și d se numesc ***extremi***, iar b și c se numesc ***mezi***.





***Exemplu*:** Egalitatea $\frac{5,6}{14}=\frac{4}{10}$ este proporție pentru că rapoartele au aceeași valoare: $\frac{5,6}{14}=0,4=\frac{4}{10}$. În această proporție termenii 5,6 și 10 sunt extremii, iar termenii 14 și 4 sunt mezii.

> Proprietatea fundamentală a proporției
> **Produsul extremilor este egal cu produsul mezilor, în orice proporție**.
> Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci $a\cdot d=b\cdot c$.

Justificare: Într-adevăr, dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, unde a, b, c, d sunt numere raționale pozitive, b, d nenule, notăm cu r valoarea comună a celor două rapoarte. Din $\frac{a}{b}=r$ obținem $a = br$, iar din $\frac{c}{d}=r$ obținem $c=dr$. Deci $a\cdot d = bdr$ și $b\cdot c = bdr$, de unde rezultă $a\cdot d = b\cdot c$.

***Exemplu*:** Dacă a și b sunt numere raționale astfel încât $\frac{a}{13}=\frac{2}{b}$, atunci $a\cdot b=2\cdot 13$.

> Pentru a determina un termen necunoscut dintr–o proporție folosim relațiile:
> ***un extrem*** $=\dfrac{\textbf{\textit{produsul mezilor}}}{\textbf{\textit{celălalt extrem}}}$, ***un mez*** $=\dfrac{\textbf{\textit{produsul extremilor}}}{\textbf{\textit{celălalt mez}}}$

***Exemple*:** **a)** Determinăm extremul necunoscut din proporția $\frac{7}{4}=\frac{2,8}{x}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 2,8}{7}=4\cdot 0,4=1,6$.

b) Determinăm mezul necunoscut din proporția $\frac{2}{5}=\frac{x}{4}\Rightarrow x=\frac{2\cdot 4}{5}=1,6$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să stabilim dacă $\frac{2,5}{4}=\frac{3,125}{5}$ este proporție.

2. Să scriem toate proporțiile posibile care conțin termenii: **a)** 1; 2; 3; **b)** 4; 2; 5; 8; **c)** 10; 20; 40.

Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră rapoartele $\frac{1,75}{3}$ și $\frac{1,1(6)}{2}$. Verificați dacă cele două rapoarte formează o proporție.

***Rezolvare*:** Arătăm că produsul extremilor este egal cu produsul mezilor (proprietatea fundamentală a proporției). Rapoartele $\frac{1,75}{3}$ și $\frac{1,1(6)}{2}$ formează proporția $\frac{1,75}{3} = \frac{1,1(6)}{2}$, deoarece $1,75 \cdot 2 = 1,1(6) \cdot 3$, adică $1,75 \cdot 2 = \frac{7}{6} \cdot 3$, ceea ce este adevărat.

2. Aflați termenul necunoscut al proporției $\frac{x}{0,(2)} = \frac{2^3 + 2^0}{0,2}$.

***Rezolvare*:** Proporția se mai scrie sub forma: $\frac{x}{0,(2)} = \frac{9}{0,2}$. Aplicăm proprietatea fundamentală a proporției și avem: $x \cdot 0,2 = 0,(2) \cdot 9$. De unde, $x = 0,(2) \cdot 9 : 0,2 = \frac{2}{9} \cdot 9 \cdot \frac{10}{2} = 10$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Identifică perechile de rapoarte care formează proporții:	$\frac{2}{7}$ și $\frac{6}{21}$	$\frac{225}{900}$ și $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$ și $\frac{18}{420}$	$\frac{1,2}{3}$ și $\frac{1}{5}$	$\frac{1,2}{3}$ și $\frac{2}{5}$
2. Simplifică raportul dat și scrie proporția obținută:	$\frac{99}{165}$	$\frac{8}{3,2}$	$\frac{4,2}{1,4}$	$\frac{0,6}{0,36}$	$\frac{2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3}$
3. Amplifică raportul dat cu 10 și apoi cu 15 și scrie proporția obținută:	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{0,5}{0,3}$	$\frac{1,3}{1,03}$	$\frac{0,(3)}{0,2(3)}$

4. Arcul de Triumf din Paris are înălțimea de 49,5 m, iar o machetă a sa are înălțimea de 1,98 m. Verifică dacă scara la care este făcută macheta este de $1:25$.

5. Un automobil parcurge distanța de 170 km în 2 ore. Verifică dacă viteza de deplasare a automobilului este de 65 km/h.

6. Determină termenul necunoscut din proporțiile următoare:

a) $\frac{x}{6} = \frac{9}{27}$; **b)** $\frac{2}{3} = \frac{6}{y}$; **c)** $\frac{0,5}{3} = \frac{6}{z}$; **d)** $\frac{a}{1,2} = \frac{10}{3}$;

e) $\frac{2,1}{b} = \frac{7}{4}$; **f)** $\frac{1,8}{u} = \frac{1,12}{2,52}$; **g)** $\frac{x+3}{6} = \frac{5}{2}$; **h)** $\frac{27}{42} = \frac{45}{7 \cdot x}$.

7. Înălțimea machetei unui obiect este de 6 cm. Știind că aceasta a fost realizată la scara de $2:300$, află înălțimea reală a obiectului.

8. Știind că $\frac{4}{a} = \frac{b}{16}$, calculează $a^3 \cdot b^3$, scriind rezultatul sub forma unei puteri cu baza 2.

9. Știind că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, demonstrează că numărul $730 - \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ este un pătrat perfect.

LECȚIA 3. Proporții derivate

Atenție, începem!

A1. Se dă proporția $\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$. Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu regula corespunzătoare din coloana **B**:

A			B
Proporția formată cu perechile de numere indicate de săgețile numerotate			Proporția formată cu ajutorul regulii date
$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12$	○	□	Prin schimbarea mezilor între ei
$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12$	○	□	Prin schimbarea extremilor între ei
$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12$	○	□	Prin inversarea (răsturnarea) rapoartelor

A2. Se dă proporția $\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$, cu numărătorii 15 și 5 și numitorii 9 și 3. Explicați cum s-au obținut rapoartele din următoarele perechi, pornind de la rapoartele din proporția dată, și verificați dacă ele formează o proporție. **a)** $\frac{15+9}{9}$ și $\frac{5+3}{3}$; **b)** $\frac{15-9}{9}$ și $\frac{5-3}{3}$; **c)** $\frac{15}{15+9}$ și $\frac{5}{5+3}$; **d)** $\frac{15}{15-9}$ și $\frac{5}{5-3}$; **e)** $\frac{15+5}{9+3}$ și $\frac{5}{3}$; **f)** $\frac{15-5}{9-3}$ și $\frac{15}{9}$; **g)** $\frac{5\cdot q}{3\cdot q}$ și $\frac{15}{9}$, unde $q\in\mathbb{Q}_+$, $q\neq 3$.

Ce ne învață teoria?

1. Proporția inițială	Procedeul	**Proporția *derivată cu aceiași termeni***
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Q}_+$	Schimbăm extremii între ei	$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
	Schimbăm mezii între ei	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
	Inversăm cele două rapoarte	$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

***Exemple*:** Pornind de la proporția $\frac{10}{15}=\frac{4}{6}$, obținem, aplicând procedeele de mai sus, proporții derivate cu aceiași termeni: $\frac{10}{4}=\frac{15}{6}$, $\frac{6}{15}=\frac{4}{10}$, $\frac{15}{10}=\frac{6}{4}$, $\frac{6}{4}=\frac{15}{10}$, $\frac{15}{6}=\frac{10}{4}$, $\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$, $\frac{4}{6}=\frac{10}{15}$.

2. Proporția inițială	Procedeul	**Proporții *derivate cu termeni diferiți***
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+$	Înmulțim ambii termeni ai unui raport cu $q \in \mathbb{Q}_+$	$\frac{a \cdot q}{b \cdot q}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c \cdot q}{d \cdot q}$
	Înmulțim ambii numărători/ numitori cu $q \in \mathbb{Q}_+$	$\frac{a \cdot q}{b}=\frac{c \cdot q}{d}$; $\frac{a}{b \cdot q}=\frac{c}{d \cdot q}$
	Adunăm/scădem numitorii la/din numărători:	$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $a>b$, $c>d$;
	Adunăm/scădem numărătorii la/din numitori:	$\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$, $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$, $b>a$, $d>c$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să stabilim dacă din $\frac{2,5}{4}=\frac{3,125}{5}$ obținem proporțiile derivate:

$$\frac{2,5}{3,125}=\frac{4}{5},\ \frac{5}{8}=\frac{3,125}{5},\ \frac{2,5}{4}=\frac{9,375}{15},\ \frac{2}{4}=\frac{3,12}{5}.$$

2. Să scriem cinci proporții derivate din $\frac{64}{256}=\frac{448}{1792}$, care să aibă în stânga o fracție și în dreapta un raport de numere care nu sunt naturale.

Învățăm să rezolvăm

1. Pe prima a doua linie a tabelului alăturat sunt date lățimile dreptunghiurilor A și B, iar pe a treia linie sunt date lungimile acestor dreptunghiuri, măsurate cu aceeași unitate de măsură.

	A	B
l	0,5	1,5
L	0,51	1,53

a) Arătați că $\frac{l_A}{L_A}=\frac{l_B}{L_B}$ este proporție; **b)** Apoi formați proporțiile derivate cu aceiași termeni.

***Rezolvare*:** **a)** Raportul $\frac{l_A}{L_A}=\frac{l_B}{L_B}$ se scrie sub forma: $\frac{0,5}{0,51}=\frac{1,5}{1,53}$. Observăm că $0,5 \cdot 1,53=0,765$ și $0,51 \cdot 1,5=0,765$, de unde deducem că $0,5 \cdot 1,53=0,51 \cdot 1,5$ și rezultă că $\frac{0,5}{0,51}=\frac{1,5}{1,53}$.

b) Schimbăm extremii: $\frac{1,53}{0,51}=\frac{1,5}{0,5}$, apoi mezii: $\frac{0,5}{1,5}=\frac{0,51}{1,53}$. Răsturnăm rapoartele: $\frac{0,51}{0,5}=\frac{1,53}{1,5}$.

2. Suma a două numere este 30, iar raportul lor este $\frac{2}{3}$. Aflați numerele.

***Rezolvare*:** Notăm cele două numere cu a și b. Suma lor va fi $a+b=30$, iar raportul $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. Construim proporția derivată prin adunarea numitorului la numărător $\frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3}$. Ținând cont că suma este 30, obținem $\frac{30}{b}=\frac{5}{3}$, de unde $b=\frac{30\cdot 3}{5}=18$. Atunci, $a=30-b=30-18=12$.

1. Scrie toate proporțiile derivate cu aceiași termeni: **a)** $\frac{10}{7,5}=\frac{1,6}{1,2}$; **b)** $\frac{7}{5,6}=\frac{9}{7,2}$; **c)** $\frac{2,4}{3,6}=\frac{2,1}{3,15}$.

2. Fiind dată proporția $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$, completează spațiile pentru a obține proporții:

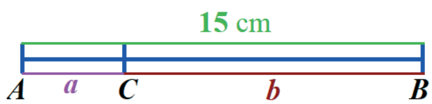
a) $\frac{2x}{y}=\frac{\dots}{\dots}$; **b)** $\frac{3x}{2y}=\frac{\dots}{\dots}$; **c)** $\frac{5y}{3x}=\frac{\dots}{\dots}$.

3. Se dă proporția $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, cu $x, y\in\mathbb{Q}_+$. Află numerele x și y, știind că:

a) $x+y=6$; **b)** $y-x=6$; **c)** $3x+2y=42$; **d)** $2y-3x=6$.

4. Se dă proporția $\frac{1,2}{9,6}=\frac{m}{n}$, cu $m, n\in\mathbb{Q}_+$. Află m și n, știind că: **a)** $m+n=48,6$; **b)** $n-m=37,8$.

5. Punctul C împarte segmentul AB cu lungimea de 15 cm, în două segmente AC și CB, cu lungimile a, respectiv b. Știind că $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, determină lungimile segmentelor AC și CB.



6. Bunica împarte suma de 48 lei celor doi nepoți ai săi. Știind că raportul sumelor de bani primite de cei doi nepoți este $\frac{x}{y}=\frac{7}{5}$, află cele două sume de bani.

7. Știind că $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, determină valoarea rapoartelor: **a)** $\frac{2x+3y}{7x-4y}$; **b)** $\frac{7x-4y}{x+2y}$; **c)** $\frac{3x+5y}{2x+7y}$.

8. Determină x din egalitățile: **a)** $\frac{x+2}{x}=\frac{9}{7}$; **b)** $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{13}$; **c)** $\frac{x}{5}=\frac{x+2}{25}$.

9. Fie numerele naturale nenule *a, b* și *c* și proporțiile: $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}=\frac{b}{c}$. Dacă $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=372$, determină numerele *a, b* și *c*.

LECȚIA 4. Șir de rapoarte egale

Atenție, începem!

A1. Ana a cumpărat pentru magiun și compot 5 kg de prune cu 8,75 lei, apoi 6 kg de prune cu 10,5 lei și a treia oară 4 kg de prune cu 7 lei. **a)** Arătați că, de fiecare dată, Ana a cumpărat prunele cu același preț pe kilogram; **b)** Care este prețul unui kilogram de prune?

A2. a) Considerăm raportul $\frac{2}{5}$. Amplificați acest raport cu 2, cu 3 și apoi cu 4. Scrieți egalitatea celor patru rapoarte, adică șirul de rapoarte egale; **b)** Verificați dacă rapoartele $\frac{6}{10}$, $\frac{1,5}{2,5}$, $\frac{6+1,5}{10+2,5}$, $\frac{6-1,5}{10-2,5}$ sunt egale, adică dacă formează un șir de rapoarte egale. Scrieți acest șir, dacă este cazul.

c) Arătați că $\frac{4,8}{4}=\frac{12}{10}=\frac{24}{20}=\frac{4,8\cdot 5+12\cdot 6+24\cdot 7}{4\cdot 5+10\cdot 6+20\cdot 7}$.

Ce ne învață teoria?

1. Trei sau mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un ***șir de rapoarte egale***.

Exemplu: Rapoartele: $\frac{3}{2}$, $\frac{7,5}{5}$, $\frac{12}{8}$ au aceeași valoare 1,5. Deci ele formează un șir de rapoarte egale și scriem $\frac{3}{2}=\frac{7,5}{5}=\frac{12}{8}$.

În general, dacă $\frac{a_1}{b_1}=k$, $\frac{a_2}{b_2}=k$, $\frac{a_3}{b_3}=k$, ..., $\frac{a_n}{b_n}=k$, atunci aceste n rapoarte formează șirul de rapoarte egale $\boldsymbol{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=k}$.

Observație: Oricare două rapoarte dintr-un șir de rapoarte egale formează o proporție.

2. Dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}$, atunci fiecare raport este egal cu $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}$.

Într-adevăr, dacă valoarea fiecărui raport este k, atunci $a_1 = b_1 \cdot k$, $a_2 = b_2 \cdot k$, ..., $a_n = b_n \cdot k$, deci

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{b_1 \cdot k + b_2 \cdot k + b_3 \cdot k + \ldots + b_n \cdot k}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) \cdot k}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = k.$$

Exemplu: $\frac{2}{3} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2+5+3}{3+7{,}5+4{,}5} = \frac{10}{15}$.

3. Dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, atunci fiecare raport este egal cu $\frac{a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \ldots + a_n \cdot k_n}{b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \ldots + b_n \cdot k_n}$,

unde k_1, k_2, k_3, ..., k_n sunt numere raționale pozitive, nu toate nule.

Exemplu: $\frac{2}{3} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{3 \cdot 2 + 7{,}5 \cdot 4 + 4{,}5 \cdot 6} = \frac{42}{63}$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să scriem un șir de fracții subunitare egale, cu cel mai mare numitor egal cu 9.

2. Să se scrie un șir de cinci rapoarte egale cu raportul $\frac{4}{3}$.

Învățăm să rezolvăm

1. Știm șirul de rapoarte egale $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ și suma $a + b + c = 6$, $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$. Aflați numerele raționale *a*, *b* și *c*.

Rezolvare:

Metoda 1: Pornim de la relația $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5}$ și, ținând cont de suma $a+b+c=6$, obținem

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{1}{2}$. Egalăm succesiv fiecare dintre primele trei rapoarte cu $\frac{1}{2}$ și obținem:

$\frac{a}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$; $\frac{b}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$ și $\frac{c}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$.

Metoda 2: Cum cele trei rapoarte sunt egale, putem scrie $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$, unde $k \in \mathbb{Q}_+$. Egalăm fiecare raport cu k și obținem $\frac{a}{3} = k \Rightarrow a = 3k$, $\frac{b}{4} = k \Rightarrow b = 4k$ și $\frac{c}{5} = k \Rightarrow c = 5k$. Înlocuim în suma dată valorile lui x, y și z obținute în funcție de k, și avem: $a + b + c = 6 \Rightarrow 3k + 4k + 5k = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Revenim la relațiile care exprimă a, b, c în funcție de k și obținem $a = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $b = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ și $c = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

2. Dacă $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{3}{5}$, calculați $\frac{2a+3b+5c}{2x+3y+5z}$.

Rezolvare: Din proprietățile rapoartelor și proporțiilor avem următoarele relații: $\frac{a}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2a}{2x} = \frac{3}{5}$; $\frac{b}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3b}{3y} = \frac{3}{5}$ și $\frac{c}{z} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5c}{5z} = \frac{3}{5}$. De aici deducem că $\frac{2a}{2x} = \frac{3b}{3y} = \frac{5c}{5z} = \frac{3}{5}$ și, din proprietatea șirului de rapoarte egale, obținem $\frac{2a}{2x} = \frac{3b}{3y} = \frac{5c}{5z} = \frac{2a+3b+5c}{2x+3y+5z} = \frac{3}{5}$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Află termenii necunoscuți din șirurile de rapoarte egale:

a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{10} = \frac{3}{y} = \frac{z}{20}$; **b)** $\frac{x}{1} = \frac{3,6}{4,8} = \frac{1,8}{y} = \frac{z}{5,2}$; **c)** $\frac{9}{22,5} = \frac{8}{x} = \frac{22}{y} = \frac{z}{75}$.

2. Calculează $\frac{a+c+e}{b+d+f}$, știind că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{1}{10}$.

3. Suma numerelor x, y și z este 78000. Determină numerele x, y și z, dacă $\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$.

4. Suma numerelor x, y și z este 24,5. Află numerele x, y și z, știind că $\frac{x}{1,6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5,2}$.

5. Dacă $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h} = 4$, atunci calculează $10 - \frac{a+b+c+d}{e+f+g+h}$.

6. Știind că $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{5} = \frac{5z}{4}$ și că $x+y+z=1$, determină numerele x, y și z.

7. Află numerele a, b și c din șirul de rapoarte $\frac{a}{5} = \frac{b}{11} = \frac{c}{9}$, știind că $4a + 3b + 2c = 284$.

8. Dacă $\frac{a}{x} = 3$ și $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, atunci calculează:

a) $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; **b)** $\frac{2a+3b+4c}{2x+3y+4z}$; **c)** $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Proiect scratch

Modelează scenariul: Pe un fundal albastru cu titlul „Proporții”, 4 personaje identice (Stânga-sus, Stânga-jos, Dreapta-sus, Dreapta-jos), afișează 4 numere aleatoare, la distanță de 1 secundă. Apoi apare „Big M”, care întreabă: „Este proporție ? (D/N)” și așteaptă răspunsul, urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of !”.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului
corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Un șir de rapoarte egale se poate completa cu:

p)	q)	r)	s)
Raportul dintre produsul numărătorilor și produsul numitorilor	Raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor	Raportul dintre triplul sumei primilor doi numărători și triplul sumei primilor doi numitori	Raportul dintre suma primului numărător cu dublul sumei celui de-al doilea numărător și suma primului numitor cu dublul celui de-al doilea numitor

2. Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{4}{9}$ derivă

o)	p)	q)	r)
$\frac{a-9}{b-9}=\frac{4}{9}$	$\frac{a+4}{b+4}=\frac{4}{9}$	$\frac{a+b}{b}=\frac{4}{13}$	$\frac{a}{b}=\frac{8}{18}$

3. Termenul necunoscut al proporției $\frac{15}{x}=\frac{60}{160}$

n)	o)	p)	q)
640	40	5	1

4. Raportul dintre 1,(2) și 2,2 are valoarea

c)	d)	e)	f)
45	$\frac{5}{9}$	0,5	$\frac{12}{22}$

5. Procentul pe care îl reprezintă 30 din 200 este

e)	f)	g)	h)
15	15%	1,5	30

6. După creșterea cu 20% numărul 17,(3) devine

n)	o)	p)	q)
20,8	3,4(6)	34,(6)	20,(8)

7. O creștere cu 100% a unei cantități înseamnă

s)	t)	u)	v)
păstrarea cantității	dublarea cantității	înjumătățirea cantității	triplarea cantității

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Raportul dintre numerele 18 și 15 este … .

10p **2.** Dacă raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{3}{5}$, atunci raportul perimetrelor lor este … .

10p **3.** Dacă 20% dintr-un număr este 15, atunci numărul este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Dacă $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, atunci $\frac{6x+y}{9x+3y}$ este:

a) $\frac{5}{9}$; **b)** $\frac{7}{12}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{6}{9}$.

10p **2.** Știind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{7}{5}$, atunci $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ este:

a) 3; **b)** 1; **c)** $\frac{7}{5}$; **d)** $\frac{11}{16}$.

10p **3.** Valoarea lu x din proporția $\frac{1+2+3+...+100}{25}=\frac{x}{3}$ este:

a) 101; **b)** 100; **c)** 606; **d)** 51.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Într-o clasă sunt 24 de elevi. Ştiind că o treime dintre elevi sunt băieţi şi că 50% dintre fete joacă volei, aflaţi câte fete joacă volei.

10p **2.** Raportul dintre distanța pe hartă și distanța reală este 1:1.000.000. Calculați:
a) Distanța reală dintre două localități, în km, dacă distanța pe hartă este de 4 cm;
b) Distanța pe hartă dintre două localități, în cm, dacă distanța reală este de 52 km.

10p **3.** Calculați raportul numerelor: $a=10^2-10-9$ și $b=2\cdot(1+2+3+...+9)$.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie înscrise în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Termenul necunoscut al proporției $\frac{2}{3}=\frac{\dots}{30}$ este … .

10p **2.** Dacă raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{2}{7}$, atunci raportul ariilor lor este … .

10p **3.** 15% din 400 este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Dacă $\frac{x-5}{6}=\frac{8}{3}$, atunci x este:

a) 16; **b)** 21; **c)** $\frac{43}{3}$; **d)** 6.

10p **2.** Știind că $\frac{2x+3y}{6x-y}=\frac{7}{5}$, atunci $\frac{x}{y}$ este:

a) 3; **b)** 1; **c)** $\frac{7}{5}$; **d)** $\frac{11}{16}$

10p **3.** Știind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{1}{3}$, atunci $\frac{2a+3c+4e}{2b+3d+4f}$ este:

a) $\frac{1}{3}$; **b)** 3; **c)** $\frac{5}{3}$; **d)** 1.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Înălțimea machetei unui clădiri este de 60 cm. Știind că aceasta a fost realizată la scara de $\frac{2}{300}$, află înălțimea reală a obiectului.

10p **2.** Determinați numerele x și y, știind că $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$ și $x+y=16$.

10p **3.** După două scumpiri succesive de 10%, un produs costă 484 lei. Care a fost prețul inițial al produsului? Cu cât la sută s-a mărit prețul produsului în urma celor două scumpiri?

Unitatea de învățare: Mărimi

LECȚIA 5. Mărimi direct proporționale

Atenție, începem!

A1. Ce înțelegem prin mărimi direct proporționale?

Ana a parcurs cu bicicleta, mergând cu viteză constantă, în prima zi de vacanță 28 km în 2 h, iar în a doua zi de vacanță 56 km în 4h, mergând cu aceeași viteză ca în prima zi.

	Timpul (h)	Distanța (km)
Ziua I	2	28
Ziua II	4	56

a) Folosind valoarea comună a rapoartelor din perechile: $\left(\frac{4}{2}, \frac{56}{28}\right)$ și $\left(\frac{2}{4}, \frac{28}{56}\right)$, stabiliți valoarea de adevăr a afirmației:

„Dacă timpul de deplasare, cu viteză constantă, se mărește (se micșorează) de un număr de ori, atunci și distanța parcursă se mărește (se micșorează) de același număr de ori”;

b) Observând proporțiile: $\frac{28}{2} = \frac{56}{4}$ și $\frac{2}{28} = \frac{4}{56}$, precizați cum se numesc două mărimi variabile, care depind una de alta, astfel încât raportul măsurilor lor (măsurat cu aceeași unitate de măsură) este constant. Cum recunoaștem două mărimi direct proporționale ?

Ce ne învață teoria?

***Exemplu*:** Lungimea laturii, (mărimea M1) și perimetrul pătratului, (mărimea M2), măsurate în cm, sunt mărimi direct proporționale.

> **1.** Două mărimi variabile, care depind una de alta, astfel încât raportul măsurilor lor este constant, se numesc ***mărimi direct proporționale***.
>
> **2.** Între două mulțimi ordonate de numere nenule $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ și $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ există o ***proporționalitate directă*** dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$, unde k se numește ***coeficient de proporționalitate***.

: 4	Latura pătratului	3	5	7	·4
	Perimetrul pătratului	12	20	28	

M1	M2
3	12
5	20
7	28

$$\frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

3. *Regula de trei simplă* se aplică la rezolvarea problemelor cu mărimi proporționale, în care sunt date două valori ale uneia dintre mărimi și o valoare a celeilalte. Valoarea necunoscută se numește *al patrulea proporțional* și se află astfel:

- Se identifică relația de proporționalitate directă;
- Se înregistrează valorile celor două mărimi ca în exemplul dat și se află necunoscuta din proporție.

Exemplu: Un pahar cu 150g de iaurt conține 0,15 g de calciu. Află masa calciului dintr-un pahar cu 200g de iaurt.

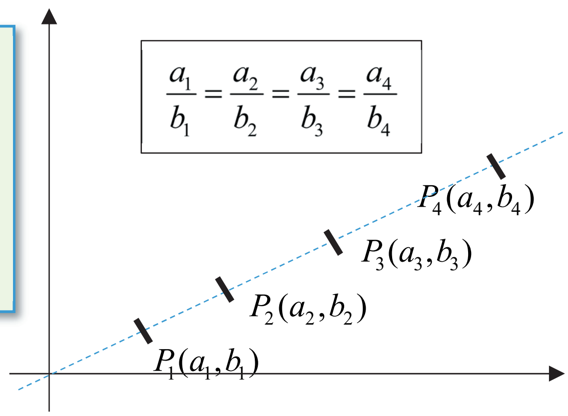
Rezolvare:
Mărimile: masa iaurtului (M) și masa calciului (m) sunt direct proporționale. Atunci procedăm ca în tabel:

M	*m*
150	*0,15*
200	*x*

$$\frac{150}{200}=\frac{0,15}{x}\Leftrightarrow x=\frac{200\cdot 0,15}{150}=0,2.$$

În paharul mare se află 0,2 g calciu.

4. Într-un sistem de axe de coordonate, punctele cu coordonate reprezentate de perechi de numere corespunzătoare unei relații de proporționalitate directă, sunt coliniare și dreapta care le conține trece prin originea sistemului de axe.



Să vedem ce am înțeles

1. Să stabilim dacă perechile de mărimi date sunt direct proporționale:

a) Lungimea laturii cubului și volumul acestuia;

b) Timpul și cantitatea de apă ce curge, printr-un robinet, cu debit constant.

2. Să aflăm x, știind că perechea de numere de pe prima linie și perechea de numere de pe a doua linie a tabelului sunt în relație de proporționalitate directă.

4	10
x	24

Învățăm să rezolvăm

1. Suma de 400 lei alocată cumpărării cărților de premii pentru cele trei clase a VI-a se împarte proporțional cu numărul de premianți din fiecare clasă. Aflați ce sumă primește fiecare clasă pentru cărți, dacă în prima clasă sunt 6 premianți, în a doua sunt 8, iar în cea de-a treia sunt 11.

***Rezolvare*:** Notăm cu x, y și z sumele pentru prima, a doua și, respectiv, a treia clasă. Din proporționalitatea directă a mulțimilor ordonate (x, y, z) și $(6, 8, 11)$, avem $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z}{11}$, iar din proprietatea șirului de rapoarte egale rezultă $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z}{11}=\frac{x+y+z}{6+8+11}$. Prin înlocuirea sumei $x+y+z$ cu 400 obținem $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z}{11}=\frac{400}{25} \Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z}{11}=16$. Apoi, $x = 6 \cdot 16 = 96$ lei, $y = 8 \cdot 16 = 128$ lei și $z = 11 \cdot 16 =$ 176 lei. Deci clasa cu 6 premianți primește 96 lei, cea cu 8 premianți primește 128 lei, iar cea cu 11 premianți primește 176 lei.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Determină dacă cele două mărimi din problemă sunt mărimi direct proporționale:

a) Dacă 2 cutii de chibrituri conțin 80 de bețe, atunci 7 cutii de același fel conțin 280 de bețe;

b) Dacă 3 litri de carburant costă 12,60 lei, atunci 1,5 litri costă 6,30 lei;

c) Dacă un robinet umple un rezervor de 130 litri în 2 h, atunci el umple un rezervor de 520 litri în 8 h;

d) Dacă 2 muncitori termină o lucrare în 3 zile, atunci 4 muncitori termină aceeași lucrare în 1,5 zile.

2. Stabilește formula de proporționalitate pentru tabelele următoare:

x	4	10	18
y	1	2,5	4,5

x	4	7,5	13
y	1,6	3	5,2

x	4	6,5	13
y	16	26	52

x	4	6,4	12
y	10	16	30

3. Precizează dacă numerele din mulțimea perechilor ordonate sunt proporționale:

a) $\{(1; 8), (5; 40), (7,5; 60)\}$; **b)** $\{(4; 40), (6,5; 60), (9,2; 90)\}$; **c)** $\{(12; 30), (6; 15), (4; 10)\}$.

4. Dacă 3 l de lapte costă 17,40 lei, află cât costă 5,5 l lapte.

5. Dacă în 100 l de aer sunt 21 l de oxigen, află câți litri de oxigen sunt în 550 l de aer.

★★

6. O persoană împarte suma de 100 lei în părți direct proporționale cu numerele 1,5 și 6,5 pentru a cumpăra produsele X și Y.

a) Pentru care dintre cele două produse persoana alocă o sumă mai mare de bani?

b) Află suma de bani alocată de acea persoană pentru produsele X și Y.

7. Dacă un angajat câștigă 540 lei în 6 zile, află cât va câștiga angajatul în 4 zile.

8. Află numerele a și b, știind că sunt direct proporționale cu numerele 2 și 7 și $2b - 5a = 28$.

★★★

9. Un obiect are înălțimea de 65 cm, iar macheta sa are înălțimea de 1,3 cm. Ce înălțime are macheta unui obiect înalt de 412, 5 cm dacă este realizată la aceeași scară?

10. Află câte procente reprezintă numărul a din numărul b, știind că a și b sunt direct proporționale cu numerele 12 și 15.

11. Numerele de pe prima linie a tabelului alăturat sunt proporționale cu numerele de pe a doua linie. Formulează o problemă cu datele din tabel, care se rezolvă cu ajutorul direct proporționalității a două mărimi.

3	x
6	14

LECȚIA 6. Mărimi invers proporționale

Atenție, începem!

Ce înțelegem prin mărimi invers proporționale?

A1. Un arheolog poate parcurge distanța de la Timișoara la localitatea antică Zurobaro, cu bicicleta sau cu mașina, pe drumul spre Arad.

a) Arătați că $v_{velo} \cdot t_{velo} = v_{auto} \cdot t_{auto}$, folosind valorile vitezelor medii și ale timpilor din tabelul alăturat.

	Cu bicicleta	Cu mașina
Viteza medie(km/h)	25	50
Timpul (h)	0,8	0,4

b) Observând că valoarea raportului vitezelor medii este $\frac{50}{25} = 2$ și valoarea raportului timpilor de deplasare este $\frac{0,4}{0,8} = \frac{1}{2}$, răspundeți la următoarele întrebări:

– Dacă v_{auto} este de două ori mai mare decât v_{velo}, de câte ori este mai mic t_{auto} față de t_{velo}, pe aceeași distanță?

– Raportul $\frac{50}{25}$ al vitezelor medii și inversul raportului timpilor de deplasare $\frac{0,4}{0,8}$ formează proporția $\frac{50}{25} = \frac{0,4}{0,8}$ echivalentă cu egalitatea $25 \cdot 0,8 = 50 \cdot 0,4$?

– Sunt invers proporționale viteza și timpul de deplasare pe o distanță dată ?

Ce ne învață teoria?

1. Două mărimi variabile, care depind una de alta, se numesc ***mărimi invers proporționale***, dacă produsul dintre măsurile uneia și produsul măsurilor corespunzătoare ale celeilalte, măsurate cu aceeași unitate de măsură, este constant.

Altfel spus, două mărimi sunt invers proporționale dacă raportul dintre două măsuri ale uneia este egal cu inversul raportului măsurilor corespunzătoare ale celeilalte mărimi, măsurate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: Lungimea și lățimea unui dreptunghi cu aria de 60 cm^2 sunt mărimi invers proporționale.

L (cm)	l (cm)
10	6
5	12

$\frac{10}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{1}{12}}$ sau $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$

Deci $10 \cdot 6 = 12 \cdot 5$

2. Între două mulțimi ordonate de numere nenule $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ și $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ există o ***proporționalitate inversă*** dacă $\dfrac{a_1}{\dfrac{1}{b_1}}=\dfrac{a_2}{\dfrac{1}{b_2}}=...=\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{b_n}}$, adică dacă $\boldsymbol{a_1\cdot b_1=a_2\cdot b_2=...=a_n\cdot b_n}$.

3. ***Regula de trei simplă***

***Exemplu*:** Dacă 15 camioane, de același tonaj, transportă o cantitate de marfă în 6 zile, aflați în câte zile transportă aceeași cantitate de marfă 12 camioane de același tonaj cu primele 15.
Dacă mărimile M (numărul de camioane) și t (timpul) sunt invers proporționale, atunci:

M	*t*	
15	*6*	$\dfrac{15}{12}=\dfrac{x}{6}\Rightarrow x=\dfrac{15\cdot 6}{12}=7{,}5$
12	*x*	*Deci, mai puține camioane transportă marfa în 7,5 zile (mai multe zile).*

Să vedem ce am înțeles

1. Ana, Bia, Mia și Pia au în buzunar sumele: *a*, *b*, *c*, respectiv *d*. Să scriem că sumele Anei, Biei, Miei și Piei sunt invers proporționale, respectiv cu numerele 2, 5 ,7 și 13.

2. Dacă prețul unui bec economic este 12 lei, o familie cumpără 8 becuri. Câte becuri de același fel ar putea cumpăra familia, cu aceeași sumă, dacă prețul becului ar fi 16 lei?

Învățăm să rezolvăm

Trei mobile parcurg aceeași distanță. Primul mobil, cu viteza de 75 km/h, parcurge distanța în 4 ore. Al doilea circulă cu viteza de 60 km/h, iar al treilea parcurge distanța în 3 ore și 20 minute. Aflați:
a) timpul în care al doilea mobil parcurge distanța; **b)** viteza medie a celui de-al treilea mobil.

***Rezolvare*:** Notăm cu *a*, *b*, respectiv *c* vitezele și cu *x*, *y*, respectiv *z*, timpii necesari celor trei automobile pentru a parcurge distanța. Pentru că viteza de deplasare și timpul necesar sunt mărimi invers proporționale, avem proporțiile: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{y}{x}$ și $\dfrac{a}{c}=\dfrac{z}{x}$. Prin înlocuirea literelor, obținem $\dfrac{75}{60}=\dfrac{y}{4}$, respectiv $\dfrac{75}{c}=\dfrac{200}{240}$. De unde, $y=\dfrac{75\cdot 4}{60}=5$ ore și $c=\dfrac{75\cdot 240}{200}=90$ km/h.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Determină dacă cele două mărimi din problemă sunt mărimi invers proporționale:

a) Depozitarea unei cantități de lichid necesită 18 sticle de 900 ml sau 36 sticle de 450 ml;

b) Dacă 4 zidari fac un zid în 12 zile, atunci 6 zidari, cu aceeași normă, fac zidul în 8 zile;

c) O pompă cu puterea de 4 kW ridică o cantitate de apă la 6 m înălțime, iar o pompă cu puterea de 6 kW ridică aceeași cantitate de apă la 9 m înălțime;

d) Dacă un dreptunghi are lungimea de 7,5 m și lățimea de 2 m, atunci un alt dreptunghi, cu aceeași arie cu primul, are lungimea de 5 m și lățimea de 3 m.

2. Determină dacă numerele din linia I și din linia a II-a sunt valori ale unor mărimi invers proporționale:

a)

2	3	4	2,5
12	8	6	9,6

b)

1,2	4	1,5
30	9	24

c)

5	15	3
27	9	45

3. Stabilește dacă mărimile din tabel sunt invers proporționale și în caz afirmativ scrie formula de proporționalitate:

a)

x	60	80	100
y	40	30	24

b)

x	5	4	2
y	3	3,75	7,5

c)

x	3	2	5
y	7	10,5	4,2

4. Cățelușul Rex parcurge 6 km, deplasându-se cu viteză constantă, în 45 de minute. În cât timp parcurge Rex aceeași distanță, în alergare, cu viteză dublă ?

5. Suma de 350 lei se împarte în două părți, x și y, invers proporționale cu numerele 2 și 5.

a) Care dintre cele două numere x și y este mai mare? **b)** Află numerele x și y.

6. Dacă un automobil cu viteza constantă de 90 km/h parcurge o distanță în 3 ore,

a) un automobil cu viteza constantă de 60 km/h parcurge aceeași distanță într-un timp mai lung sau mai scurt? **b)** află timpul în care parcurge distanța respectivă automobilul care merge cu viteza de 60 km/h.

7. Află numerele naturale a și b, știind că sunt invers proporționale cu numerele 3 și 2, iar diferența lor este 17.

8. Află valoarea raportului $\dfrac{4a-b}{2a+3b}$, știind că numerele a și b sunt invers proporționale cu numerele 6 și 5.

9. Dacă un dreptunghi are lungimea de 12 m și lățimea de 9 m, află lățimea dreptunghiului cu lungimea de 36 m și aceeași arie ca și dreptunghiul dat.

6	x
4	3

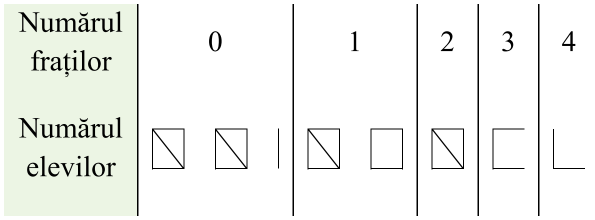
10. Numerele de pe prima linie a tabelului alăturat sunt invers proporționale cu numerele de pe a doua linie. Formulează o problemă cu datele din tabel, care se rezolvă cu ajutorul invers proporționalității a două mărimi.

LECȚIA 7. Elemente de organizare a datelor; probabilități

Atenție, începem!

Cum organizăm și clasificăm informațiile culese?

A1. Pentru a-și forma o imagine asupra populației școlare viitoare, profesorul diriginte înregistrează numărul fraților fiecărui elev al clasei, în tabelul numit *prin sortare*:

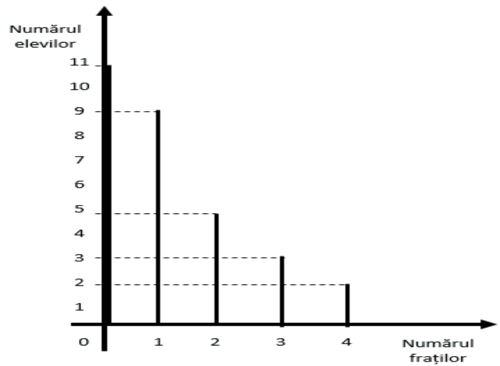


Înregistrați datele din acest tabel, în tabelul următor, folosind modelul dat:

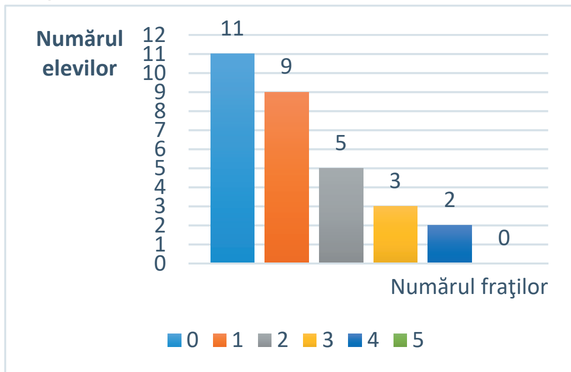
Numărul fraților	0	1	2	3	4
Numărul elevilor			5		

O grupă a clasei observă graficul **a)**, iar cealaltă graficul **b)** și fiecare răspunde la întrebarea: Graficul este un mod de prezentare a datelor înregistrate de profesorul diriginte?

a) grafic cu segmente



b) grafic cu coloane



Cum interpretăm datele înregistrate?

Dacă mulțimea elevilor clasei asupra căreia se face ***studiul statistic*** despre ***proprietatea*** elevilor de a avea un număr de frați se numește ***populație***, atunci elevii clasei se numesc ***elementele*** populației, numărul lor se numește ***efectivul total*** (N) al populației, numărul n_i al elevilor din clasă care au un număr v_i, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, de frați se numește ***efectivul*** n_i, iar v_i este ***valoarea efectivului*** n_i.

Folosind unul dintre modurile de înregistrare și prezentare de mai sus, scrieți:

a) numărul elevilor care nu au frați (efectivul n_0 corespunzător valorii v_0);

b) numărul total al elevilor asupra căruia se face studiul (*efectivul total* al *populației*);

c) care dintre cele patru moduri de înregistrare a datelor furnizează informația, cel mai simplu și rapid.

Cum analizăm datele dintr-o înregistrare statistică?

Dacă raportul $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ se numește ***frecvența efectivului*** n_i, stabiliți cea mai mare frecvență din tabel:

Numărul fraților (v_i)	0	1	2	3	4	
Numărul elevilor (n_i)	11	9	5	3	2	N=30
Frecvența (f_i)	$\approx 0{,}37$	0,30	$\approx 0{,}17$	0,10	$\approx 0{,}06$	1

Cum interpretăm media unui set de date?

Calculați *media aritmetică ponderată* m_a a *valorilor* v_i raportată la *efectivele* n_i, unde $m_a = \dfrac{n_0 \cdot v_0 + n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2 + n_3 \cdot v_3 + n_4 \cdot v_4}{n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$. Determinați între ce numere naturale este cuprinsă media aritmetică a numărului de frați.

A2. În experiența aruncării, o singură dată, a unui zar, este posibil să apară, la întâmplare, oricare dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5 sau 6. Adică există 6 ***cazuri posibile***. Dacă se urmărește apariția unuia dintre numerele de pe fețele zarului, spunem că avem un ***caz favorabil***.

a) Scrieți raportul procentual dintre numărul cazurilor favorabile apariției numărului 5 (evenimentul numărul 5) și numărul cazurilor posibile, la o singură aruncare a zarului;

b) Dacă la o singură aruncare a unui zar, raportul procentual dintre numărul cazurilor favorabile apariției numărului 5 și numărul cazurilor posibile se numește *probabilitatea apariției numărului 5,* scrieți procentual *probabilitatea* apariției numărului 5.

A3. Șase cartonașe identice sunt numerotate cu divizorii naturali ai numărului 12. Se extrage la întâmplare un cartonaș. Scrieți:

a) Numărul cazurilor posibile; **b)** Numărul cazurilor favorabile pentru apariția unui pătrat perfect; **c)** Probabilitatea realizării evenimentului „pătrat perfect”.

Ce ne învață teoria?

Zilnic primim informații sub diferite forme. Pentru a putea fi ușor interpretate, ele trebuie organizate statistic.

Dacă într-o ***experiență*** (în producerea unui fenomen întâmplător, care se poate repeta în condiții date), există un număr de ***evenimente posibile*** *echiprobabile,cazuri posibile (p)* și un eveniment așteptat să se realizeze de *(f) cazuri favorabile,* atunci ***probabilitatea*** *realizării evenimentului așteptat dintr-o mulțime de evenimente posibile este raportul*:

$$P = \frac{f\,(\textit{numărul cazurilor favorabile})}{p(\textit{numărul cazurilor posibile})}.$$

De remarcat: **a)** $0 \le P \le 1$; **b)** Dacă $P = 0$ spunem că evenimentul este ***imposibil***, iar dacă $P = 1$ spunem că evenimentul este ***sigur***.

Să vedem ce am înțeles

În carnetul de elev al lui Dan, citim următoarele note, în ordine cronologică:

6 – 4 – 5 – 8 – 5 – 5 – 6 – 4 – 4 – 8 – 5 – 6.

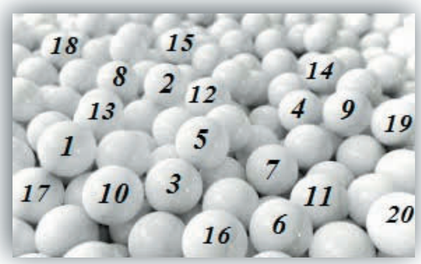
a) Completați tabelul;
b) Realizați diagrama cu coloane a datelor înregistrate ;
c) Calculați media notelor;
d) Calculați probabilitatea obținerii notei 8

Nota	4	5	6	8
Numărul de note				

Învățăm să rezolvăm

1. Dintr-o urnă cu bile identice, numerotate de la 1 la 20, se extrage o bilă. Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie numerotată cu un multiplu de 3.

***Rezolvare*:** Observăm că experiența constă în extragerea, o singură dată, a unei bile din urnă, numărul cazurilor posibile este 20, iar numărul cazurilor favorabile evenimentului „apariția unui multiplu al lui 3” este cardinalul mulțimii $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, adică 6. Atunci, probabilitatea apariției bilei numerotate cu un multiplu al lui 3 este $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$.



2. O asociație de consumatori a testat durata de funcționare a 20 de modele de baterii. Rezultatele, exprimate în ore de funcționare, sunt: 65–58–65–76–68–25–77–67–75–78–58–68–73–75–76–60–65–75–77–81. Reprezentați datele culese, calculați media timpului de funcționare și sugerați o rezoluție.

***Rezolvare*:**

Sortare

Durata de funcționare în h (valoarea v_i a efectivului)	25	58	60	65	67	68	73	75	76	77	78	81
Număr modele (efectivul n_i)			∟			⊏			∟			⊏	∟	∟				

Tabel de date

Durata de funcționare în h	25	58	60	65	67	68	73	75	76	77	78	81	
Număr modele	1	2	1	3	1	2	1	3	2	2	1	1	**N**=20
$f_i = \frac{n_i}{N}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100}$	1

- Din prezentările statistice, remarcăm un singur model de baterie de foarte slabă calitate și unul de foarte bună calitate. Fiecare dintre aceste modele reprezintă 5% din totalul bateriilor.

- Dacă vom calcula media duratei de funcționare a unei baterii, adică:

$$m_a = \frac{1\cdot 25 + 2\cdot 58 + 1\cdot 60 + 3\cdot 65 + 1\cdot 67 + 2\cdot 68 + 1\cdot 73 + 3\cdot 75 + 2\cdot 76 + 2\cdot 77 + 1\cdot 78 + 1\cdot 81}{20} = 68,$$

observăm că durata medie de funcționare a unei baterii este de 68 ore și că, peste medie, sunt 10 modele de baterii, iar sub medie sunt tot 10 modele. Deci, producătorul trebuie să renunțe la 10 modele de baterii.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Răspunsurile elevilor la un sondaj privind numărul cărților citite, într–o perioadă, sunt prezentate în tabel:

0	2	6	2	5	1	3	0
1	2	5	1	3	1	3	1
2	0	2	2	4	1	2	2

a) Completează tabelul:

Număr cărți citite	0	1	2	3	4	5	6	
Număr elevi								N=24
Procentajul elevilor								

b) Realizează diagrama cu coloane:

c) Precizează câți elevi au citit cel puțin 3 cărți și câți elevi au citit cel mult două cărți;
d) Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev, acesta să fi citit 5 cărți.

2. Se consideră experiența aruncării unui zar, o singură dată. Calculează probabilitatea pentru:
a) Apariția unui divizor al lui 6; **b)** Apariția unui număr par; **c)** Apariția unui număr prim.

3. Se consideră experiența alegerii unei cifre. Calculează probabilitatea ca aceasta să fie:
a) pătrat perfect; **b)** cel puțin egală cu șapte; **c)** cifră impară.

4. Calculează probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea primelor 30 de numere naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifre pare.

5. Calculează probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea primelor 30 de numere naturale mai mari ca 23, acesta să nu conțină cifra 8.

6. Un elev are de pregătit 12 teme, dintre care va fi aleasă una pentru prezentare. Câte teme trebuie să pregătească elevul pentru ca probabilitatea alegerii unei teme pregătite să depășească 70%.

7. Determină numărul natural n, cu $43 < n < 67$, astfel ca probabilitatea alegerii un număr din mulțimea $\{38, 39, 40, ..., n\}$ și acesta să nu fie multiplu de 10, să fie maximă.

Proiect scratch

Modelează în Scratch următorul scenariu: Pe un fundal roz cu titlul „Probabilități”, un personaj spune „Spune-mi, te rog! Probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea {1, 2, .,,, 92}, acesta să fie multiplu de 6 este „(unde 92 este ales aleatoriu până la 100, iar 6 tot aleatoriu până la 10). Și așteaptă răspunsul (cu două zecimale exacte), urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of ! Trebuia ...” (urmat de valoarea corectă, la noi ar fi 0.16).

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ultima cifră ,1 este

l)	**m)**	**n)**	**o)**
0,5	0,1	1%	0,05

2. Volumul unui balon de cauciuc nu este direct proporțional cu:

ă)	**b)**	**c)**	**d)**
densitatea conținutului	masa conținutului	dimensiunile balonului	dimensiunile conținutului

3. Un autobuz transportă x pasageri în h ore, pe o distanță d km, consumând b litri de combustibil. Mărimile care nu sunt proporționale sunt

r)	**s)**	**t)**	**u)**
numărul de pasageri și distanța	timpul cursei și distanța	timpul cursei și cantitatea de combustibil	distanța și cantitatea de combustibil

4. Cu cinci cutii de vopsea, 3 vopsitori acoperă 80 mp în 3 ore. În cât timp ar acoperi 80 mp 4 vopsitori?

e)	**f)**	**g)**	**h)**
2 ore și 15 minute	4 ore	2 ore	2 ore și 20 minute

5. Cu cinci cutii de vopsea se acoperă 80 mp. Câți mp se acoperă cu 8 cutii de vopsea?

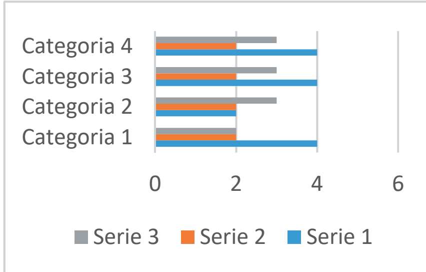
g)	**h)**	**i)**	**j)**
50	64	128	250

6. Cu cinci cutii de vopsea, 3 vopsitori acoperă 80 mp în 3 ore. Câți mp se acoperă cu 9 cutii?

m)	**r)**	**n)**	**o)**
144	128	81	44,(4)

7. În diagrama alăturată, Seria 2 la Categoria 3 are valoarea

a)	**b)**	**c)**	**d)**
2	3	4	1



Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Numerele 18 și 15 sunt ... proporționale cu numerele 6 și 5.

10p **2.** Dacă, mergând cu 60 km/h, un automobil parcurge o distanță în 50 min, atunci mergând cu 30 km/h parcurge aceeași distanță în … .

10p **3.** Probabilitatea ca, aruncând un zar, să se obțină o față număr prim este ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Suma de 100 lei se împarte în două părți invers proporționale cu 3 și 7. Cel mai mare dintre numere este:

a) 70; **b)** 30; **c)** 21; **d)** 7.

10p **2.** Dacă latura unui pătrat se mărește de două ori, atunci perimetrul său se mărește de x ori. Valoarea lui x este:

a) 16; **b)** 8; **c)** 4; **d)** 2.

10p **3.** Probabilitatea ca,alegând un număr al mulțimii $A=\{n \mid n \in \mathbb{N}, 8 \le 2^n \le 64\}$, acesta să fie prim este:

a) 1; **b)** 0,25; **c)** 0,5; **d)** 0,75.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Află trei numere invers proporționale cu 2, 3 și 4, dacă produsul lor este 72.

10p **2.** Trei robinete pot umple un bazin în 12 ore. În câte ore pot umple acelaşi bazin patru robinete, cu acelaşi debit?

10p **3.** Reprezentați printr-un grafic cu coloane datele din tabelul următor și calculați media clasei la matematică:

Nota la matematică	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	3	4	6	9	5	3

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Numerele 6 și 3 sunt ... proporționale cu 8 și 16.

10p **2.** Dacă pentru 3 creioane se plătesc 3,6 lei, pentru 9 creioane se plătesc ... .

10p **3.** Probabilitatea ca, extrăgând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, acesta să fie divizibil cu 3 este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

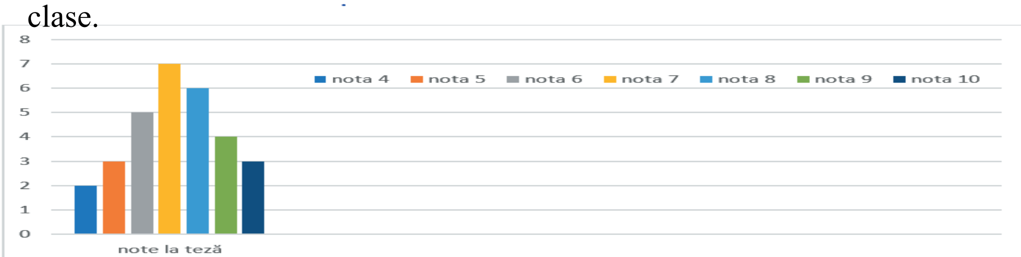
10p **1.** Diferența a două numere direct proporționale cu 2 și 9 este 70. Cel mai mic dintre numere este:

a) 90; **b)** 20; **c)** 40; **d)** 18.

10p **2.** Dacă latura unui pătrat se micșorează de trei ori, atunci perimetrul său se micșorează de x ori. Valoarea lui x este:

a) 9; **b)** 12; **c)** 6; **d)** 3.

10p **3.** În graficul următor sunt înregistrate notele la teza la matematică ale elevilor unei clase.



Numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 7 la teză este:

a) 20; **b)** 13; **c)** 7; **d)** 17.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Zece tractorişti ară o suprafaţă de teren în 12 ore. În cât timp vor ara, aceeaşi suprafaţă, 6 tractorişti?

10p **2.** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 90. Se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca numărul scris pe bilă să fie pătrat perfect?

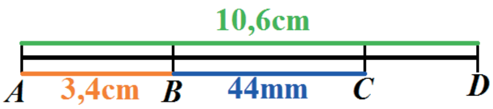
10p **3.** Determinați trei numere a căror sumă este egală cu 180 și care sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4.

Teme pentru portofoliu

1. Cum se modifică un raport dacă:

a) mărim numărătorul de 3 ori;
b) micșorăm numărătorul de 5 ori;
c) mărim numitorul de 4 ori;
d) micșorăm numitorul de 10 ori;
e) mărim ambii termeni de 7 ori;
f) micșorăm ambii termeni de 2 ori?

2. Pe un segment AD cu lungimea de 10,6 cm, se consideră punctele B și C, astfel încât $AB = 3{,}4$ cm și $BC = 44$ mm.



a) Determină lungimea segmentului CD în dm.

b) Scrie rapoartele lungimilor: $\frac{AB}{AD}$, $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AB}{CD}$, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{BC}{CD}$, $\frac{BC}{AD}$, $\frac{CD}{AB}$, $\frac{CD}{BC}$, $\frac{CD}{AC}$, $\frac{CD}{AD}$.

3. Radu a economisit într-o săptămână a lei, iar sora sa, Ana, a economisit în aceeași perioadă b lei. Raportul dintre suma economisită de Radu și cea economisită de Ana este $\frac{a}{b} = 0,7$.

a) Stabilește care dintre cei doi frați a economisit mai mulți bani.
b) Dacă Ana a economisit 20 lei, câți lei a economisit Radu?
c) Dacă Radu a economisit 14 lei, câți lei a economisit Ana?

4. Scrie următoarele rapoarte sub formă de raport procentual:

a) $\frac{5}{4}$; **b)** $\frac{4}{5}$; **c)** $\frac{3}{4}$; **d)** 0,25;
e)12,5; **f)** $\frac{3}{25}$; **g)** $\frac{7}{20}$; **h)** $\frac{9}{10}$.

5. Scrie raportul procentual sub formă de raport în care termenii acestuia sunt numere prime între ele:

a) 12%; **b)** 5%; **c)** 20%; **d)** 150%;
e) $\frac{3}{4}\%$; **f)** 0,(3)%; **g)** 200%.

6. Calculează:

a) 4,5% din 100, din 360, respectiv din 80;
b) 18,6% din 100, din 250, respectiv din 40;
c) 140% din 100, din 350, respectiv din 60.

7. Dintre cei 3600 de elevi ai unui liceu, 1980 studiază engleza, 720 franceza, 630 spaniola și restul germana. Determină procentul de elevi care studiază engleza, franceza, spaniola, respectiv germana.

8. Determină cu ce procent se ieftinesc prețurile, știind că: **a)** un obiect de 130 lei s-a ieftinit cu 13 lei;
b) un obiect de 200 lei s-a ieftinit cu 50 lei;
c) un obiect de 1000 lei s-a ieftinit cu 200 lei;
d) un obiect de 95 lei s-a ieftinit cu 9,50 lei;
e) un obiect de 75 lei s-a ieftinit cu 35 lei.

9. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{2}{5}$. Află raportul perimetrelor celor două pătrate.

10. Raportul perimetrelor a două pătrate este $\frac{3}{7}$. Află raportul lungimilor laturilor celor două pătrate.

11. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{3}{4}$. Află raportul ariilor celor două pătrate.

12. Raportul lungimilor laturilor a două cuburi este $\frac{3}{2}$. Calculează raportul volumelor celor două cuburi.

13. La o secție de votare în care candidează trei persoane, X, Y și Z, sunt 800 de votanți. Știind că pentru candidatul X au votat 42,5% din alegători, pentru domnul Y au votat 30% și pentru domnul Z au votat 25%, iar restul voturilor au fost anulate, află numărul de voturi anulate.

14. Dintre 55,8 milioane de francezi, 62,5% merg vara în vacanță, iar dintre aceștia, 44% merg la mare. Câți francezi merg vara la mare?

16. În cadrul unui experiment de laborator, se fierb într-un vas 1,2 l de soluție de apă cu sare având concentrația de 16%. La finalul experimentului se măsoară cantitatea de soluție și se observă că s-au evaporat 0,4 l. Află concentrația soluției rămase.

17. Cu ce cantitate de aliaj cu titlul de 0,65 trebuie să se amestece 24 g de aliaj cu titlul de 0,85 pentru a obține un aliaj cu titlul de 0,70?

18. Panteonul din Atena are înălțimea de 18 m, iar o machetă a sa are înălțimea de 72 cm. Află scara la care este făcută macheta.

19. Localitatea A, cu suprafața de 3 km^2, are 750 locuitori, iar localitatea B, cu suprafața de 4 km^2, are 1000 de locuitori.

a) Dacă prin **densitatea populației** unui teritoriu se înțelege raportul dintre numărul de locuitori și suprafața teritoriului, află densitățile populației celor două localități și verifică dacă cele două rapoarte formează o proporție;

b) Scrie raportul dintre numărul locuitorilor celor două localități și raportul dintre suprafețele lor, apoi verifică dacă cele două rapoarte formează o proporție.

20. Un automobil parcurge distanța de 170 km în 2 ore. Verifică dacă viteza de deplasare a automobilului este de 65 km/h.

21. Determină termenul necunoscut din proporțiile următoare:

a) $\frac{7}{0,6}=\frac{\frac{5}{3}}{d}$; **b)** $\frac{4\frac{1}{3}}{0,(3)}=\frac{2,5}{c}$; **c)** $\frac{2\frac{1}{3}}{x}=\frac{\frac{1}{3}}{4}$; **d)** $\frac{0,5\cdot x}{0,4}=\frac{4,5}{1,2}$; **e)** $\frac{1,3}{13\cdot x}=\frac{2,(3)}{0,1(6)}$.

22. Din proporția $\frac{1,1}{1,65}=\frac{2,2}{3,3}$ formează cinci proporții derivate cu alți termeni și probează dacă sunt corect formate, cu ajutorul proprietății fundamentale a proporțiilor.

23. Fie proporțiile: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ și $\frac{c}{b}=\frac{3}{2}$, cu $a,b,c\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrează că $\frac{a+2b+c}{b}=4$; **b)** Știind că $a+c=6$, află numărul *b*.

24. Dacă $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{3}{11}, x,y,z\neq 0$ calculează $11\cdot\frac{a+b+c}{x+y+z}-3$.

25. Știind că $\frac{3x}{5}=\frac{2y}{3}=\frac{6z}{7}$ și că $x\cdot y\cdot z=630$, determină numerele *x*, *y* și *z*.

26. Suma numerelor *x, y* și *z* este 14400. Determină numerele *x, y* și *z* dacă $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$.

27. Din 3 kg de portocale se obțin 1,2 litri de suc.

a) Află câți litri de suc se obțin din 10 kg de portocale;

b) Află de cîte kilograme de portocale este nevoie pentru a obține 5 litri de suc.

28. Segmentul *AB*, cu lungimea de 25 cm, este împărțit de punctul *M* din interiorul său în două segmente, *AM* și *MB*, ale căror lungimi sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3.

a) Care dintre cele două segmente este mai lung?

b) Află lungimea fiecărui segment.

29. Află numerele a, *b* și *c*, dacă sunt proporționale cu numerele: 3, 4 și 6 și $a\cdot b\cdot c=576$.

30. Bunica are 200 lei și dorește să-i împartă celor doi nepoței ai săi, invers proporțional cu vârstele lor. Află câți bani primește fiecare copil, știind că unul are 3 ani, iar al celălalt are 7 ani.

31. Segmentul *AB*, cu lungimea de 45 cm, este împărțit de punctul *M* din interiorul său în două segmente, *AM* și *BM*, cu lungimile invers proporționale cu numerele 2 și 3.

a) Care dintre cele două segmente este mai lung? **b)** Află lungimea fiecărui segment.

32. Află câte procente reprezintă numărul *a* din numărul *b*, dacă *a* și *b* sunt invers proporționale cu numerele 12 și 15.

33. Dacă 30 de creioane costă 60 lei, aflați cât costă 7 creioane.

34. 4 zugravi pot renova clasele unei școli în 12 zile. În câte zile pot termina de renovat clasele 6 zugravi?

35. Dacă un automobil care se deplasează uniform parcurge 1200 km în 15 h, află în cât timp va parcurge automobilul 560 km.

36. Dacă 3 robinete umplu un bazin în 34 ore, află în cât umplu bazinul doar 2 dintre robinete.

37. Dacă 8 muncitori termină o lucrare în 21 zile,

a) 6 muncitori, cu aceeași normă zilnică, termină lucrarea într-un timp mai lung sau mai scurt?

b) află în cât timp termină lucrarea cei 6 muncitori.

38. Un automobil parcurge distanța de 250 m în 9 secunde, deplasându-se cu viteză constantă.

a) Ce distanță parcurge automobilul în 12 minute? **b)** În cât timp parcurge automobilul 12 km?

39. Calculează probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

40. La un test un elev ia nota 4, 3 elevi iau nota 5, 4 elevi iau nota 6, 6 elevi iau nota 7, 4 elevi iau nota 8, 5 elevi iau nota 9 și 2 elevi iau nota 10.

a) Notează datele problemei într-un tabel; **b)** Calculează media clasei la acest test.

Capitolul 3. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Unitatea de învățare: Numere întregi 1

LECȚIA 1. Mulțimea numerelor întregi

Atenție, începem!

A1. Tabelul alăturat conține temperaturile maxime înregistrate în luna decembrie în șapte orașe.

a) Precizați orașele unde temperaturile maxime înregistrate sunt pozitive şi oraşele unde temperaturile sunt negative;

b) Reprezentați pe axa numerelor temperaturile din tabel, luând ca unitate de măsură 0,5 cm;

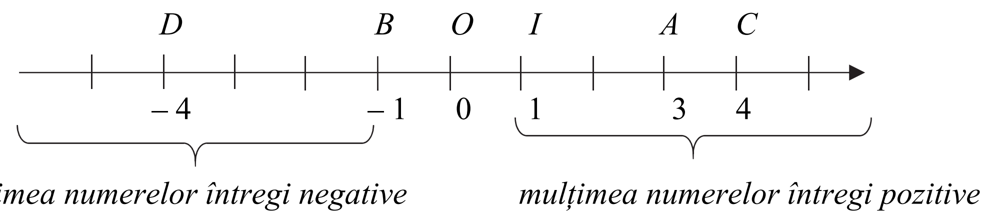
c) Identificați orașul corespunzător celei mai mari temperaturi negative și pe cel cu cea mai mică temperatură pozitivă;

d) Care dintre temperaturile înregistrate la Moscova și Quebec este mai mare? Cum este poziționată pe axa numerelor temperatura de la Moscova față de cea de la Quebec?

Ce ne învață teoria?

1. Din considerente practice (măsurarea temperaturii, realizarea de hărți atât ale regiunilor muntoase, cât și ale fundului oceanelor, prezentarea momentelor istorice remarcabile) oamenii au adăugat mulțimii numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ***mulțimea numerelor întregi negative*** $\{\dots,-n,\dots,-3,-2,-1\}$, obținându-se:

> ***Mulțimea numerelor întregi*** $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\dots\}$.
>
> Mulțimea numerelor întregi nenule se notează $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
>
> Notăm cu $\mathbb{Z}_+$ mulțimea numerelor întregi pozitive; $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.
>
> Notăm cu $\mathbb{Z}_-$ mulțimea numerelor întregi negative; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



2. Fiecărui număr întreg îi corespunde pe axa numerelor un punct. Numărul asociat punctului este **abscisa** (coordonata) sa.

Pe axa numerelor din desenul de mai sus punctele O (originea), I, A, B, C și D au abscisele 0, +1, +3, –1, +4, respectiv –4 și notăm $O(0)$, $I(+1)$, $A(+3)$, $B(-1)$, $C(+4)$, $D(-4)$.

3. Două numere întregi, care diferă doar prin semnul lor, se numesc ***opuse***.
Pe axa numerelor ele se reprezintă prin două puncte ***simetrice*** față de originea O.

Exemplu: +4 și –4 sunt numere întregi opuse și punctele C, respectiv D, prin care sunt reprezentate pe axă sunt simetrice în raport cu originea O (sau O este mijlocul segmentului CD).

Observație: Opusul numărului 0 este 0.

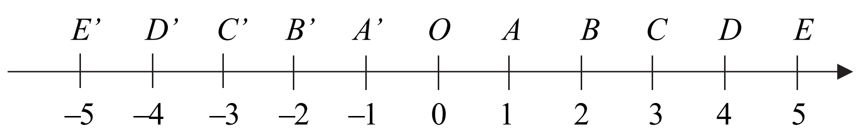
4. Distanța de la origine la punctul prin care este reprezentat un număr întreg a , pe axa numerelor, se numește ***modulul*** numărului a și se notează $|a|$.

Exemplu: În figura de mai sus modulul numărului +4 este egal cu distanța de la O la A și scriem $|+4| = 4$, iar modulul opusului său, – 4, este egal cu distanța de la O la B și $|-4| = 4$.
La fel obținem $|0| = 0$, $|-1| = |+1|$, $|+3| = 3$.

Observație: Modulele a două numere opuse sunt egale pentru că punctele care le reprezintă pe axa numerelor sunt egal depărtate de origine.

5. ***Dintre două numere întregi diferite*** mai mare este cel care pe axă este reprezentat în dreapta.
Dintre două numere întregi pozitive (negative) este mai mare cel care are modulul mai mare (mic).
Orice număr pozitiv este mai mare decât orice număr negativ.

Exemple:
a) $-3 > -5$ pentru că $|-3| = 3 < 5 = |-5|$.
b) $-5 < +3$ pentru că punctul C este la dreapta punctului E' pe axă sau pentru că -5 este negativ și +5 este pozitiv.



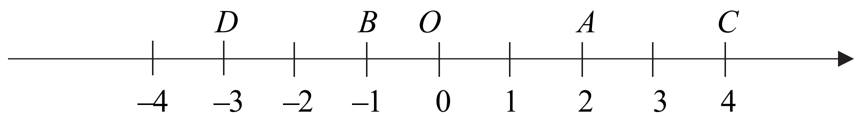
$\ldots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$

Să vedem ce am înțeles

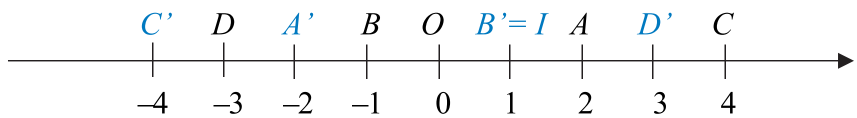
1. Dintre doi cetățeni care au datorii la bancă, unul 1000 și celălalt 2000 unități bancare, care ar trebui să fie mai liniștit ? Să modelăm informația în limbajul numerelor întregi.
2. Doi cetățeni au, unul un depozit de 1000 la bancă, iar celălalt un credit de 1000. Care ar trebui să fie mai liniștit ? Să modelăm informația în limbajul numerelor întregi.

Învățăm să rezolvăm

1. Copiați și reprezentați pe axă punctele *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, ale căror abscise sunt, respectiv opusele absciselor punctelor *A, B, C, D* din desenul dat.



***Rezolvare*:**



Abscisa punctului *A* este 2 și opusul lui 2 este – 2, deci vom reprezenta punctul *A'* de abscisă – 2. Analog, punctul *B* are abscisa – 1, iar opusul lui – 1 este 1 și vom reprezenta punctul *B'* de abscisă 1; punctul *C* are abscisa 4 și opusul lui este – 4 și vom reprezenta punctul *C'* de abscisă – 4; punctul *D* are abscisa – 3 și opusul lui este 3 și vom reprezenta punctul *D'* de abscisă 3. Astfel, se obțin punctele *A'*(–2), *B'*(1), *C'*(–4) și *D'*(3).

2. Determinați mulțimile:
$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ |x|\le 2\}$; $B=\{y \mid y\in\mathbb{Z},\ |y|<4\}$ și $C=\{z \mid z\in\mathbb{Z},\ |z|>0\}$.

***Rezolvare*:** Numerele întregi *x* a căror distanță pe axă este mai mică sau egală cu 2 sunt cele pozitive 1 și 2, dar și cele negative –2 și –1, cât și numărul întreg 0. Deducem că $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Dacă $|y| < 4$, atunci numerele întregi *y* sunt cele pozitive 1, 2 și 3, cele negative – 1, – 2 și – 3, dar și 0. Obținem $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Cum $|z| > 0$, pentru orice număr întreg nenul, deducem că $C=\mathbb{Z}^*$.

Acum să rezolvăm singuri!

★ **1.** Copiază și notează cu (A) pentru enunț adevărat și cu (F) pentru enunț fals:

a) $-37\in\mathbb{Z}$; **b)** $59\in\mathbb{N}$; **c)** $59\in\mathbb{Z}_+$; **d)** $59\in\mathbb{Z}^*$;

e) $-13 \in \mathbb{Z}_-$; f) $-27 \in \mathbb{N}$; g) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$; h) $0,72 \in \mathbb{Z}_-$;

i) $-3 \notin \mathbb{Z}_-$; j) $5 \notin \mathbb{Z}_-$; k) $24 \notin \mathbb{Z}$; l) $125 \notin \mathbb{Z}_+$;

m) $0 \in \mathbb{Z}_-$; n) $0 \in \mathbb{Z}_+$.

2. Copiază și completează șirul cu numerele întregi lipsă:

a) – 8, – 6, – 4, …, …, …, 4; **b)** 15, 12, …, 6, 3, …, …;

c) – 7, – 12, …, – 22, …, …, – 37; **d)** 9, 5, …, – 3, – 7, …, – 15.

3. Copiază și notează cu (A) pentru enunț adevărat și cu (F) pentru enunț fals:

a) – 27 și 27 sunt numereopuse; **b)** 15 și – 15 sunt numere opuse;

c) – 3 și 0 sunt numere opuse; **d)** 7 și – 6 sunt numere opuse;

e) 49 și 49 sunt numere opuse.

4. Compară numerele din perechile:

a) – 1 și – 3; **b)** – 6 și – 5; **c)** – 3 și – 4; **d)** 2 și 5;

e) 3 și 1; **f)** 4 și 3; **g)** – 1 și 4; **h)** – 3 și 1;

i) – 2 și 0; **j)** 0 și 3, folosind reprezentarea acestora pe axa numerelor.

5. Scrie numărul întreg care are predecesorul și succesorul dați:

a) – 3, – 1; **b)** –125, – 123; **c)** – 79, – 77 ; **d)** – 2, 0;

e) – 1, 1; **f)** 2, 4; **g)** 127, 129.

6. Ordonează crescător elementele mulțimii $\{-30; 50; -90; 0; -50; 80\}$.

7. Ordonează descrescător elementele mulțimii $\{-760; 670; -450; 0; -670; 540\}$.

8. Scrie mulțimile definite de următoarele egalități:

a) $|x| = 1$; **b)** $|x| = 29$; **c)** $|x| = 0$; **d)** $|x| = -3$.

9. Calculează:

a) $|-4| + |5| + |-11|$; **b)** $|-27| - |-13| + |16|$; **c)** $|-14| \cdot |-2| - |-8|$;

d) $|28| : |-14| + |8|$; **e)** $(|-2|)^8 : (|2|)^6 - (|-2|)^2$; **f)** $(|5-2|)^2 : |-3| - |-3|$.

10. Determină mulțimile de numere:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -2 \le x < 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -2 < x < 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -1 < x \le 2\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } 0 \le x \le 0\}$;

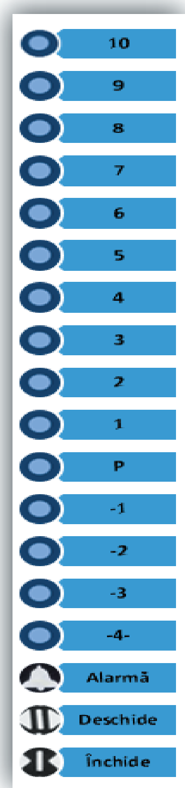
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 0 \text{ și } x > 0\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| = 3\}$;

$G = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } |x| = -2\}$.

LECȚIA 3. Adunarea numerelor întregi; proprietăți

Atenție, începem!

A1. Pe plăcuța ascensorului unui bloc, parterul, cele 10 etaje și cele 4 nivele de la subsol sunt marcate ca în desenul alăturat.



a) Dacă ascensorul pornește de la etajul 2, urcă 3 etaje și se oprește, indicați etajul la care a ajuns. Calculați $(+2) + (+3)$ și formulați o regulă de *adunare a două numere întregi pozitive*, cunoscând modulele lor: $|+2| = 2$ și $|+3| = 3$;

b) Dacă ascensorul pornește de la nivelul -1, coboară 2 nivele și se oprește, indicați nivelul la care a ajuns. Calculați $(-1) + (-2)$ și formulați o regulă de *adunare a două numere întregi negative*, cunoscând modulele lor: $|-1| = 1$ și $|-2| = 2$;

c) Dacă ascensorul pornește de la nivelul -3, urcă 7 nivele și se oprește, indicați etajul la care a ajuns. Calculați $(-3) + (+7)$ și formulați o regulă de *adunare a două numere întregi, de semne diferite*, știind că *modulul numărului negativ este mai mic decât modulul numărului pozitiv*;

d) Dacă ascensorul pornește de la nivelul -3, urcă 3 nivele și se oprește, indicați nivelul la care a ajuns.
Calculați $(-3) + (+3)$ și formulați o regulă de *adunare a două numere întregi opuse*;

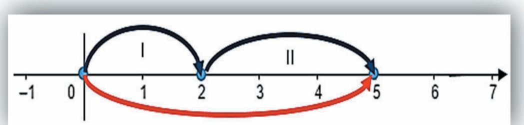
e) Dacă ascensorul pornește de la nivelul -3, urcă 2 nivele și se oprește, indicați etajul la care a ajuns. Calculați $(-3) + (+2)$ și formulați o regulă de *adunare a două numere întregi, de semne diferite*, știind că *modulul numărului negativ este mai mare decât modulul numărului pozitiv*.

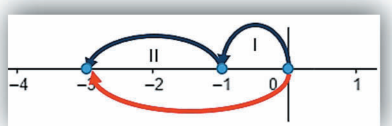
Ce ne învață teoria?

1. Suma a două numere întregi este tot un număr întreg.

> ***Suma a două numere întregi cu același semn*** este egală cu suma modulelor lor, precedată de semnul comun al numerelor.

***Exemple*:**

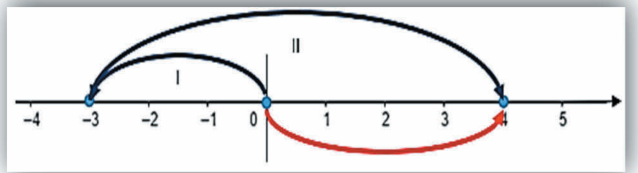


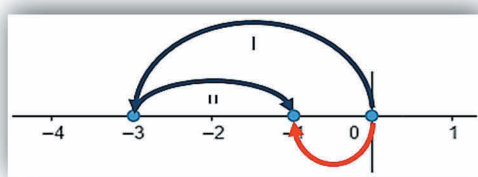


$(+2) + (+3) = |+2| + |+3| = 2 + 3 = 5$; $(-1) + (-2) = -(|-1| + |-2|) = -(1 + 2) = -3$;

Suma a două numere întregi de semne contrare este egală cu diferența dintre modulul mai mare și modulul mai mic, precedată de semnul numărului cu modulul mai mare.

***Exemple*:**





$(-3)+(+7)=+(|+7|-|-3|)=+(7-3)=+4=4$

$(-3)+(+2)=-(|-3|-|+2|)=-(3-2)=-1$

2. Proprietățile adunării numerelor întregi:

Proprietatea	*Exemplu*	*Oricare ar fi* $a,b,c \in \mathbb{Z}$
Comutativitatea adunării	$(-5)+(+11)=(+11)+(-5)$	$\boldsymbol{a+b=b+a}$
Asociativitatea adunării	$[(-10)+(+3)]+(-7)=$ $(-10)+[(+3)+(-7)]$	$\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$
0 element neutru la adunare	$(-4)+0=0+(-4)=-4$	$\boldsymbol{a+0=0+a=a}$
Suma a două numere opuse este 0	$(+9)+(-9)=(-9)+(+9)=0$	$\boldsymbol{a+(-a)=(-a)+a=0}$

Să vedem ce am înțeles

1. Dacă $a=-18$, $b=-3$, $c=3$, $d=14$, $e=19$, să calculăm sumele dintre a și a, b, c, d și e. Apoi dintre b și a, b, c, d și e.

2. Să calculăm rapid: $(-45+55+15-25)+(23-46+69-45)$.

3. Să calculăm cât se poate de rapid: $(-25+24-23+22-21+\ldots+2-1)+(1-2+3-4+\ldots+25)$.

4. Liftul de la activitatea A1, pornind de la etajul 5, urcă 3 etaje, coboară 4, urcă 2 și coboară 4. Să stabilim la ce etaj a ajuns.

Învățăm să rezolvăm

1. Aflați suma dintre cel mai mic număr întreg pozitiv format din trei cifre distincte și cel mai mic număr întreg negativ format din trei cifre distincte.

***Rezolvare*:** Cel mai mic număr întreg pozitiv format din trei cifre distincte este 102, iar cel mai mic număr întreg negativ format din trei cifre distincte este -987.

Suma lor este: $102+(-987)=-885$.

2. Calculați, cât mai simplu, suma: $A=197+(-326)+250+(-124)+3$.

***Rezolvare*:** Aplicând proprietățile de comutativitate și asociativitate, obținem:

$A=(197+3+250)+[(-326)+(-124)]=(200+250)+(-450)=450+(-450)=0$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Reprodu și completează tabelul, efectuând calculele mintal:

a	15	–4	–9	–19	0	9	a	9	7	0	–6	–9	20
$a+(+9)$							$a+(-9)$						

2. Termometrul A indică +5ºC, B indică – 15ºC, C indică – 20ºC și D indică +35ºC. Află temperatura pe care o indică fiecare dintre cele 4 termometre, după:

a) o creștere a temperaturii cu 7ºC; **b)** o scădere a temperaturii cu 12ºC.

3. Calculează sumele:

$A=(+7)+(+5)$; $B=(-6)+(-9)$; $C=(-11)+(-8)$; $D=(-14)+(-19)$;

$E=(+35)+(+47)$; $F=(+145)+(+5)$; $G=(-315)+(-685)$; $H=(+476)+(+224)$

$I=(-47)+(+47)$; $J=358+(-358)$; $K=(-1035)+0$.

4. Reprodu și completează tabelul 1 cu coloanele: $a+b$, $b+a$, $a+0$, $b+c$, $a+(b+c)$, $(a+b)+c$.

a	b	c
– 6	4	– 9
– 8	– 10	18
18	11	6
– 15	– 25	– 30
17	– 17	13
21	– 15	– 25

Tabel 1

a	b	$a+b$	$-a$	$-b$	$(-a)+(-b)$	$-(a+b)$
3	– 8					
– 5	9					
			4	7		
			– 6	0		

Tabel 2

5. Reprodu și completează tabelul 2.

6. Calculează sumele:

$A=4+3$; $B=-5+7$; $C=-9-3$; $D=-25+13$;

$E=59-37$; $F=-27-14$; $G=-35+0$.

7. Găsește greșeala în următoarele calcule:

a) (+13) + (–7) = +6; **b)** (–10) + (+24) = –34; **c)** (+9) + (–16) = –5;

d) (–25) + (+10) = –15; **e)** (–18) + (–16) = –2; **f)** (–18) + (–19) = –37.

8. Calculează sumele, grupând termenii cu același semn:

A = (–8) + (+15) + (–13) + (+25); B =12 + (–37) + (+45) + (–13);

C = 38 + (–47) + (–31) + (+16); D = (–7) + (+82) + (+38) + (–12).

9. Calculează sumele cât mai ușor posibil, folosind proprietățile adunării numerelor întregi:

A = –8 + (+15) + (– 2) + (+5); B = (+28) + (–64) + (+72) + (–26);

C = (+12) + (– 37) + (+45) + (–13); D = (–36) + (+38) + (+12) + (–64) + (+40);

E = 85 + (– 37) + (+25) + (– 33) + (– 35).

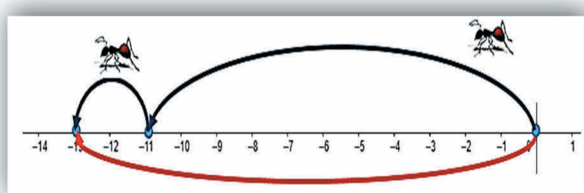
LECȚIA 3. Scăderea numerelor întregi

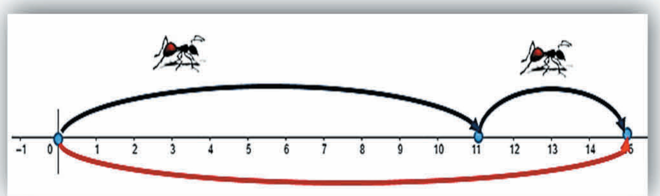
Atenție, începem!

A1. Tabelul alăturat conține temperaturile medii, în grade Celsius (°C), înregistrate în primele șase luni ale anului, la Sinaia.

Luna	*ianuarie*	*februarie*	*martie*	*aprilie*	*mai*	*iunie*
Temperatura medie $\left({}^{\circ}C\right)$	–11	–13	–3	+4	+15	+20

1. Stabiliți cu câte grade a coborât temperatura medie în luna februarie față de cea din luna ianuarie și aflați termenul necunoscut din egalitatea (– 11) + ? = – 13, în care cunoaștem suma și unul dintre termeni. Apoi verificați rezultatul obținut, folosind deplasarea *furnicii* reprezentate prin săgeți, pe axă. Folosind rezultatul obținut, remarcați egalitatea (–13) – (–11) = (–13) + (+11) = –2 și stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: *Diferența a două numere întregi se obține prin adunarea descăzutului cu opusul scăzătorului.*

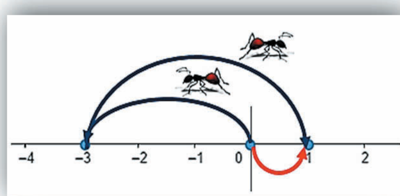




2. Stabiliți cu câte grade a urcat temperatura medie din luna mai față de temperatura medie din luna aprilie și aflați termenul necunoscut din egalitatea (+4) + ? = + 15.

Apoi verificați rezultatul obținut, folosind deplasarea *furnicii* reprezentate prin săgeți, pe axă.
Folosind rezultatul obținut, remarcați egalitatea (+15) – (+4) = (+15) + (–4) = +11, stabiliți dacă la scăderea (+15) – (+4) se aplică regula de calcul a diferenței a două numere întregi, enunțată la **1**.

3. Stabiliți cu câte grade a urcat temperatura medie din luna aprilie față de cea din luna martie și aflați termenul necunoscut din egalitatea (–3) = ? = +4. Apoi verificați rezultatul obținut, folosind deplasarea ***furnicii*** reprezentate prin săgeți, pe axă.
Folosind rezultatul de la punctul **a)**, remarcați egalitatea (+ 4) – (–3) = (+ 4) + (+3) = +7, stabiliți dacă la scăderea (+ 4) – (–3) se aplică regula de calcul a diferenței a două numere întregi, enunțată la **1**.



Ce ne învață teoria?

1. Diferența a două numere întregi este tot un număr întreg.

diferență

$a - b = d$, *unde* $a, b, d \in \mathbb{Z}$

descăzut

scăzător

> *Diferența* a două numere întregi se obține prin *adunarea descăzutului cu opusul scăzătorului.*
> $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$

***Exemple*:** **a)** $(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7$;
b) $(-5) - (+6) = (-5) + (-6) = -11$.

2. Pentru efectuarea unui calcul, care presupune o succesiune de adunări și de scăderi de numere întregi, transformăm fiecare scădere în adunare cu opusul scăzătorului și efectuăm calculele de la stânga la dreapta, regrupând termenii cu același semn.

***Exemplu*:** $(-9) - (+10) + (-11) - (-20) = (-9) + (-10) + (-11) + (+20) = (-30) + (+20) = -10$.

Pentru efectuarea unui calcul, care presupune o succesiune de adunări și de scăderi de numere întregi, se elimină parantezele precedate de semnul „+”, scriind termenii din paranteze cu semnele lor și parantezele precedate de semnul „–”, scriind termenii din paranteze cu semne contrare. Apoi se calculează suma algebrică, aplicând regula semnelor de la adunarea numerelor întregi.

***Exemplu*:** $(+6) + (-9) - (+1) - (-2) = +6 - 9 - 1 + 2 = +6 + 2 - 9 - 1 = +8 - 10 = -2$.

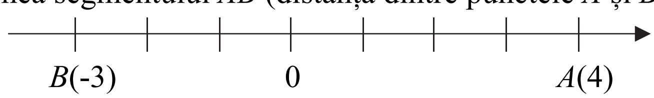
Să vedem ce am înțeles

1. Dacă $a = -18$, $b = -3$, $c = 3$, $d = 14$, $e = 19$, să calculăm diferențele dintre a și a, b, c, d și e. Apoi dintre b și a, b, c, d și e.
2. Să calculăm rapid: $(-45 + 55 + 15 - 25) - (23 - 46 + 69 - 45)$.
3. Să calculăm și mai rapid: $(-25+24-23+22-21+\ldots+2-1) - (1-2+3-4+\ldots+25)$.
4. Aveam o datorie de 1000 lei. Am plătit 400 lei, am mai făcut o datorie de 800 lei și cu 2000 lei câștigați ulterior am plătit toată datoria. Câți bani mi-au rămas?

Învățăm să rezolvăm

1. Fie punctele: $A(4)$ și $B(-3)$.
a) Reprezentați punctele A și B pe axa numerelor, luând ca unitate de măsură 1cm;
b) Determinați lungimea segmentului AB (distanța dintre punctele A și B).

***Rezolvare*:** **a)**



b) Lungimea segmentului AB (distanța dintre punctele A și B) este egală cu modulul diferenței absciselor punctelor A și B, astfel

$AB = d(A,B) = |4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7$, deci $AB = d(A,B) = 7$cm.

2. Determinați opusul numărului $a = (-200) - (-125)$.

***Rezolvare*:** $a = (-200) - (-125) = -200 + 125 = -75$. Atunci $-a = -(-75) = 75$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Reprodu și completează tabelul, efectuând calculele mintal:

a	13	7	-2	9	-9	0	a	7	-6	10	-9	9	0
$a-(+9)$							$a-(-9)$						

2. Termometrul A indică $+5$°C, B indică -12°C, C indică $+17$°C și D indică $+2$°C. Află cu câte grade a scăzut temperatura în fiecare dintre cele 4 termometre, dacă termometrul A indică 0°C, B indică -17°C, C indică $+12$°C și D indică -3°C.

3. Calculează diferențele:

$A = 2 - (+8)$; $B = 5 - (-2)$; $C = (-3) - (-5)$; $D = 11 - (-2)$; $E = (-2) - (+5)$;
$F = (-7) - (-4)$; $G = 1 - (+10)$; $H = -3 - 0$; $I = 0 - (-3)$; $J = 0 - (+3)$.

4. Reprodu și completează tabelul:

A	16	-8	-14	-6	-7	-16	$-100-(-50)$
B	25	13	22	18	-4	18	$-20+30$
$a-b$							

★★

5. Calculează în două moduri:

$A = -2 - (4 - 6)$; $B = -3 - (-2 - 5) - (8 - 10)$;
$C = -25 - (-12 + 8) - (-5 + 11)$; $D = 14 - (7 - 3 + 14) - (-10 + 5)$.

6. Calculează:

$A = (4 - 7) - (-11 + 19)$; $B = -(6 - 2) + 11 - 19$;
$C = 27 - (+49) - (18 - 27) + (-28)$; $D = 1 - (2 - 3) - (4 - 5) - (6 - 7) - (8 - 9)$
$E = 27 - \left(+49\right) - \left(18 - 27\right) + \left(-28\right)$; $F = 1 - \left(2 - 3\right) - \left(4 - 5\right) - \left(6 - 7\right) - \left(8 - 9\right)$.

★★★

7. Află numărul necunoscut:

a) $x + (-3) = 5$; **b)** $7 + b = -3$; **c)** $-4 + y = 1$; **d)** $z + (-4) = -5$; **e)** $x + 0 = -2$.

8. Află numărul necunoscut:

a) $15 - x = 7$; **b)** $13 - b = -2$; **c)** $-8 - y = 5$; **d)** $-4 - u = -6$; **e)** $0 - u = 6$.

9. Află numărul necunoscut: **a)** $x - 4 = 2$; **b)** $y - (-3) = 4$; **c)** $z - (-1) = 0$; **d)** $a - (+9) = 7$.

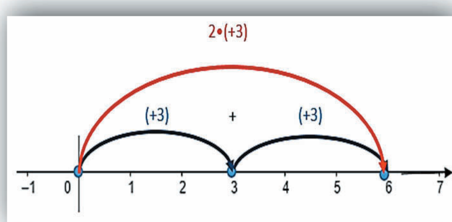
10. Află distanța dintre punctele A și B, știind că:

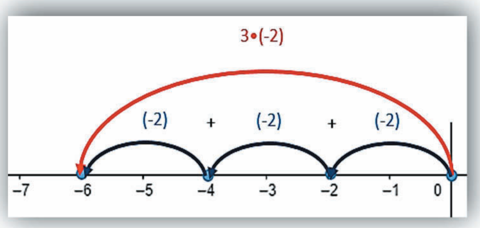
a) $A(5)$, $B(8)$; **b)** $A(-2)$, $B(-5)$; **c)** $A(-3)$, $B(+1)$; **d)** $A(3)$, $B(-4)$.

LECȚIA 4. Înmulțirea numerelor întregi; proprietăți

Atenție, începem!

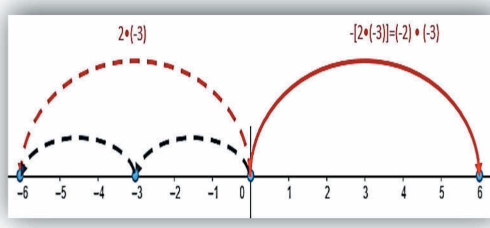
A1. Ioana primește 3 € pe zi de la mama sa.
a) Calculați suma de bani primită de Ioana de la mama sa, în două zile consecutive;
b) Folosind rezultatul de la punctul **a)**, finalizați calculul $(+2) \cdot (+3) = +(|+2| \cdot |+3|) = +(2 \cdot 3) = ...$ și verificați dacă produsul obținut este corect, folosind deplasarea reprezentată prin săgeți, pe axă.





A2. Sergiu cheltuiește zilnic 2 €.
a) Calculați suma de bani cheltuită de Sergiu în trei zile.
b) Folosind rezultatul de la punctul **a)**, finalizați calculul: $(+3) \cdot (-2) = -(|+3| \cdot |-2|) = -(2 \cdot 3)$ și verificați dacă produsul obținut este corect, folosind deplasarea reprezentată prin săgeți, pe axă.

A3. Cosmin a împrumutat de 2 ori câte 3 € de la tatăl său. Când Cosmin a luat o notă mare la un test, tatăl său i-a șters această datorie. **a)** Calculați ce sumă de bani a câștigat astfel Cosmin de la tatăl său; **b)** Folosind rezultatul de la punctul **a)**, finalizați calculul: $(-2) \cdot (-3) = +(|-2| \cdot |-3|) = +(2 \cdot 3)$ și verificați dacă produsul obținut este corect, folosind deplasarea reprezentată prin săgeți, pe axă.



Ce ne învață teoria?

> ***Produsul a două numere întregi, cu același semn***, este egal cu produsul modulelor lor, precedat de semnul „+".

Exemple: $(+12) \cdot (+5) = +(12 \cdot 5) = 60$; $(-8) \cdot (-3) = +(8 \cdot 3) = 24$.

> ***Produsul a două numere întregi cu semne contrare*** este egal cu produsul modulelor lor, precedat de semnul „$-$".

Exemple: $(+5) \cdot (-7) = -(5 \cdot 7) = -35$; $(-13) \cdot (+4) = -(13 \cdot 4) = -52$.

Proprietățile înmulțirii numerelor întregi sunt:

Proprietatea	*Exemplu*	*Oricare ar fi* $a,b,c \in \mathbb{Z}$
comutativitatea	$(-18)\cdot(+5)=(+5)\cdot(-18)$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativitatea	$[(-4)\cdot(+6)]\cdot(-5)$ $=(-4)\cdot[(+6)\cdot(-5)]$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
***1* este element neutru**	$(-4)\cdot 1 = 1\cdot(-4) = -4$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
distributivitatea față de adunare	$(-5)\cdot[(+3)+(-7)]=$ $=(-5)\cdot(+3)+(-5)\cdot(-7)$	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
produsul cu un factor nul este nul	$(-2034)\cdot 0 = 0\cdot(-2034)=0$	$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$

3. Produsul unui număr par de factori negativi este un număr întreg pozitiv.

4. Produsul unui număr impar de factori negativi este un număr întreg negativ.

5. Produsul oricărui factor şi –1 este opusul factorului: $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$; $(-a+b)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-a+b)=a-b,\ a,b\in\mathbb{Z}$.

6. Mulțimea multiplilor unui număr întreg *a* este $M_a=\{ka \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Să vedem ce am înțeles

1. Dacă $a=-18$, $b=-3$, $c=3$, $d=14$, $e=19$, să calculăm produsul dintre *b* și *a*, *b*, *c*, *d* și *e*. Apoi dintre *c* și *a*, *b*, *c*, *d* și *e*.

2. Să calculăm rapid: $(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot \ldots \cdot 10$.

3. Să calculăm mai rapid: $(-3+2-1)\cdot(-2+1-0)\cdot(-1+0-1)\cdot(-0+1-2)$.

4. Un împrumut cu camătă cere ca, după fiecare an, să se plătească dublul sumei restante. Să calculăm ce sumă am datora, după 3 ani, dacă am efectua un asemenea împrumut de 500 unități.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați produsul următor, grupând convenabil termenii $P=-5\cdot 7\cdot(-4)\cdot(-11)$.

***Rezolvare*:** Aplicând comutativitatea și asociativitatea înmulțirii numerelor întregi, putem rescrie astfel: $P=[-5\cdot(-4)]\cdot[7\cdot(-11)]$. Apoi $P=20\cdot(-77)=-1540$.

2. Calculați, utilizând factorul comun: $A=31\cdot(-12)+31\cdot 56-31\cdot 13+31\cdot(-131)$.

***Rezolvare*:** Observăm că factorul comun tuturor termenilor este 31. Atunci,
$A = 31 \cdot [(-12) + 56 - 13 + (-131)]$.

Acum să rezolvăm singuri!

★ **1.** Calculează produsele:

$A = (+9)\cdot(+7)$; $B = (+6)\cdot(+13)$; $C = (-14)\cdot(+4)$; $D = (+21)\cdot(-3)$;
$E = (-8)\cdot(+12)$; $F = (-16)\cdot(-5)$; $G = (-4)\cdot(-32)$; $H = (-4)\cdot(+4)$;
$I = (-4)\cdot(-4)$; $J = (+13)\cdot(+13)$; $K = (-13)\cdot(-13)$.

2. Calculează produsele:

$A = 5\cdot(+3)$; $B = (+11)\cdot 4$; $C = 7\cdot 5$; $D = -4\cdot 6$;
$E = 15\cdot(-4)$; $F = 2\cdot(-9)$; $G = -14\cdot 6$; $H = -3\cdot(-8)$;
$I = -25\cdot(-2)$; $J = 134\cdot 1$; $K = 325\cdot(-1)$; $L = 2000\cdot 0$;
$M = -2000\cdot 0$.

3. Înmulțește numerele – 6, 3 și – 4, două câte două. Câte posibilități sunt?

4. Reprodu și completează tabelul alăturat, cu coloanele $a \cdot b, b \cdot a, b \cdot c, (a \cdot b) \cdot c, a \cdot (b \cdot c), a \cdot (b + c), ab + ac$:

a	b	c
5	– 2	– 13
– 9	6	– 10
– 6	– 2	– 3
4	– 8	5
– 5	4	6
0	– 12	5

★★ **5.** Calculează mintal:

$A = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$; $B = -2\cdot(+7)\cdot(-1)\cdot(-3)$;
$C = 5\cdot(-8)\cdot(-3)\cdot 4$; $D = (-12)\cdot(-4)\cdot(+3)\cdot(-10)$;
$E = (-23)\cdot 56\cdot(-42)\cdot 0$.

6. Calculează:

a) $|+3| \cdot |7 - 2|$; **b)** $|6 - 7| \cdot |-4|$; **c)** $|5 - 8| \cdot (-2) \cdot |6 - 4|$; **d)** $(-|13 - 17|) \cdot |29 - 30|$;
e) $|-9 + 7 - 18| \cdot |-34 + 29| \cdot (-1) \cdot (+2)$; **f)** $|12 - 17| \cdot |18 - 16| \cdot 0$.

7. Calculează în două moduri:

$A = 4 \cdot (11 + 5)$; $B = -3 \cdot (5 + 9)$; $C = -4 \cdot (-6 + 9)$; $D = 10 \cdot (-8 - 31)$.

8. Calculează: **a)** $A = 6a - 10b + 18c$, știind că $3a - 5b + 9c = -7$;
b) $B = 4x + 16y - 28z$, știind că $x + 4y - 7z = 8$.

9. Determină perechile de numere întregi al căror produs este: **a)** 6; **b)** –12; **c)** 15.

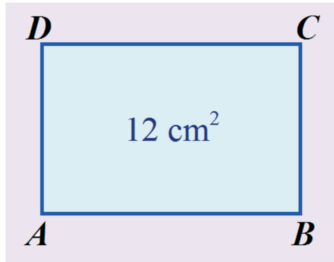
★★★ **10.** Determină semnul produsului a cincisprezece factori nenuli, știind că: **a)** toți factorii sunt numere întregi negative; **b)** exact șapte factori sunt numere întregi negative; **c)** exact nouă factori sunt numere întregi pozitive.

11. Determină semnul produsului de factori nenuli, știind că numărul factorilor negativi este dublul numărului factorilor pozitivi.

12. Scrie 11 multipli ai lui – 2, dintre care 5 să fie negativi.

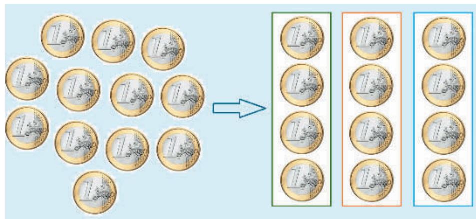
LECȚIA 5. Împărțirea numerelor întregi

Atenție, începem!



A1. Dreptunghiul din desenul alăturat are aria de 12 cm^2.
a) Calculați lățimea dreptunghiului, dacă lungimea sa este de 4 cm;
b) Folosind rezultatul de la punctul **a)**, unde s-a aflat unul dintre factori, cunoscând produsul și celălalt factor, finalizați împărțirea $(+12) : (+4) = (|+12| : |+4|) = +\ (12 : 4)$.

A2. Dacă $(+4) \cdot (-3) = -12$, atunci $(-12) : (-3) = +4$.
Adică $(-12) : (-3) = +(|-12| : |-3|) = +(12 : 3) = +4$. Enunțați o regulă de calcul a câtului a două numere întregi cu același semn, folosind rezultatele anterioare.



A3. O datorie de 12 € se împarte în mod egal între 3 elevi. Calculați și scrieți, cu semn, datoria unuia dintre cei trei elevi. Finalizați împărțirea $(-12) : (+3) = -(|-12| : |+3|) = -\ (12 : 3)$ și enunțați o regulă de calcul a câtului a două numere întregi de semne contrare.

Ce ne învață teoria?

1. Câtul a două numere întregi, când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului, este tot un număr întreg.

> ***Câtul a două numere întregi cu același semn*** este egal cu câtul modulelor lor, precedat de semnul „+”

***Exemple*: a)** $(+18):(+9)=+(18:9)=+2$; **b)** $(-24):(-2)=+(24:2)=+12$.

> ***Câtul a două numere întregi cu semne contrare*** este egal cu câtul modulelor lor, precedat de semnul „–”

***Exemple*: a)** $(+54):(-6)=-(54:6)=-9$; **b)** $(-56):(+7)=-(56:7)=-8$.

> **Câtul lui 0 și orice număr întreg nenul este egal cu 0.**

***Exemple*: a)** $0:(+5)=0$; **b)** $0:(-11)=0$.

Observații: **a)** Împărțirea la 0 nu are sens. **b)** $a : 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.
c) $a:(-1)=-a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

2. $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^*$, a, b multipli ai lui c.

***Exemple*:** **a)** $\left[(-45)+(+60)\right]:(-15)=(-45):(-15)+(+60):(-15)$;

b) $\left[(-28)-(+56)\right]:(+14)=(-28):(+14)-(+56):(+14)$.

Observație:
Mulțimea divizorilor unui număr întreg a este formată din reuniunea mulțimii divizorilor naturali ai lui a cu mulțimea opușilor acestora.

***Exemplu*:** Mulțimea divizorilor lui – 6 este $D_6=\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Un număr întreg este ***prim*** dacă are ca ***divizori naturali*** numai pe 1 și pe el însuși.
Un număr întreg este ***prim** dacă are ca* ***divizori întregi*** numai pe 1, –1, pe el însuși și opusul lui.

Să vedem ce am înțeles

1. Să calculăm câturile împărțirii numărului întreg –16 la fiecare dintre cei 10 divizori ai săi.
2. Să stabilim dacă:
a) Orice număr întreg admite cel puțin doi divizori diferiți;
b) Dacă numărul natural a divide numărul natural b, atunci opusul lui b admite ca divizori cel puțin pe a și pe $-a$.

Învățăm să rezolvăm

1. Determinați numărul întreg x, știind că $x \cdot y - x \cdot z = -96$ și $y - z = -6$.

***Rezolvare*:** Observând că x este factor comun termenilor diferenței $x \cdot y - x \cdot z$, scriem: $x \cdot y - x \cdot z = x \cdot (y - z)$. Adică $x \cdot (y - z) = -96$. Apoi prin înlocuirea lui $x - y$ cu –6, obținem $x \cdot (-6) = -96$. De unde $x = -96 : (-6)$; $x = 16$.

2. Determinați numărul întreg care, înmulțit cu – 21, este egal cu cel mai mic număr întreg negativ, alcătuit din trei cifre distincte.

***Rezolvare*:** Cel mai mic număr întreg negativ alcătuit din trei cifre distincte este – 987.
Numărul cerut este $(-987):(-21)=47$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Reprodu și completează tabelul cu liniile $|a|:|b|$ și $a:b$

a	15	– 44	– 45	– 90	100	– 108
b	– 3	11	– 15	6	100	– 9

2. Calculează:

$A=51:17$; $B=-100:20$; $C=-108:(-6)$; $D=72:(-2)$;

$E=60:15$; $F=0:13$; $G=0:(-207)$; $H=347:1$;

$I=347:(-1)$; $J=(-135):(-135)$.

3. Calculează:

$A=\frac{-48}{-4}$; $B=\frac{108}{-6}$; $C=\frac{-51}{17}$; $D=\frac{108}{9}$;

$E=\frac{-90}{6}$; $F=\frac{64}{-4}$; $G=\frac{-300}{-25}$.

4. Efectuează împărțirile și compară rapoartele:

a) $\frac{-56}{8}$ și $\frac{-28}{4}$; **b)** $\frac{68}{-17}$ și $\frac{68}{-34}$; **c)** $\frac{-100}{-20}$ și $\frac{100}{20}$; **d)** $\frac{51}{17}$ și $\frac{51}{3}$;

e) $\frac{-45}{-15}$ și $\frac{-15}{-3}$; **f)** $\frac{-90}{15}$ și $\frac{-45}{15}$.

5. Află numărul întreg care, pus în locul literei, face egalitățile adevărate:

a) $7\cdot x=35$; **b)** $-84\cdot y=-756$; **c)** $a\cdot(-4)=112$; **d)** $u\cdot(-43)=-774$.

6. Află numărul întreg care face egalitățile adevărate:

a) $\frac{x}{9}=3$; **b)** $\frac{y}{-11}=11$; **c)** $\frac{z}{-13}=-12$; **d)** $\frac{a}{-17}=11$;

e) $\frac{m}{1}=34$; **f)** $\frac{n}{-1}=-54$; **g)** $\frac{u}{-18}=43$; **h)** $\frac{v}{-89}=-9$.

7. Determină numărul întreg x, știind că: **a)** $x\cdot y-x\cdot z=-36$ și $y-z=9$;

b) $x\cdot y-x\cdot z=-156$ și $y-z=-17$; **c)** $x\cdot y-x\cdot z=187$ și $y-z=-17$.

8. Scrie mulțimea divizorilor naturali și mulțimea divizorilor întregi ai numerelor:

a) – 14; **b)** – 15; **c)** – 18; **d)** 24; **e)** – 37; **f)** – 21; **g)** – 1; **h)** 1.

9. Scrie ca produs de puteri de factori primi, numerele:

a) 18; **b)** – 32; **c)** – 24; **d)** – 720; **e)** 150.

Proiect scratch

Modelează următorul scenariu: Pe un fundal galben cu titlul „Întregi”, un personaj spune „Spune-mi, te rog ! Cât face 24 + 6 ? (unde 24 și 6 sunt aleatorii între –100 și 100, iar operația de: adunare, înmulțire sau scădere este aleasă aleator). Și așteaptă răspunsul, urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of ! Trebuia ...” (urmat de valoarea corectă).

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. La adunarea oricăror două numere dintre 2, – 2, 4, – 4 nu se poate obține

p)	q)	r)	s)
1	2	– 2	0

2. Diferența dintre care și – 4 este 3?

p)	q)	r)	s)
– 7	7	– 1	1

3. Dacă produsul a trei numere întregi este – 15, atunci

m)	n)	o)	p)
cel puțin unul este pozitiv	exact unul este pozitiv	unul este negativ sau toate sunt negative	unul este pozitiv sau două sunt pozitive

4. La care împărțire câtul este – 2?

a)	b)	c)	d)
– 8 : (– 4)	(– 2) : (– 1)	(– 4) : (– 2)	4 : (– 2)

5. Elementul neutru la înmulțirea numerelor întregi este

t)	u)	v)	w)
– 1	1	0	– 0

6. Suma numerelor – 2018 și – 18 este

p)	q)	r)	s)
2036	2000	– 2000	– 2036

7. Produsul celor mai mari 5 numere întregi diferite, mai mici decât 0, este

e)	f)	g)	h)
– 120	120	0	– 1

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p	**1.** Suma a două numere întregi opuse este … .
10p	**2.** Diferența dintre cel mai mic număr întreg de două cifre și cel mai mare număr întreg de o cifră este … .
10p	**3.** Câtul dintre cel mai mare număr întreg negativ de două cifre și 5 este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p	**1.** Rezultatul calculului $5\cdot\left[(-2)+4\cdot(-1)+3\right]$ este: **a)** – 15; **b)** 25; **c)** 5; **d)** – 25.
10p	**2.** Numărul divizorilor întregi ai lui 12 este: **a)** 8; **b)** 4; **c)** 6; **d)** 12.
10p	**3.** Valoarile întregi ale lui x pentru care $(x-1) \mid 5$ sunt: **a)** $\{-4, 0, 2, 3\}$; **b)** $\{-4, 2, 3, 6\}$; **c)** $\{-4, 0, 2, 6\}$; **d)** $\{0, 2, 5, 6\}$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p	**1.** Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(-3)$, $B(4)$, $C(-5)$, $D(2)$ și $E(-6)$, luând ca unitate de măsură 1cm.
10p	**2.** Comparați numerele $x=-15+\lvert -4\rvert$ și $y=-15\cdot 2-\lvert -4\rvert$.
10p	**3.** Se dau numerele: $a=(-7)\cdot(-12)-6\cdot 18$ şi $b=(-5)\cdot 17-4\cdot(-12)$. Calculaţi $\lvert a-b\rvert$.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Suma numerelor -15 și +7 este … .

10p **2.** Produsul numerelor întregi strict negative, mai mari ca -3 este … .

10p **3.** Dintre numerele $a = -2 + 3 \cdot (-4)$ și $b = -2 - 3 \cdot 6$ mai mare este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Rezultatul calculului $-8 + 2 \cdot 5$ este:

a) – 2; **b)** 2; **c)** –30; **d)** 30.

10p **2.** Cel mai mic divizor întreg al numărului 18 este:

a) –18; **b)** 18; **c)** –36; **d)** –1.

10p **3.** Rezultatul calculului $|(-22):(-2)| - |(+51):(-17)|$ este:

a) –8; **b)** 8; **c)** –14; **d)** 14.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(-4)$, $B(5)$, $C(-2)$, $D(3)$ și $E(-5)$, luând ca unitate de măsură 1cm.

10p **2.** Comparați numerele $x = |12 - 6| - 2$ și $y = |3 - 7| + |-5|$.

10p **3.** Efectuați:

a) $(-25):(-5) - 3 \cdot \{-2 - 3 \cdot [-8:(-2) - (-2) \cdot (-1)]\}$;

b) $(-25):(-5) - 3 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-12):2 + 3:(-1)]\}$.

Unitatea de învățare: Numere întregi 2

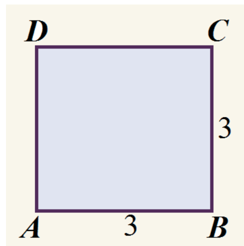
LECȚIA 6. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul

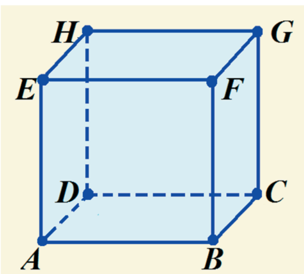
Atenție, începem!

A1. Calculați:

a) Aria pătratului cu latura de 3 cm, din desenul alăturat;

b) Puterea a 2–a a lui +3 și a lui –3, folosind definiția puterii cu exponentul 2 și enunțați o regulă de ridicare a unui număr întreg la o putere cu exponent număr par.





A2. Calculați:

a) Volumul cubului cu latura de 2 cm, din desenul alăturat;

b) Puterea a 3–a a lui +2 și a lui –2, folosind definiția puterii cu exponentul 3 și enunțați o regulă de ridicare a unui număr întreg la o putere cu exponent număr impar.

A3. Finalizați calculul înmulțirii $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ în următoarele două moduri și răspundeți la întrebarea: „Cum se înmulțesc două puteri cu aceeași bază?”: **a)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = [(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]$; **b)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3}$.

A.3 Finalizați calculul puterii: $\left[(-2)^3\right]^2$ în următoarele două moduri și răspundeți la întrebarea: „Cum se ridică o putere la altă putere?”

a) $\left[(-2)^3\right]^2 = [(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]$; **b)** $\left[(-2)^3\right]^2 = (-2)^{3\cdot 2}$.

Ce ne învață teoria?

1. *Puterea a n –a numărului întreg nenul a* este numărul întreg $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

Exemple: **a)** $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -2^3 = -8$; **b)** $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +(-2)^4 = 16$;
c) $(-5)^0 = 1$; **d)** $(-1345)^1 = -1345$; **e)** $0^{245} = 0$.

Observații: **a)** Prin convenție, $\boldsymbol{a^0 = 1}$, unde $a \in \mathbb{Z}^*$; **b)** $\boldsymbol{a^1 = a}$, unde $a \in \mathbb{Z}$;
c) $\boldsymbol{0^n = 0}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$; **d)** $\boldsymbol{0^0}$ **nu are sens**; **e)** $\boldsymbol{1^n = 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

> **2.** *Semnul puterii unui număr întreg*
>
> Dacă $a \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, atunci $a^n > 0$;
>
> Dacă $a \in \mathbb{Z}_-, n \in \mathbb{N}$, atunci $\begin{cases} a^n > 0, \text{dacă } n \text{ este număr par,} \\ a^n < 0, \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$

***Exemple*:** $(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +2^3 > 0$; $(-5)^4 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = +5^4 > 0$;
$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -2^5 < 0$.

3. *Reguli de calcul cu puteri*

Exemplu	*Regula de calcul*	
$(-2)^3\cdot(-2)^4 = (-2)^7 = -128$	*Oricare ar fi* $a,b \in \mathbb{Z}^*$, m, $n \in \mathbb{N}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\left[(-2)^3\right]^2 = (-2)^{3\cdot 2} = (-2)^6 = 2^6 = 64$		$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$
$(-2)^{11} : (-2)^8 = (-2)^{11-8} = (-2)^3 = -8$		$a^m : a^n = a^{m-n}$
$\left[(-2)\cdot(+5)\right]^7 = (-2)^7\cdot(+5)^7$		$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$\left[(-10):(+5)\right]^7 = (-10)^7 : (+5)^7$		$(a:b)^n = a^n : b^n$, *unde* a *este un multiplu al lui* b

Să vedem ce am înțeles

> **1.** Să calculăm puterile cu exponenții 1, 2, 3, 4 ai numerelor 2, –2, 3, –3, 4, –4.
>
> **2.** Să stabilim care sunt negative și care sunt pozitive, dintre următoarele numere:
> 3^3, $|-3|^3$, $(-3)^3$, -3^3, $|-3|^4$, $(-3)^4$, -3^4.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați: **a)** $(-2)^3 + 5^2 - (-1)^8$; **b)** $(-3)^5 \cdot 3^4 : (-3)^6$; **c)** $\left[3\cdot(-5)\right]^2$; **d)** $(-9)^3 : (-3)^3$.

Rezolvare. **a)** Calculăm mai întâi puterile și apoi adunările: $(-2)^3 + 5^2 - (-1)^8 = -8 + 25 - 1 = 16$;

b) Aducem puterile la aceeași bază și apoi calculăm, aplicând regulile de calcul cu puteri:
$(-3)^5 \cdot 3^4 \cdot (-3)^6 = -(3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^6) = -3^{5+4+6} = -3^{15}$;

c) $\left[3\cdot(-5)\right]^2 = (-15)^2 = 225$ sau $\left[3\cdot(-5)\right]^2 = 3^2\cdot(-5)^2 = 9\cdot 25 = 225$;

d) $(-9)^3 : (-3)^3 = \left[(-9):(-3)\right]^3 = 3^3 = 27$.

2. Comparați puterile, fără a efectua calculele:

a) $(-3)^{11}$ și $(-3)^{7}$; **b)** $(-9)^{5}$ și $(-9)^{4}$; **c)** $(-7)^{5}$ și $(-8)^{5}$; **d)** $(-11)^{3}$ și 9^{3}.

***Rezolvare*:** **a)** $(-3)^{11}=-3^{11}$, iar $(-3)^{7}=-3^{7}$. Comparăm modulele numerelor, astfel $3^{11}>3^{7}$ și aplicăm regula de comparare a două numere negative, de unde rezultă $-3^{11}<-3^{7}$.

b) $(-9)^{5}=-9^{5}<0$, iar $(-9)^{4}=9^{4}>0$, deci $(-9)^{5}<(-9)^{4}$; **c)** $-7>-8$, deci $(-7)^{5}>(-8)^{5}$;

d) $(-11)^{3}$ este negativ, iar 9^{3} este pozitiv, deci $(-11)^{3}<9^{3}$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Scrie produsul ca putere cu exponent număr natural și identifică baza și exponentul:

a) $7\cdot7\cdot7\cdot7$; **b)** $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$; **c)** $4\cdot4$; **d)** $(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)$; **e)** $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

2. Scrie sub formă de produs cu factori egali: **a)** $(-2)^{4}$; **b)** 9^{3}; **c)** $(-12)^{2}$; **d)** $(-8)^{3}$; **e)** 4^{5}.

3. Calculează puterile cu exponent număr natural:

a) 2^{3}; **b)** 3^{2}; **c)** $(-2)^{4}$; **d)** $(-3)^{2}$; **e)** $(-5)^{3}$; **f)** $(-4)^{5}$; **g)** $(-7)^{3}$; **h)** 12^{2};

i) 11^{2}; **j)** $(-15)^{2}$; **k)** 13^{2}; **l)** 25^{2}; **m)** 0^{5}; **n)** $(-14)^{2}$; **o)** 1^{31}; **p)** 35^{0}.

4. Copiază și completează spațiul punctat pentru a obține egalități adevărate:

a) $3^{5}\cdot3^{4}=3^{\cdots}$; **b)** $5^{3}\cdot5^{6}=5^{\cdots}$; **c)** $(-3)^{2}\cdot(-3)=(-3)^{\cdots}$; **d)** $4^{5}\cdot4^{0}=4^{\cdots}$; **e)** $(-8)^{3}\cdot(-8)^{2}=(-8)^{\cdots}$

5. Calculează: $A=4^{2}\cdot4$; $B=(-2)^{3}\cdot(-2)^{3}$; $C=3^{2}\cdot3^{3}$; $D=(-10)^{2}\cdot(-10)^{3}$;

$E=(-7)\cdot(-7)^{2}$; $F=(-1)^{13}\cdot(-1)^{12}$;

$G=(-5)^{2}\cdot(-5)^{3}$; $H=-2\cdot2^{2}$; $I=-3\cdot(-3)^{2}$.

6. Calculează:

$A=9^{12}:9^{10}$; $B=(-5)^{34}:(-5)^{32}$; $C=(-11)^{2}:(-11)$; $D=-7^{15}:(-7)^{13}$; $E=4^{8}:(-4)^{6}$;

$F=-8^{5}:(-8)^{4}$; $G=-12^{4}:12^{2}$; $H=(-11)^{3}:(-11)$; $I=(-1)^{152}:1$.

7. Calculează:

$A=\left[(-3)^{2}\cdot(-3)^{10}:(-3)^{9}\right]^{3}:(-3)^{7}$; $B=-7^{5}\cdot(-7)^{9}:(-7)^{8}:(-7)^{4}$;

$C=\left[2^{7}\cdot(-2)^{12}:(-2)^{15}\right]:(-2)^{2}$; $D=\left[3^{24}\cdot(-3)^{12}:(-3)^{2}\right]:(-9)^{12}$;

$E=\left[2^{45}\cdot(-4)^{5}\right]:(-8)^{5}:2^{6}$; $F=\left[5^{10}\cdot(-25)^{7}:(-5)^{20}\right]^{7}:(-25)^{10}$.

8. Compară puterile fără a efectua calculele:

a) 5^{7} și 5^{9}; **b)** 3^{25} și 3^{12}; **c)** $(-2)^{9}$ și $(-2)^{5}$; **d)** $(-13)^{3}$ și $(-13)^{2}$; **e)** 4^{7} și 8^{7};

f) $(-4)^{3}$ și $(-2)^{3}$; **g)** $(-3)^{5}$ și $(-4)^{5}$; **h)** $(-2)^{4}$ și 2^{4}; **i)** $(-3)^{5}$ și 3^{5}; **j)** $(-3)^{4}$ și 2^{4}.

LECȚIA 7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Atenție, începem!

A1. Amintindu-vă că într-un exercițiu fără paranteze (de calcul), se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile și în final, adunările și scăderile, calculați:

$A = (-51) + (+17) - (+6) - (-40)$, $B = 45 - 14 + 5 - 6 - 10$,
$C = (+2) \cdot (-5) \cdot (-4)$, $D = 36 : (-2) : (-9)$,
$E = (-18) \cdot (-2) : 9$, $F = 27 : (-9) \cdot (-3)$,
$G = -8 + (-4) \cdot (+3)$, $H = 5 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-4)$,
$I = 15 : (-3) + (-2) \cdot 4$, $J = (-2) : (+2) + (-4) \cdot (+5) - (-2)^5 + (-1)^0$.

A2. Amintindu-vă că, într-un exercițiu cu paranteze, se efectuează mai întâi calculele din parantezele rotunde, apoi din cele drepte (pătrate) și în final, cele din acolade, calculați:

$A = (-13 + 47 - 14) + (32 - 14 - 8)$, $B = [-5 + 14 - (-5 + 14) + 10] - 10$,
$C = [(-4)\cdot(-11):(-2)]:[-121:(-11)]$, $D=\{[20:(-4)^{10}:25^4 + 5\}\cdot(-2)^2 + (-4)\cdot(-10)$.

Ce ne învață teoria?

1. Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al doilea, iar ridicarea la putere este operație de ordinul al III-lea.

> Operațiile de același ordin se efectuează în ordinea în care sunt scrise, aplicând proprietățile acestora, atunci când este cazul.

Exemple: $A=3+(-8)-(-4)=3-8+4=-5+4=-1$ sau $A = 3 - 8 + 4 = 3 + 4 - 8 = -1$.

$B=(-2)\cdot(-9):6=18:6=12$, $C=48:(-8)\cdot(-2)=-6\cdot(-2)=12$.

> Într-un exercițiu fără paranteze și cu operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul al III–lea, apoi operațiile de ordinul al II–lea și, în final, operațiile de ordinul I.

Exemple:

$A=(-2)+(-3)\cdot(-4)^3:(+6)=(-2)+(-3)\cdot(-64):6=-2+3\cdot64:6=-2+192:6=-2+32=30$

$B=-7+(-2)\cdot(+4)+(-48):(-2)^3=-7-8+(-48):(-8)=-15+6=-9$.

2. Dacă un exercițiu conține paranteze, se efectuează ***mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și, în final, operațiile din acolade.*** Pe parcursul efectuării calculelor, parantezele drepte se transformă în paranteze rotunde și acoladele în paranteze drepte. Operația se repetă până la dispariția tuturor parantezelor.

Exemple: $A = 3 \cdot \left[-17 + 2 \cdot 3 - (-5)\right] - (-17) = 3 \cdot (-17 + 6 + 5) + 17 = 3 \cdot (-6) + 17 = -1$;

$B = -10 \cdot \left\{1 + 2 \cdot \left[1 - (-2) \cdot (-3)\right]\right\} = -10 \cdot \left[1 + 2 \cdot (1 - 6)\right] = -10 \cdot \left[1 + 2 \cdot (-5)\right] = -10 \cdot (-9) = 90$.

Observații:

1. Într–o sumă de numere întregi ordinea termenilor se poate schimba, fără ca suma să se schimbe. Astfel, pentru simplificarea calculelor se pot face următoarele grupări de termeni:

- gruparea termenilor opuși (dacă există);
- gruparea termenilor pozitivi și efectuarea calculelor cu aceștia;
- gruparea termenilor negativi și efectuarea calculelor cu aceștia.

Exemplu: $S = -5 + 17 + 14 - 23 + 5 - 14 + 3 = (5 - 5) + (14 - 14) + (17 + 3) - 23 = 20 - 23 = -3$.

2. Dacă în fața unei paranteze care conține un număr întreg sau o sumă algebrică de numere întregi se află semnul „+”, acesta și parantezele se pot elimina, scriind termenii din paranteze cu semnele lor.

Exemple: **a)** $+(-3) + (+5)$; **b)** $+\left((-3) + (+7) + (-5) + (-6)\right) = -3 + 7 - 5 - 6$.

3. Dacă în fața unei paranteze care conține un număr întreg sau o succesiune de adunări și de scăderi de numere întregi se află semnul „–”, acesta și parantezele se pot elimina, scriind termenii din paranteze cu semn contrar.

Exemple: **a)** $-(-7) - (+3) = 7 - 3$; **b)** $-(3 - 4 + 11 - 23) = -3 + 4 - 11 + 23$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să calculăm repede (–2 + 3) : (3 – 1 – 1) – (2 – 3) : (3 – 1 – 1) + 2.

2. Să mai calculăm produsul dintre numerele

$a = 3 - 3:3 + 3 \cdot 3 - 3 + 3$ și $b = 2 - 2:2 + 2 \cdot 2 - 2 + 2$.

3. Să punem parantezele lipsă în toate modurile posibile și să calculăm

[–2 + (3 – 5 + 4·4 – 2 + 3 + 1.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați: $a = -5 - 10 \cdot \left[243 - 10 \cdot (23 - 2 \cdot 3)\right]$.

***Rezolvare*:** Se efectuează înmulțirea și apoi scăderea din paranteza rotundă:
$a = -5 - 10 \cdot [243 - 10 \cdot (23 - 2 \cdot 3)] = -5 - 10 \cdot [243 - 10 \cdot (23 - 6)] = -5 - 10 \cdot (243 - 10 \cdot 17)$;
Se efectuează înmulțirea și apoi scăderea din paranteza rotundă obținută din paranteza dreaptă:
$a = -5 - 10 \cdot (243 - 170) = -5 - 10 \cdot 73$;
Se efectuează înmulțirea și apoi adunarea celor doi termeni negativi: $a = -5 - 730 = -735$.

2. Calculați: $b = (-2^9)^2 : \left[(-2)^3 \cdot (-2)^5\right]^2 + (-2)^4 \cdot (-2)^6 : (-2)^3 + 2^3 \cdot 2 : 2^4$.

***Rezolvare*:** Se efectuează ridicarea la putere a deîmpărțitului și paranteza dreaptă de la primul termen, operațiile cu puteri cu aceeași bază de la al doilea și de la al treilea termen și, în final, adunările și scăderile:
$b = (-2)^{18} : (-2)^{16} + (-2)^7 + 2^0 = (-2)^2 - 2^7 + 1 = 4 - 128 + 1 = -123$

Acum să rezolvăm singuri!

Calculează:

1. **a)** $-17 + 23 + 15 - 33 + 12$; **b)** $76 - 105 + 24 - 8 - 7$;
c) $-211 + 101 + 110 - 25$; **d)** $136 - 128 - 8 - 12 + 13$.

2. **a)** $-(-54 + 21) + (-19 + 21) - (54 + 17) + 2$; **b)** $-(-7 + 15 - 67) + (-67 - 7 + 15) + 10$;
c) $[-9 + 13 - (-9 + 13 - 10)] - (-7 + 17)$; **d)** $(-11 + 37 - 42) + (-37 + 45 + 11) - 5$.

3. **a)** $101 - [43 - (11 - 8) + 61]$; **b)** $[-12 - (17 - 15) + 4] + 10$;
c) $-21 + [-57 - (-39 + 5 - 18)] + 26$; **d)** $-14 - \{-41 - [-17 + 8 - (15 - 9)] + 27\} + 13$.

4. **a)** $|7 - 5| + 19 + |21 - 29| - 8$; **b)** $-|-13 - 2| + |2 - 7| + |-10|$;
c) $||9 - 11| - |-1 + 16|| + |-13|$; **d)** $(-17 + 5) + |2 - 14| + |-34| - 34$.

5. **a)** $(-4) \cdot (-2) \cdot (-10) : [120 : (-3)]$; **b)** $[-9 \cdot 4 \cdot (-6)] : [(-1) \cdot (-3)]$;
c) $[(-6) \cdot 27 : (-9)] : (-18) \cdot 9$; **d)** $[(-6) \cdot (-11) \cdot (-1)] : [(-121) : 11 \cdot 3]$.

6. **a)** $-7 \cdot (-11 + 6) - [3 \cdot (-4) \cdot (-2)] - 11$; **b)** $-2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-2) + 50 : (-5)$;
c) $-40 : \{[(-7 - 3 \cdot 4) : (-19) + 4] + 5\} + 4$; **d)** $[|8 - 3 \cdot |-2|| + |13 - 5 \cdot |-2||] : |-5|$.

7. **a)** $(-3)^4 + 5^2 - 2^3 \cdot 10$; **b)** $\left[(-2)^2\right]^3 : (-8)^2 + \left[(-2) \cdot 5\right]^2$;
c) $(-2)^2 \cdot 4^2 : (-2)^6 - (-3)^3 - 25 \cdot 1^{100} - (-5)^2$; **d)** $\left[(-27)^3\right]^4 : \left[(-3)^3 \cdot (-9)^5\right] : \left[(-81)^3\right]^0 : 3^{23}$

8. **a)** $\left\{\left[5 \cdot 4 : (-4)\right]^{10} : (5^2)^4 - 6^2\right\} \cdot \left[(-2)^2\right]^2 - (-3^2)$;
b) $\left\{15^0 - \left[(-3)^2 + (-5)^2 - (-2)^5\right] : (-11)^0 \cdot 1 + 9\right\} : (-2)^3$;
c) $\left[(-8)^{36} : 2^{106} + (-9)^{54} : 3^{106} + (-5)^{48} : 25^{23}\right] : 2 \cdot 3$.

LECȚIA 8. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi

Atenție, începem!

A1. Pe fiecare taler al balanței în echilibru din imaginea alăturată se află 4 bile de aceeași greutate. Stabiliți dacă balanța rămâne în echilibru când:

a) Adăugăm câte 1 bilă de aceeași greutate în fiecare taler;

b) Luăm câte 1 bilă de pe fiecare taler;

c) Triplăm numărul de bile de pe fiecare taler, bilele adăugate fiind identice cu cele inițiale.

d) Înjumătățim numărul de bile de pe fiecare taler.

A2. Bilele galbene au câte 100 g, iar cele roșii câte 150 g.

Stabiliți dacă balanța rămâne la fel înclinată când:

a) Adăugăm câte o bilă de 75 g pe fiecare taler;

b) Luăm câte o bilă galbenă de pe fiecare taler;

c) Dublăm numărul de bile galbene și pe cel de bile roșii de pe fiecare taler;

d) Înjumătățim numărul de bile galbene și pe cel de bile roșii de pe fiecare taler.

Ce ne învață teoria?

- *Dacă adunăm sau scădem același număr întreg* la ambii membri ai unei egalități (inegalități) de numere întregi, atunci egalitatea (inegalitatea) se păstrează.
- *Dacă înmulțim cu același număr întreg (pozitiv)* ambii membri ai unei egalități (inegalități) de numere întregi, atunci egalitatea (inegalitatea) se păstrează.
- *Dacă împărțim cu același divizor comun (pozitiv)* ambii membri ai unei egalități (inegalități) de numere întregi, atunci egalitatea (inegalitatea) se păstrează.
- *Dacă înmulțim sau împărțim* ambii membri ai unei inegalități cu un număr negativ nenul, inegaltatea își schimbă sensul.

$a = b$:
- $a + c = b + c$
- $a - c = b - c$
- $a \cdot c = b \cdot c$
- $a : c = b : c$, $c \neq 0$, c divide a, b

$a < b$:
- $a - c < b - c$
- $a + c < b < c$
- $a \cdot c < b \cdot c$, $c > 0$
- $a : c < b : c$, $c > 0$, c divide a, b

2. Egalitățile de forma:

- $\boldsymbol{x \pm a = b}$;
- $\boldsymbol{a - x = b}$;
- $\boldsymbol{a \cdot x = b}$;
- $\boldsymbol{x : a = b}$ $(a \neq 0)$;
- $\boldsymbol{a : x = b}$ (a multiplu de b);
- $\boldsymbol{a \cdot x \pm b = c}$ (a divizor al lui $c \mp b$);
- $\boldsymbol{x : a \pm b = c}$ $(a \neq 0)$;
- $\boldsymbol{|x| = a}$

se numesc ***ecuații cu necunoscuta x.***

Valorile lui x care verifică egalitatea formează ***soluția ecuației.***

3. Două ecuații cu aceeași soluție se numesc ***ecuații echivalente.***

4. Prin ***rezolvarea*** unei ecuații în mulțimea numerelor întregi, înțelegem determinarea mulțimii tuturor soluțiilor întregi ale acesteia.

***Exemple*:**

<table>
<tr>
<td>$x + 2 = -7 \mid -2$
$x + 2 - 2 = -7 - 2$
$x = -9$
$S = \{-9\}$</td>
<td>$-2 - x = 1 \mid +2$
$-2 + 2 - x = 1 + 2$
$-x = 3 \mid \cdot (-1)$
$x = -3$
$S = \{-3\}$</td>
<td>$-3 \cdot x = 15 \mid : (-3)$
$-3 \cdot x : (-3) = 15 : (-3)$
$x = -5$
$S = \{-5\}$</td>
<td rowspan="2">$|x| = 3$
Punctul P care are coordonata x pe axa numerelor, se află la distanța 3 de origine.
Dacă P este în dreapta originii, atunci $x = 3$.
Dacă P se află în stânga originii, atunci $x = -3$.
$S = \{\pm 3\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x : 7 = -2 \mid \cdot 7$
$x : 7 \cdot 7 = -2 \cdot 7$
$x = -14$
$S = \{-14\}$</td>
<td>$12 : x = -3, x \neq 0$
$x = 12 : (-3)$
$x = -4$
$S = \{-4\}$</td>
<td>$7 \cdot x + 4 = 25 \mid -4$
$7 \cdot x = 21 \mid : 7$
$x = 3$
$S = \{3\}$</td>
</tr>
</table>

5. Inegalitățile

- $x + a > b$;
- $x + a \geq b$;
- $x + a < b$;
- $x + a \leq b$,

se numesc ***inecuații cu necunoscuta x.***

O valoare a lui x pentru care inegalitatea este verificată se numește ***soluție a inecuației*** corespunzătoare.

6. Prin ***rezolvarea*** unei inecuații în mulțimea numerelor întregi, înțelegem determinarea mulțimii tuturor soluțiilor întregi ale acesteia.

Observație: Dacă înlocuim în egalitățile de la punctul **2**. semnul „=” cu unul dintre semnele „>”, „≥”, „<”, „≤” obținem alte exemple de inecuații.

Să vedem ce am înțeles

1. Să stabilim care dintre elementele mulțimii $\{-2, -3, -1, 2, 3, 0\}$ este soluție a ecuațiilor: $2 - x = 4$; $4 - x = 2$; $2x = 4$; $4x = 2$; $2x + 4 = 2$; $2x - 4 = 2$.

2. Să stabilim care dintre elementele mulțimii $\{-2, -3, -1, 2, 3, 0\}$ este soluție a inecuațiilor: $2 - x < 4$; $4 - x > 2$; $2x \geq 4$; $4x \leq 2$.

Învățăm să rezolvăm

1. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile: **a)** $3x + 4x - 3 = -17$; **b)** $3x + 5 = 2x - 6$; **c)** $2|x| = 4$.

***Rezolvare*: a)** $3x + 4x - 3 = -17 \Leftrightarrow 7x - 3 = -17 \,|+3 \Leftrightarrow 7x = -14 \,|:7 \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{Z}$. Verificăm rezultatul obținut prin înlocuirea necunoscutei x cu -2 în ecuația dată și obținem egalitatea $3\cdot(-2)+4\cdot(-2)-3=-17$ adevărată. Deci $S=\{-2\}$.

b) $3x + 5 = 2x - 6 \Leftrightarrow 3x - 2x = -6 - 5 \Leftrightarrow x = -11 \in \mathbb{Z}$. Verificăm rezultatul obținut prin înlocuirea necunoscutei x cu -11 în ecuația dată și obținem egalitatea $3\cdot(-11)+5=2\cdot(-11)-6$ adevărată. Deci $S=\{-11\}$.

c) $2\cdot|x| = 4 \,|:2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \in \mathbb{Z}$ sau $x = -2 \in \mathbb{Z}$. Verificăm rezultatul prin înlocuirea lui x cu 2, respectiv cu -2 în ecuația dată și obținem egalitatea $2\cdot|\pm 2| = 4$ adevărată, deci $S=\{-2, 2\}$.

2. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z}$ inecuațiile: **a)** $x-1>\frac{1}{3}$; **b)** $2x<1$.

***Rezolvare*: a)** $x-1>\frac{1}{3}\,|+1 \Leftrightarrow x>1+\frac{1}{3}$ și $x \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \{2, 3, 4, ...\}$;

b) $2x < 1 \,|:2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ și $x \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \{..., -3; -2; -1; 0\}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Precizează care dintre egalitățile următoare sunt ecuații:

a) $-x + 35 = 7$; **b)** $13 + 2x = -27$; **c)** $2x - 1 = 5 = x + 9$; **d)** $x^2 - 4 = 0$;
e) $9 - 3 = 3 = 2x - 7$.

2. Răspunde cu DA sau NU:

a) ecuația $-2x+10=0$ are soluția -5; **b)** ecuația $x-23=-4$ are soluția 18;
c) ecuația $2x\cdot(-3)=-12$ are soluția 2; **d)** ecuația $x:(-6)=7$ are soluția 13.

3. Precizează dacă ecuațiile din perechile următoare sunt echivalente:

a) $-x+21=7$ și $x=14$; **b)** $11-x=2$ și $x=9$;
c) $3x-35=1$ și $x=-12$; **d)** $x:2=9$ și $x=18$;
e) $-16:x=-2$ și $x=-8$,

4. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $17+x=1$; **b)** $x+39=0$; **c)** $-x-7=0$; **d)** $-x+12=-1$;
e) $x-43=11$; **f)** $12-x=5$; **g)** $-13+x=-1$; **h)** $-x+2+3x=2$;
i) $6+5x=2x+18$; **j)** $-4-3x=x+8$; **k)** $-(-x-3)+2=10$; **l)** $3-(4-x)=1$.

5. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $5x = -10$; **b)** $-3x = 3^2$; **c)** $-6x = -2 \cdot 3^3$; **d)** $-2^2 \cdot 7^3 = 7^2 \cdot x$;

e) $-2^2 \cdot 3 = -6x$; **f)** $(2+3)x = -15$; **g)** $(79-84)x = -10$.

6. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $2x-3=1$; **b)** $5-3x=-1$; **c)** $13=3x-4$; **d)** $-27=6x-3$;

e) $5(x-8)=4x-39$; **f)** $-4+3(x+5)=10$; **g)** $2(x-1)=3(x+4)$.

7. Rezolvă inecuațiile următoare în mulțimea numerelor întregi:

a) $x+11\geq 7$; **b)** $x-3\leq 1$; **c)** $7-x<4$; **d)** $2x\leq -8$;

e) $-x<6$; **f)** $-x\geq -2$; **g)** $-x<0$; **h)** $-x\geq 0$.

8. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $|x| = 7$; **b)** $|x|-5=1$; **c)** $|x-3|=11$;

d) $-3|x+2|=18$; **e)** $|x+2|\cdot(-5)+6=1$.

9. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

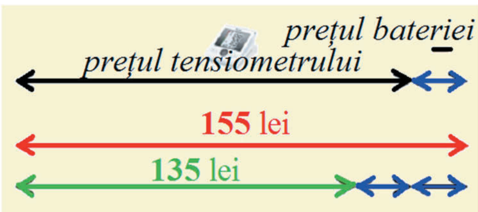
a) $2+[1-(7-x)]=5$; **b)** $[(x+3)-4]-8+x=11$;

c) $[(3x-12):(-3)+5]+x=9$; **d)** $[-7+2(-2x+1)-x]:(-5)+9=10$.

LECȚIA 9. Probleme care se rezolvă cu ecuații/inecuații în contextul numerelor întregi

Atenție, începem!

A1. Un tensiometru, împreună cu bateria sa, costă 155 lei, iar tensiometrul este cu 135 lei mai scump decât bateria. Determinați prețul bateriei și prețul tensiometrului prin următoarele procedee:



a) Folosind reprezentarea prin segmente, dată;

b) Notați cu x prețul în lei al bateriei, exprimați prețul tensiometrului în funcție de prețul bateriei, formați ecuația prin care se exprimă problema în limbaj matematic, rezolvați ecuația și formulați răspunsul. În final, verificați prețurile obținute.

A2. Trei numere naturale consecutive au suma mai mică decât 19. Determinați cele trei numere, parcurgând următorii pași:

a) Notați cu x numărul cel mai mic și exprimați următoarele două numere cu ajutorul lui;
b) Formați inecuația prin care se exprimă problema în limbaj matematic și rezolvați această inecuație;
c) Formulați răspunsul;
d) Verificați rezultatele obținute;
e) Stabiliți ce altă necunoscută ar fi putut fi notată cu x și rezolvați problema în acest caz;
f) Rezolvați problema și prin alte metode studiate (figurativă, încercări etc).

Ce ne învață teoria?

Etapele rezolvării problemelor cu ajutorul ecuațiilor (inecuațiilor) sunt următoarele:

1. Identificarea datelor cunoscute și a celor necunoscute din enunțul problemei.
2. Stabilirea necunoscutei (notată de regulă cu x) și exprimarea celorlalte necunoscute (dacă există) cu ajutorul acesteia.
3. Formarea ecuației / inecuației care transcrie problema în limbaj matematic.
4. Rezolvarea ecuației / inecuației.
5. Interpretarea soluției / soluțiilor și formularea răspunsului la problemă.
6. Verificarea soluțiilor obținute în forma inițială (neprelucrată) a problemei.

***Exemplu*:**

Am cumpărat de la magazin bomboane, napolitane şi suc şi am plătit în total 123 lei. Napolitanele au fost cu 9 lei mai ieftine decât dublul cantităţii de bomboane, iar sucul a fost cu 6 lei mai scump decât triplul cantităţii de bomboane. Cât a costat fiecare ?

1. *Identificarea datelor cunoscute și a celor necunoscute din enunțul problemei.*

▪ Cunoaştem: costul total şi preţurile napolitanelor şi sucului, comparativ cu preţul bomboanelor.

2. *Stabilirea necunoscutei* (notată de regulă cu x) *și exprimarea celorlalte necunoscute* (dacă există) cu ajutorul acesteia.

▪ Notăm cu x preţul bomboanelor. Atunci preţul napolitanelor, fiind cu 9 mai mic față de dublul preţului bomboanelor, este $2x - 9$, iar preţul sucului, fiind mai mare cu 6 decât triplul preţului bomboanelor, este $3x + 6$.

3. *Formarea ecuației / inecuației* care transcrie problema în limbaj matematic.

▪ Suma totală fiind 123, deducem că $x + (2x - 9) + (3x + 6) = 123$.

4. *Rezolvarea ecuației / inecuației.*

▪ $x + 2x - 9 + 3x + 6 = 123 \Leftrightarrow 6x - 3 = 123 \Leftrightarrow 6x = 126$ şi $x = 21$.

5. *Interpretarea soluției / soluțiilor și formularea răspunsului* la problemă.

▪ Bomboanele au costat 21 lei, napolitanele $2 \cdot 21 - 9 = 42 - 9 = 33$ lei, iar sucul $3 \cdot 21 + 6 = 63 + 6 = 69$ lei.

6. *Verificarea soluțiilor* obținute în forma inițială (neprelucrată) a problemei.

▪ Calculăm suma totală: $21 + 33 + 69 = 33 + 90 = 123$. Deci costurile determinate sunt corecte.

Să vedem ce am înțeles

Avem de rezolvat problema: „Clubul de teatru percepe o taxă de intrare la spectacol de 4€ pentru fiecare elev. Clubul s-a împrumutat de la părinți cu 400€ pentru costume, sală și consumabile. După spectacol, a înapoiat părinților împrumutul și a rămas cu 100€. Câți spectatori au fost la spectacol ?” Să stabilim datele cunoscute, cele necunoscute, necunoscuta care se notează cu x, ecuaţia. Rezolvăm ecuaţia şi interpretăm soluţia.

Învățăm să rezolvăm

1. Aflați două numere întregi, știind că unul este triplul celuilalt, iar suma lor este egală cu –36.

***Rezolvare*:** Dacă notăm unul dintre numere cu x, celălalt este $3 \cdot x$, obținem ecuația $x + 3 \cdot x = -36$. De aici, adunând 2 în fiecare termen, avem $4 \cdot x = -36$. Deci un număr este $x = -36 : 4 = -9$, iar celălalt este $-9 \cdot 3 = -27$. Într-adevăr, $-9 + 3 \cdot (-9) = -36$.

2. Dacă din produsul dintre un număr întreg și 3 scădem 2, obținem un număr cuprins între –8 și 7. Aflați numerele întregi care verifică această condiție.

***Rezolvare*:** Notând cu x numărul întreg necunoscut, condiția din enunț se scrie sub forma: $-8 < 3 \cdot x - 2 < 7$. De aici, deducem că $-8 + 2 < 3 \cdot x < 7 + 2 - 6 < 3 \cdot x < 9$ și $-2 < x < 3$. Deci $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Suma dintre un număr întreg și 130 este –15. Determină numărul întreg.
2. Diferența dintre 59 și un număr întreg este 19. Determină numărul întreg.
3. Produsul dintre un număr întreg și –7 este 56. Determină numărul întreg.
4. Câtul dintre un număr întreg și 8 este –3. Determină numărul întreg.
5. Află numerele întregi negative care, adunate cu 3, dau cel puțin –1.
6. Află numerele întregi pozitive din care, dacă se scade 5, se obține cel mult 2.
7. Dacă dublul unui număr întreg se adună cu 3, se obține un număr cuprins între –5 și 5. Află aceste numere.

8. Află numerele întregi al căror modul este mai mic cu 5 decât 13.
9. Află numerele întregi al căror modul este cu – 5 mai mic decât –2.
10. Află numerele întregi al căror modul este cu 3 mai mare decât 7.
11. Determină cel mai mare număr întreg negativ care, prin împărțire la 5 și la 7, dă restul 1.
12. Media aritmetică a numerelor 2, x, –6 și 8 este 2. Află numărul întreg x.
13. Media aritmetică a trei numere întregi este 4. Află unul dintre numere, știind că media aritmetică a celorlalte două este –2.

14. Află numărul întreg care, adunat la numerele 15, 21 și 18, face ca media lor aritmetică să se mărească cu 2.
15. Dacă în fiecare bancă a unei clase se așază câte 2 elevi rămân 3 elevi în picioare, iar dacă se așază câte 3 elevi într-o bancă rămân 4 bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?
16. Un bilet la cinema costă 18 lei, iar un bilet la teatru 45 lei. Află câte bilete la teatru se pot cumpăra cu suma plătită pentru 5 bilete de cinema.
17. Suma a trei numere întregi impare consecutive este –33. Află cele trei numere.

Proiect scratch

Modelează următorul scenariu: Pe un fundal verde cu titlul „Numere consecutive”, un personaj spune „Spune-mi, te rog ! Trei numere întregi consecutive care au suma 48 (unde 48 este ales aleatoriu până la 1000). Și așteaptă răspunsul (listă cu separatorul virgulă), urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of ! Trebuia ...” (urmat de valoarea corectă, la noi ar fi 15,16,17).

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. Rezultatul calculului $-2-4\cdot 2$ este diferit de

o)	**p)**	**q)**	**r)**
$-10:(-2)-5$	$-10:2-5$	$-2-4-4$	-10

2. Nu este soluție a ecuației $(x-1)(x+2)(x-2)=0$

p)	**q)**	**r)**	**s)**
2	1	-2	-1

3. Produsul a trei întregi consecutive este -120. Cel mai mare este

c)	**d)**	**e)**	**f)**
-5	-4	-6	-3

4. Produsul a patru numere întregi diferite este 6. Cel mai mare este

i)	**j)**	**k)**	**l)**
-3	-6	2	1

5. Produsul a cinci numere întregi diferite nu poate fi

l)	**t)**	**m)**	**n)**
-14	-15	-16	-17

6. Selectați egalitatea adevărată

b)	**c)**	**d)**	**e)**
$1-2-3=(1-2)+3$	$1-(2-3)=(1-2)-3$	$1-(2+3)=(1-2)+3$	$1-(2-3)=(1-2)+3$

7. Inecuația $|x+1|<4$ are un număr de soluții egal cu

a)	**b)**	**c)**	**d)**
7	6	4	3

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Valoarea de adevăr a enunțului „ecuația $-2x+5=7$ are soluția $x=-1$” este …

10p **2.** Numărul de elementе ale mulțimii $M=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|\leq 2\}$ este egal cu … .

10p **3.** Soluția ecuației $3x-1=7$ este … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Numerele întregi care verifică ecuația $|x-5|=7$ sunt:

a) $-2, 12$; **b)** $-7, 7$; **c)** 12; **d)** -2.

10p **2.** Dimineața, termometrul arată -9° C. Cu câte grade a crescut temperatura, dacă la prânz se înregistrează 1° C?

a) -8° C; **b)** 8° C; **c)** -10° C; **d)** 10° C.

10p **3.** Numerele întregi mai mari decât -3 și mai mici decât 1 sunt:

a) $\{-3,-2,-1,0,1\}$; **b)** $\{-2,-1\}$; **c)** $\{-2,-1,0\}$; **d)** $\{-2,0\}$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Trei numere întregi consecutive au suma egală cu -24. Determinați cele trei numere.

10p **2.** Determinaţi numerele întregi x, y, astfel încât $(x + 3)(y - 1) = 5$.

10p **3.** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $3x+7=10$; **b)** $2x+4=-4$; **c)** $2x\cdot(-5)=-20$; **d)** $x:(-8)=7$; **e)** $|x|=5$.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Soluția întreagă a ecuației $2x=-16$ este ... .

10p **2.** Dacă $x=-2$ este soluția ecuației $5x+m=-7$ atunci m este ... .

10p **3.** Elementele mulțimii $M=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -5<2x-3<1\}$ sunt ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect. Doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Mulțimea soluțiilor ecuației $|2x-1|=3$ este:

a) 2; **b)** $\{-1,2\}$; **c)** $\{1,2\}$; **d)** $\{-3,3\}$.

10p **2.** Un ascensor este la nivelul -2, de unde urcă la nivelul 6. Câte etaje a urcat ascensorul?

a) 6; **b)** 8; **c)** 7; **d)** 4.

10p **3.** Soluția întreagă a ecuației $3x+3=5x-7$ este:

a) – 5; **b)** 5; **c)** 0; **d)** 2.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $x+(-9)=-4$; **b)** $x-3=-12$; **c)** $-7x=28$; **d)** $-108:x=-18$.

10p **2.** Suma a trei numere întregi consecutive, impare, este – 9. Aflați numerele.

10p **3.** Aflați numărul întreg pentru care, dacă mărim dublul său cu – 5 , obținem același rezultat ca atunci când adunăm numărul cu – 3.

Teme pentru portofoliu

1. Fie mulțimea $A=\{-4;+2;+3;0,(6);0;-5;-205;74;0,37\}$. Determină mulțimile:

$B=\{x \mid x\in A$ și x este număr întreg negativ$\}$; $C=\{y \mid y\in A$ și y este număr întreg nenegativ$\}$;

$D=\{z \mid z\in A$ și z este număr întreg pozitiv$\}$; $E=\{u \mid u\in A$ și u este număr pozitiv$\}$.

2. În tabelul alăturat sunt înregistrate temperaturile în grade celsius, la aceeași oră din zi, pentru fiecare zi a săptămânii. Reprezintă pe axa numerelor punctele care au ca abscise valorile temperaturilor înregistrate în tabel.

L	Ma	Mi	J	V	S	D
0	2	–1	–4	–2	1	6

3. Scrie opusul și, apoi, modulul numerelor: 9, –13, 204, – 37, 0, – 432.

4. Copiază și completează spațiul punctat cu unul dintre simbolurile „<” sau „>” pentru a obține afirmații adevărate:

a) 42 … 24; **b)** – 13 … – 31 ; **c)** – 1 … – 2;
d) – 5 … 0; **e)** – 34 … – 43; **f)** 3 … – 1;
g) – 3 … 1; **h)** 0 … 5; **i)** 42 ... 41.

5. Se dă mulțimea A = {–24, 23, 21, –22, –23, 22}.
a) Scrie cel mai mic și cel mai mare număr al mulțimii;
b) Indică perechile de numere opuse din mulțime;
c) Ordonează crescător și descrescător numerele din mulțime;
d) Indică numărul din mulțime cel mai apropiat de 0.

6. În tabelul alăturat sunt date temperaturile (în $°C$) de lichefiere ale unor gaze (temperaturile sub care gazul indicat devine lichid). Scrie aceste gaze în ordinea crescătoare a temperaturilor lor de lichefiere.

Gazul	**T (în $°C$)**
Argon	– 122
Azot	– 147
heliu	– 268
hidrogen	– 240
neon	– 229
oxigen	– 118

7. Calculează sumele:
$A = 4 + 3$; $B = -5 + 7$; $C = -9 - 3$; $D = -25 + 13$;
$E = 59 - 37$; $F = -27 - 14$; $G = -35 + 0$; $H = 0 - 14$.

8. Dacă $a+b=-23$ și $c=-9$, calculează $a+(b+c)$.

9. Știind că $a=-2, b=3, c=-1$, calculează:
a) $a+b,\ a-c,\ -a+b$; **b)** $b+c-a,\ a-(b+c)$.

10. Calculează $1+2+...+50+(-1)+(-2)+...+(-55)$.

11. Completează spațiile punctate, folosind simbolurile „+” sau „ – ” pentru a obține relații adevărate:

a) 10 … 15 … 1 … = – 4; **b)** – 5 … 10 … 8 = – 3;
c) 7 … 11 … 20 = – 2; **d)** 10 … 25 … 3 = – 18;
e) 5 – (… 13 … 9) = –17.

12. Înmulțește numerele 6, – 7, 8 și – 9, două câte două. Câte posibilități sunt?

13. Calculează cu ajutorul factorului comun:

a) $-3+5\cdot(-3)$; **b)** $-2\cdot(-6)+(-2)\cdot(-4)$; **c)** $7\cdot14-(-14)\cdot7$;
d) $-5\cdot27=6\cdot27-27$; **e)** $-23\cdot7+(-23)\cdot(-9)-(-23)\cdot(-8)$;
f) $32\cdot51+47\cdot64-51\cdot23-64\cdot47$; **g)** $-15\cdot(-32)+(-15)\cdot5+4\cdot(-27)-(-11)\cdot(-27)$.

14. Copiază și completează tabelul alăturat, cu coloanele:
$a:(-1)$ $|a|:b$, $a:|b|$, $a:b$, $a:c$, $(a+b):c$, $a:(b-c)$.

a	b	c
–120	–6	2
–80	–16	+4
–144	–12	–1
100	–10	–5
–72	8	–4

15. Află numărul întreg care, pus în locul literei, face egalitatea adevărată:

a) $-756:x=9$; **b)** $187:y=-11$; **c)** $-774:z=-43$;
d) $112:a=4$; **e)** $34:x=17$; **f)** $0:u=0$;
g) $-315:v=325$.

16. Din mulțimea $A=\{-7; 9; 13; -15; -23; 18; 31\}$ selectează numerele întregi prime și numerele întregi compuse.

17. Scrie mulțimile, prin enumerarea elementelor:

$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 6\,\vdots\,x\}$; $B=\{y\in\mathbb{Z}\mid 108\,\vdots\,y, y\in A\}$; $C=\{z\in\mathbb{Z}\mid -144\,\vdots\,z, z\in A\}$.

18. Calculează:

$A=(4-8):2$; $B=-27:(-11+2)$; $C=(-38+4):(19-2)$;

$D=(127-2):(-31+6)$; $E=\dfrac{57-13}{-11}$; $F=\dfrac{29-63}{-29-5}$; $G=\dfrac{9\cdot(-4)}{-4\cdot3}$.

19. Calculează:

I. $A=\left(2^2\right)^3$; $B=\left[(-3)^2\right]^1$; $C=\left(10^2\right)^3$; $D=\left[(-1)^7\right]^{13}$; $E=\left(0^{12}\right)^{13}$; $F=\left[(-5)^{21}\right]^0$;

$G=\left[\left(2^3\right)^2\right]^2$.

II. $A=\left[2\cdot(-3)\right]^3$; $B=\left[(-3)\cdot5\right]^2$; $C=\left[4\cdot(-6)\right]^3$; $D=\left[(-11)\cdot(-12)\right]^2$; $E=(13\cdot0)^2$.

III. $A=(-3)^2-2^3+5^0$; $B=3^3-(-3)^2$; $C=(-1)^{325}+(-1)^{2000}+(-1)^{12}$; $D=(-7)^0+7^2-7$.

IV. $A=(-2)^3\cdot(-3)^2\cdot5$; $B=(-4)^2\cdot(-3)^3\cdot5^2$; $C=-7^2\cdot(-2)^3\cdot5^2$; $D=(-3)^2\cdot(-1)^3\cdot(-2)^3\cdot(-1)^4$

V. **a)** $(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...+(-1)^{100}+(-1)^{101}$;

b) $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+...+(-1)^{101}+(-1)^{102}$;

c) $(-1)^2+(-1)^4+(-1)^6+...+(-1)^{1000}$.

20. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $x:5=1$; **b)** $x:(-7)=2$; **c)** $x:(-1)=4$; **d)** $x:19=0$;

e) $x:23=-1$; **f)** $8:x=2$; **g)** $1:x=-1$; **h)** $2(x-1)=6$;

i) $-3(-x+2)=-12$; **j)** $x+2(x-3)=0$; **k)** $2x-(-4-3x)=9$; **l)** $x+2x-3x=0$;

m) $3(x+2)=-2(x+1)-17$; **n)** $-5(4+3x)+8x-4=-2(x-3)$.

21. Află numărul întreg *m*, pentru care ecuația cu necunoscuta *x* are soluția indicată:

a) $x+16=m$ are soluția 2; **b)** $-3x+5=m$ are soluția 2;

c) $x+m=4$ are soluția 3; **d)** $mx-1=1$ are soluția 1.

22. Rezolvă inecuațiile cu necunoscuta număr întreg:

a) $2x+1\le 3$; **b)** $-3x+2<8$; **c)** $x:2-\frac{1}{5}\le\frac{4}{5}$; **d)** $x:\frac{1}{5}-1\ge\frac{2}{3}$;

e) $x:0,5-3<5$; **f)** $\frac{2}{3}+0,(3)x>1\frac{1}{3}$; **g)** $-2(x+3)\le 8$; **h)** $2x+x-3>12$;

i) $1>x+2$; **j)** $2\le 3-x$; **k)** $(x-2):7\le 1$; **l)** $(1-x):(-2)\ge 3$;

m) $\frac{x+4}{3}\le 2$; **n)** $x\left(1+\frac{1}{3}\right)+2\le\frac{10}{3}$.

23. Completează spațiile punctate pentru a obține inegalități adevărate, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$:

a) Dacă $x<2$, atunci $x+3<...$, iar $x-2<...$;

b) Dacă $x\ge 5$, atunci $x+4\ge ...$, iar $x-6\ge ...$;

c) Dacă $x>11$, atunci $x+1>...$, iar $x-8>...$.

24. Suma a două numere întregi este 2 și diferența lor este –12. Află cele două numere întregi.

25. Diferența a două numere întregi este 40. Află cele două numere, știind că împărțind numărul mai mare la cel mai mic se obține câtul 4 și restul 1.

26. În ecuația $x+3=5$, *x* reprezintă un număr întreg. Formulează o problemă care se rezolvă cu această ecuație.

27. În ecuația $5x=45$, *x* reprezintă un număr întreg. Formulează o problemă care se rezolvă cu această ecuație.

28. Se consideră două numere naturale, astfel încât unul este de două ori mai mic decât celălalt. Află cele două numere, știind că suma lor este cel mult egală cu 15.

29. Se consideră două numere întregi negative, astfel încât unul este produsul dintre celălalt și 4. Află cele două numere, știind că suma lor este cel puțin egală cu –15.

Capitolul 4. MULȚIMEA NUMERELOR RAŢIONALE

Unitatea de învățare: Numere raționale

LECȚIA 1. Număr rațional; mulțimea numerelor raționale

Atenție, începem!

Ora	10^{20}	11^{00}	11^{20}	11^{40}	12^{00}	12^{20}	12^{40}	13^{00}	13^{20}
Temperatura în grade Celsius	2,5	$\frac{21}{15}$	$\frac{7}{5}$	1,4	0	–1,4	–2,5	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{21}{15}$

A1. Din tabelul dar, în care sunt înregistrate temperaturile, pe parcursul unei vizite, în peștera Scărișoara, remarcăm echivalențele: $\frac{21}{15}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$ și $-\frac{21}{15}=-\frac{14}{10}=-\frac{7}{5}$.

a) Reprezentați pe axa numerelor temperaturile din tabel, luând ca unitate de măsură 1 cm, ținând seama că mulțimea fracțiilor echivalente se reprezintă în același punct pe axă și răspundeți la întrebarea: Dacă mulțimea fracțiilor pozitive echivalente cu o fracție dată determină un număr rațional pozitiv, cum se numește numărul rațional determinat de mulțimea fracțiilor negative echivalente cu o fracție dată ?

b) Indicați orele la care s-a resimțit cea mai mică, respectiv cea mai mare temperatură.

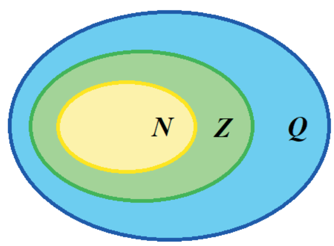
c) Scrieți temperaturile date de numere raționale opuse și comparați modulele acestora.

Ce ne învață teoria?

1. Mulțimea fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește ***număr rațional*** de reprezentant fracția dată.
2. Oricărui număr rațional îi corespunde un punct unic pe axa numerelor.
3. Mulțimea numerelor raționale se notează:

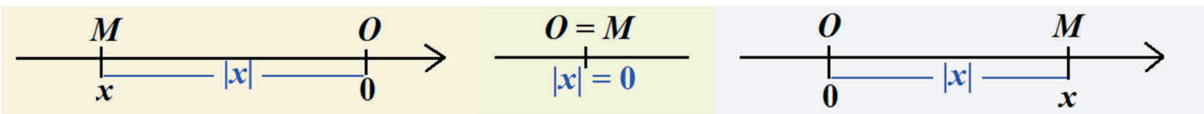
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,/\,m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*\right\};\ \mathbb{Q}=\mathbb{Q}_-\cup\mathbb{Q}_+;\ \mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$$

Cum orice număr natural este și număr întreg, iar orice număr întreg este număr rațional cu numitorul 1, rezultă incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.



4. ***Modulul*** numărului rațional x este un număr rațional mai mare sau egal cu 0 și reprezintă distanța de la originea O a axei numerelor la punctul $M(x)$.

Pentru $x=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$ scriem: $\left|\frac{a}{b}\right|=\begin{cases}-\frac{a}{b}, & \text{dacă } \frac{a}{b}<0;\\ 0, & \text{dacă } \frac{a}{b}=0;\\ \frac{a}{b}, & \text{dacă } \frac{a}{b}>0.\end{cases}$



5. Două numere raționale care diferă doar prin semn se numesc ***numere raționale opuse***. Numerele raționale *opuse* au modulele egale și se reprezintă pe axă, prin două puncte *simetrice* față de originea O.

6. Dintre două numere raționale diferite, mai mare este cel de pe axă reprezentat mai la dreapta.

Să vedem ce am înțeles

Dacă: $A=\left\{-7;-6,2;-\frac{11}{2};-\frac{21}{4};-3;-1,(3);-0,2(3);1;\frac{7}{30};3;5,25;\frac{31}{5};7\right\}$

a) Să reprezentăm elementele mulțimii A, pe axa numerelor;

b) Să scriem perechile de numere opuse din mulțimea A;

c) Să scriem modulele numerelor din mulțimea A;

d) Să ordonăm crescător elementele din A.

Învățăm să rezolvăm

1. Aflați $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\neq -2$, $b\neq 2$ astfel încât fracția $\frac{12}{(a+2)(b-2)}$ să reprezinte numărul rațional 1,(3).

Rezolvare: Numărul rațional 1,(3) are reprezentantul: $1\frac{3}{9}=\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$, prin urmare este necesar ca $(a+2)(b-2)=9$. Deci $(a+2,b-2)\in\{(9,1);(3,3);(1,9);(-9,-1);(-3,-3);(-1,-9)\}$.

În consecință $(a,b)\in\{(7,3);(1,5);(-1;11);(-11,1);(-5,-1);(-3,-7)\}$.

2. Ordonați descrescător numerele: $\dfrac{64-100}{3^2\cdot 2};\dfrac{2^2\cdot 3^2}{4^2-5^2};\dfrac{5353}{7171}$.

***Rezolvare*:** Simplificăm fracțiile: $\dfrac{64-100}{3^2\cdot 2}=-\dfrac{36}{18}=-2$; $\dfrac{2^2\cdot 3^2}{4^2-5^2}=\dfrac{36}{-9}=-4$; $\dfrac{5353}{7171}=\dfrac{53\cdot 101}{71\cdot 101}=\dfrac{53}{71}$.

Atunci ordinea $-4<-2<\dfrac{53}{71}$ conduce la $\dfrac{5353}{7171}>\dfrac{64-100}{3^2\cdot 2}>\dfrac{2^2\cdot 3^2}{4^2-5^2}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Fie mulțimea $A=\left\{-5;7;0;\dfrac{1}{2};0,3;-1,(3);-\dfrac{8}{4};0,2(3)\right\}$. Scrie mulțimile:

$B=A\cap\mathbb{N}$; $C=A\cap\mathbb{Z}$; $D=A\cap\mathbb{Q}_-$; $E=A\cap\mathbb{Q}$.

2. Precizează semnul numerelor raționale exprimate prin fracțiile: $\dfrac{-3}{4};\dfrac{3}{-4};\dfrac{-3}{-4};-\dfrac{-5}{6};-\dfrac{5}{-6};-\dfrac{-2}{-3}$ și apoi scrie opusele lor.

3. Exprimă, mai simplu, numărul rațional $\dfrac{-7-2^3\cdot(-1)}{+5+(-2)^3+4}$.

4. Fiind date mulțimile $A=\{3,5,7\}$ și $B=\{\pm 10,\pm 1,0\}$, scrie mulțimea $C=\left\{\dfrac{a}{b}\,\middle|\,a\in A,b\in B\right\}$.

★★

5. Scrie toate numerele raționale exprimate prin fracțiile echiunitare care au numărătorul și numitorul cel puțin egali cu 3 și cel mult egali cu 5.

6. Află numerele naturale x pentru care fracția $\dfrac{8}{2x}$ este: **a)** supraunitară; **b)** echiunitară; **c)** subunitară cu numitorul mai mic decât 13.

7. Introdu întregii în fracție: $2\dfrac{3}{5};-5\dfrac{2}{7};-1\dfrac{7}{9};13\dfrac{5}{4};21\dfrac{5}{6}$.

8. Scoate întregii din fracție: $\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{4};-\dfrac{13}{5};\dfrac{27}{11};-\dfrac{39}{13};-\dfrac{48}{12};\dfrac{79}{23};\dfrac{205}{100}$.

★★★

9. Scrie toate fracțiile de forma $\dfrac{\overline{2x}}{15}$, ireductibile. Aceeași cerință pentru: $\dfrac{\overline{3x}}{20};-\dfrac{\overline{1x}}{12};\dfrac{\overline{2x}}{\overline{x4}};-\dfrac{x}{\overline{3x}}$.

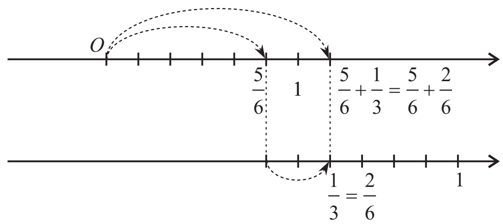
10. Știind că $\dfrac{1}{3}$ din suprafața unui dreptunghi este colorată în roșu, $\dfrac{2}{6}$ din suprafață este colorată în galben și $\dfrac{3}{9}$ din suprafața acestuia este colorată în albastru, compară suprafețele colorate în cele trei culori.

LECȚIA 2. Adunarea numerelor raționale; proprietăți
Scăderea numerelor raționale

Atenție, începem!

A1. Pentru a efectua adunarea $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}$, Emil spune că suma se scrie tot ca o fracție cu numitorul 5, iar Alina adaugă: și cu numărătorul, suma numărătorilor termenilor. Au dreptate cei doi elevi ? Dacă da, calculați:

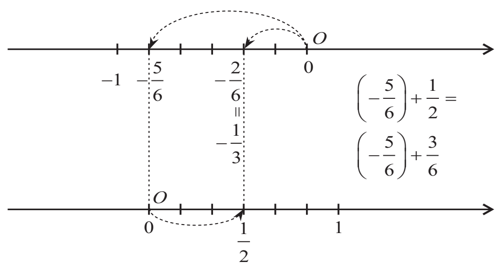
a) $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}$; **b)** $-\frac{2}{5}+\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{-2+(-7)}{5}$.



A2. Emil spune că nu poate efectua adunarea numerelor raționale $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$ pentru că nu au același numitor, iar Alina îi răspunde: dar dacă le aduci, mai întâi, la același numitor ?

a) Calculați: $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$, ținând seama de sfatul Alinei și observând desenul dat;

b) Calculați: $-\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)$; $-3{,}4+(-1{,}2)$.



A3. Copiați și finalizați adunările:

a) $-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{-5+1}{6}=\ldots$; **b)** $\frac{6}{11}-\frac{4}{11}=\frac{6-4}{11}$;

c) $\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2-5}{7}$; **d)** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3-2}{4}$; **e)** $1{,}5-2{,}6$

Ce ne învață teoria?

1. Suma a două numere raționale este tot un număr rațional.
Pentru a aduna două numere raționale exprimate prin fracții ordinare se aduc termenii la același numitor (c.m.m.m.c. al numitorilor), se copiază numitorul comun și se adună numărătorii, aplicând regula semnelor de la adunarea numerelor întregi.

***Exemple*:**

$$\textbf{a)}\ \left(-\frac{^{2)}2}{3}\right)+\left(-\frac{^{3)}1}{2}\right)=\left(-\frac{4}{6}\right)+\left(-\frac{3}{6}\right)=\frac{-4-3}{6}=-\frac{7}{6};$$

$$\textbf{b)}\ \left(-\frac{^{2)}1}{7}\right)+\left(+\frac{^{7)}3}{2}\right)=\left(-\frac{2}{14}\right)+\left(+\frac{21}{14}\right)=\frac{-2+21}{14}=\frac{19}{14};$$

c) $0,(3)+(-1,37)=\frac{^{100)}3}{9}+\left(-\frac{^{9)}137}{100}\right)=\frac{300-1233}{100}=-\frac{933}{100}=-9,33$.

> ***2. Diferența a două numere raționale este tot un număr rațional.***
> Diferența a două numere raționale se obține prin adunarea descăzutului cu opusul scăzătorului.

***Exemple*:**

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(+\frac{^{2)}2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=+\frac{4}{6}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{4-1}{6}=\frac{3^{(3}}{6}=\frac{1}{2}$;

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{^{3)}1}{5}\right)+\left(+\frac{^{5)}2}{3}\right)=-\frac{3}{15}+\frac{10}{15}=\frac{-3+10}{15}=\frac{7}{15}$;

c) $0,7-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{7}{10}+\frac{^{2)}2}{5}=\frac{7}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7+4}{10}=\frac{11}{10}$.

Să vedem ce am înțeles

Să-l urmărim pe roboțelul Sudi care se deplasează pe axa numerelor:

a) Sudi pornește din $O(0)$ și se deplasează în sensul pozitiv, întâi cu $\frac{5}{6}$ unități și apoi cu $\frac{1}{3}$ unități. Să stabilim coordonata punctului P în care ajunge;

b) Din P, Sudi se deplasează în sens negativ cu $\frac{5}{6}$ unități și apoi în sens pozitiv, cu $\frac{1}{2}$ unități. Să stabilim noua coordonată și lungimea totală a drumului parcurs.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați: $-\frac{8}{3}+0,(6)+1,2$.

***Rezolvare*:** $-\frac{8}{3}+0,(6)+1,2=-\frac{8}{3}+\frac{6}{9}+1,2=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+1,2=-\frac{6}{3}+1,2=-2+1,2=-0,8$.

2. Trei muncitori au de făcut o lucrare. Primul muncitor termină $\frac{1}{3}$ din lucrare, al doilea $\frac{1}{6}$ și al treilea $\frac{1}{12}$ din lucrare. **a)** Care muncitor a lucrat mai mult ? **b)** A câta parte din lucrare a rămas nerealizată?

***Rezolvare*: a)** Comparăm fracțiile cu același numărător $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{12}$ și obținem $\frac{1}{3} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12}$. Adică, primul muncitor a lucrat mai mult;

b) Pentru a afla a câta parte din lucrare a rămas neefectuată, calculăm diferența:

$$1-\left({}^{4)}\frac{1}{3}+{}^{2)}\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=1-\frac{4+2+1}{12}=1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$. Deci, nu s-a realizat $\frac{5}{12}$ din lucrare.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Copiază și stabilește care egalități sunt adevărate și care false :

a) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{14}$; **b)** $\frac{9}{5}-\frac{4}{5}=1$; **c)** $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$;

d) $1-\frac{2010}{2011}=\frac{1}{2011}$; **e)** $-2{,}15-13{,}25=-3{,}6$; **f)** $2{,}175+13{,}25=15{,}425$.

2. Copiază, calculează mintal și simplifică rezultatul, când e cazul:

a) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$; **b)** $-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}$; **c)** $\frac{5}{16}+\frac{3}{16}$; **d)** $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$;

e) $-\frac{7}{4}+\frac{5}{4}$; **f)** $\frac{5}{16}-\frac{3}{16}$; **g)** $0{,}5-\frac{1}{4}$; **h)** $0{,}75-\frac{3}{4}$

i) $0{,}25-\frac{1}{2}$.

★★

3. Calculează și scrie rezultatul sub formă de fracție zecimală:

$$A=-\frac{6}{10}+\frac{7}{10};\ B=3+\frac{12}{10}+\frac{27}{100};\ C=\frac{25}{100}-\frac{35}{1000};\ D=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}-\frac{320}{1000};\ E=-\frac{4}{15}-\frac{5}{9}.$$

4. Calculează:

$$A=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4};B=\frac{5}{6}+\left(1-\frac{3}{4}\right);C=\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right);D=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}.$$

★★★

5. Segmentul *AB* are lungimea de $12\frac{2}{3}$ cm și segmentul *BC* are lungimea de $12\frac{5}{6}$ cm.

a) Care dintre cele două segmente este mai lung ? **b)** Află diferența lungimilor celor două segmente.

6. Pe axa numerelor, alegem unitatea de măsură OI de 3 cm.

a) Reprezintă punctele $A\left(\frac{5}{6}\right), B\left(\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{13}{6}\right)$; **b)** Află lungimile segmentelor *AB* și *BC*.

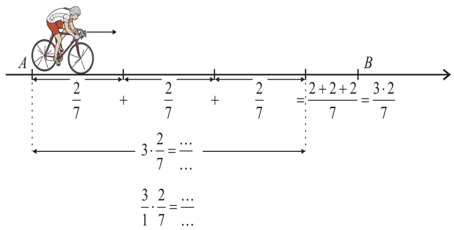
7. Stabilește între ce numere întregi consecutive este cuprinsă suma și apoi verifică prin calcul $1{,}7 + 5{,}19 + 0{,}49 + 2{,}43$.

LECȚIA 3. Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți
Împărțirea numerelor raționale

Atenție, începem!

A1. Pentru a ne aminti cum se înmulţesc şi cum se împart două numere raţionale pozitive exprimate prin fracţii ordinare, să rezolvăm următoarea problemă:

Un biciclist se deplasează din localitatea A în localitatea B.



a) Dacă biciclistul parcurge $\frac{2}{7}$ din întreaga distanță într-o oră, poate ajunge în 3 ore în localitatea B ? Cât parcurge biciclistul în $\frac{7}{2}$ ore ?

b) Dacă biciclistul parcurge $\frac{1}{2}$ din întreaga distanță în $\frac{3}{5}$ ore, cât parcurge într-o oră din această distanță ?

A2. Cu cele amintite la activitatea **A1**. finalizaţi calculele, aplicând regula semnelor de la înmulţirea numerelor întregi:

a) $3\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{3\cdot(-2)}{7}$; $\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{-7\cdot 3}{5\cdot 2}$; $\left(-\frac{4}{6}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{-2\cdot(-5)}{3\cdot 7}$; $2{,}5\cdot(-1{,}2)$;

b) $-\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$; – 1,5 : 3,2.

Ce ne învață teoria?

> 1. ***Produsul a două numere raționale este un număr rațional.***
>
> Pentru a înmulți două numere raționale înmulţim modulele lor (care sunt numere raționale pozitive) şi aplicăm regula semnelor de la numere întregi.

***Exemple*:**

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\left|-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|-\frac{3}{5}\right|=+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$;

b) $\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)=-\left(\left|-\frac{7}{4}\right|\cdot\left|+\frac{3}{5}\right|\right)=-\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5}\right)=-\frac{21}{20}$;

c) $(-2,5)\cdot(+7,(3))=\left(-\frac{25}{10}\right)\cdot\left(+\frac{73-7}{9}\right)=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(+\frac{66}{9}\right)=-\frac{330}{18}=-\frac{55}{3}=-18,(3)$.

2. ***Inversul*** numărului rațional $\frac{a}{b}$, unde $a,b\in\mathbb{Z}^*$ este numărul rațional $\frac{b}{a}$, pentru că $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

3. ***Câtul a două numere raționale este tot un număr rațional.***
Împărțirea a două numere raționale se face înmulțind deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.

***Exemple*:**

a) $-\frac{35}{12}:\left(-\frac{49}{4}\right)=-\frac{35}{12}\cdot\left(-\frac{4}{49}\right)=+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{21}$;

b) $-0,2:(-0,5)=2:5=0,4$;

c) $-3:0,(6)=-3:\frac{6^{(3}}{9}=-3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3\cdot3}{2}=-\frac{9}{2}=-4,5$;

d) $0,2:(-0,3)=-2:6=-0,(6)$.

4. ***Proprietățile*** înmulțirii numerelor raționale: asociativitate, comutativitate, existența elementului neutru, distributivitatea față de adunare, existența elementului nul, sunt aceleași cu cele ale înmulțirii numerelor întregi. La acestea se adaugă proprietatea:

Oricare ar fi $a\in\mathbb{Q}^*$***, există*** $\frac{1}{a}=a^{-1}$ ***, astfel încât*** $a\cdot\frac{1}{a}=1$ **.**

Să vedem ce am înțeles

1. Să scriem opusele şi inversele fiecărui număr: $x=\frac{3}{5}$; $y=-2,(3)$; $z=2,3$; $w=-2,1(2)$.

2. Pentru cele şase perechi posibile de numere diferite de mai sus, să calculăm produsul şi câtul lor.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculaţi: **a)** $-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$; **b)** $-\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-7)$.

Rezolvare*: *a) $-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\left|-\frac{2}{3}\right|\cdot\left|-\frac{3}{5}\right|=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$;

b) $-\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-7)=-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-7)=+1$.

2. Comparaţi numerele: $A = a : b \cdot c$, $B = a : b : c$, ştiind că: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{2}{5}$, $c = 2{,}4$.

Rezolvare: $A = \dfrac{1}{2} : \left(-\dfrac{2}{5}\right) \cdot 2{,}4 = -3$; $B = \dfrac{1}{2} : \left(-\dfrac{2}{5}\right) : 2{,}4 = -\dfrac{25}{48} = -0{,}5208(3)$. De unde,

$-3 < -0{,}5208(3)$. Adică $A < B$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Înmulțește fiecare dintre numerele date cu $\dfrac{4}{15}$ și simplifică rezultatul ori de câte ori este posibil: $\dfrac{15}{7}; -\dfrac{1}{4}; 5; \dfrac{9}{8}; -3; \dfrac{15}{4}; -\dfrac{25}{16}; -1{,}5; 0{,}(3); -1; 0.$

2. Calculează:

a) $76{,}25 \cdot 10$; **b)** $-53{,}67 \cdot 100$; **c)** $0{,}1346 \cdot (-1000)$; **d)** $-12 \cdot (-4{,}23)$;
e) $7{,}61 \cdot 31$; **f)** $(-1{,}2) \cdot (-5{,}4)$; **g)** $2{,}1 \cdot (-45{,}6)$; **h)** $-1{,}23 \cdot 45{,}6$;
i) $(-24{,}8) \cdot (-0{,}1)$; **j)** $82{,}4 \cdot 0{,}01$.

3. Calculează:

a) $1{,}(2) \cdot 3{,}14$; **b)** $(-5{,}6) \cdot 0{,}(6)$; **c)** $(-1{,}1) \cdot (-2{,}(3))$; **d)** $3{,}(2) \cdot (-1{,}4(3))$.

4. Stabilește dacă numerele din perechile de mai jos sunt numere inverse unul celuilalt:

a) 8 și $\dfrac{1}{8}$; **b)** 1 și 1; **c)** $-\dfrac{1}{2}$ și -2; **d)** $\dfrac{4}{7}$ și $\dfrac{7}{4}$;

e) $-\dfrac{11}{25}$ și $-\dfrac{25}{11}$; **f)** $0{,}7$ și $\dfrac{10}{7}$; **g)** $-0{,}(6)$ și $-\dfrac{3}{2}$; **i)** $-1{,}2(3)$ și $-\dfrac{30}{37}$.

★★

5. Calculează:

$$A = \frac{\frac{9}{7}}{3};\quad B = \frac{9}{\frac{-3}{7}};\quad C = \frac{-\frac{28}{27}}{-\frac{12}{9}};\quad D = \frac{-\frac{34}{15}}{\frac{16}{5}};$$

$$E = \frac{-20\frac{2}{3}}{15\frac{2}{4}};\quad F = \frac{1{,}4}{\frac{10}{21}};\quad G = \frac{\frac{17}{15}}{-1{,}1(3)}.$$

6. Calculează cât mai simplu posibil, folosind proprietățile înmulțirii și simplificările:

$$A = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7};\quad B = \left(-\frac{6}{35}\right) \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot 12;\quad C = \frac{21}{11} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{22}{42}\right) \cdot \frac{15}{4}.$$

★★★

7. Știind că $\dfrac{a}{b} = 1{,}25$, calculează:

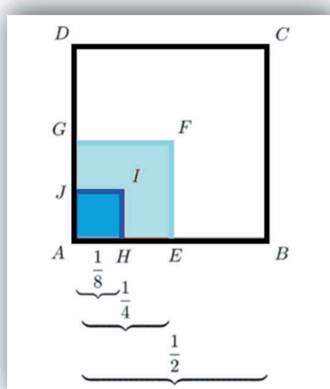
a) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{7}{8}$; **b)** $\dfrac{a}{b} : (-5)$; **c)** $(-5 \cdot a) : \dfrac{b}{2}$; **d)** $\dfrac{a}{5} : \left(-\dfrac{b}{4}\right)$.

LECȚIA 4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul

Atenție, începem!

A1. Pătratele *ABCD*, *AEFG*, *AHIJ* au laturile de lungime $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm, respectiv $\frac{1}{8}$ cm.

a) Calculați ariile celor trei pătrate, folosind înmulţirea fracţiilor şi apoi scrieţi ariile obţinute ca puteri ale lui $\frac{1}{2}$;



b) Scrieți lungimea fiecărei laturi ale celor trei pătrate ca puteri ale lui $\frac{1}{2}$ şi precizaţi dacă sunt adevărate egalităţile:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4, \text{ respectiv} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2}=\left(\frac{1}{2}\right)^6;$$

c) Calculați ariile dreptunghiurilor cu lăţimea *AH* şi lungimile *AG*, respectiv *AD* şi precizaţi dacă sunt adevărate egalităţile:

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$ şi $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

1. ***Puterea a n–a a numărului rațional*** *nenul a* este produsul a *n* factori egali cu *a*, oricare ar fi *n* număr natural cel puțin egal cu 2.

Observații: **a)** Prin convenție $a^0=1$, unde $a\in\mathbb{Q}^*$ și $a^1=a$, unde $a\in\mathbb{Q}$;

b) 0^0 nu are sens.

***Exemple*: a)** Puterea $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$ are baza $-\frac{1}{2}$ şi exponentul 3;

b) $(-0,5)^4=(-0,5)\cdot(-0,5)\cdot(-0,5)\cdot(-0,5)=+0,5^4=0,0625$.

2. ***Puterea cu exponentul (–n) a numărului rațional nenul n*** este inversa puterii a^n, unde *n* este un număr natural nenul:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \text{ unde } a\in\mathbb{Q}^*,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

În particular $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

***Exemple*:** **a)** $3^{-1}=\frac{1}{3}$; **b)** $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}=-\frac{5}{2}$; **c)** $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}=0,0001$;

d) $(-0,1)^{-2}=\frac{1}{(-0,1)^2}=\frac{1}{0,1^2}=\frac{1}{0,01}=100$.

> **3.** Regulile de calcul ale puterilor de numere întregi cu exponent natural se extind și la puterile numerelor raționale nenule cu exponenți întregi.

Exemple:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{5-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; **b)** $\left[(-0,2)^{-1}\right]^2=(-0,2)^{-1\cdot 2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5^2=25$;

c) $0,5^3:0,5^4=0,5^{3-4}=0,5^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$; **d)** $(-0,2)^7\cdot(+5)^7=\left[(-0,2)\cdot(+5)\right]^7=(-1)^7=-1$;

e) $1,4^{-3}:7^{-3}=(1,4:7)^{-3}=0,2^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=5^3=125$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să construim un tabel cu trei linii (numărul, baza, exponentul) şi să–l completăm pentru numerele: $5^7;\left(\frac{3}{4}\right)^5;(-2,3)^4;7$.

2. Să scriem ca fracţii zecimale, puterile lui 2 şi –2 cu exponent întreg cuprins între –3 şi 3.

3. Să scriem fiecare din numerele: 12; 23,4; 435,6 şi 7891,324 ca produsul unei puteri a lui 10 şi o fracţie zecimală cu o singură cifră în faţa virgulei.

Învățăm să rezolvăm

1. Comparați: **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ și $\left(\frac{1}{8}\right)^2$; **b)** 3^{32} și 5^{24}.

***Rezolvare*:** **a)** $\left(\frac{1}{8}\right)^2=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Comparăm $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ cu $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ și obținem $\left(\frac{1}{2}\right)^6<\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Deci $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{8}\right)^2$. **b)** $3^{32}=\left(3^4\right)^8$, iar $5^{24}=\left(5^3\right)^8$. Observăm $\left(3^4\right)^8<\left(5^3\right)^8$, deoarece $3^4=81<125=5^3$. Deci $3^{32}<5^{24}$.

2. Ordonaţi crescător numerele: **a)** 3^{-15}, 2^{-25} și 9^{-10}; **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^9$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

***Rezolvare*: a)** $3^{-15}=\left(3^{-3}\right)^5=\left(\frac{1}{27}\right)^5$; $2^{-25}=\left(2^{-5}\right)^5=\left(\frac{1}{32}\right)^5$; $9^{-10}=\left(9^{-2}\right)^5=\left(\frac{1}{81}\right)^5$;

$27<32<81 \Rightarrow \frac{1}{27}>\frac{1}{32}>\frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^5>\left(\frac{1}{32}\right)^5>\left(\frac{1}{81}\right)^5 \Rightarrow 3^{-15}>2^{-25}>9^{-10}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^9=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3$ și $3<4<8 \Rightarrow \frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9<\left(\frac{1}{4}\right)^3<\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Scrie ca putere cu exponent număr natural:

$A=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$; $B=4\cdot4\cdot4\cdot4$; $C=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$;

$D=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$; $E=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}$; $F=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$;

$G=1{,}5\cdot1{,}5\cdot1{,}5\cdot1{,}5$; $H=0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2$.

2. Determină:

a) puterea lui 2 cuprinsă între 500 și 1000; **b)** puterea lui 3 cuprinsă între 700 și 1000.

3. Scrie ca o singură putere, prin aplicarea regulilor de calcul cu puteri:

a) $2^4\cdot2^3\cdot2$; **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-7}$;

c) $(-3{,}5)^4\cdot(-3{,}5)^2\cdot(-3{,}5)^{-3}$; **d)** $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^4$; **e)** $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}\right]^5$.

4. Compară numerele din perechile următoare:

a) 3^{72} și 9^{37}; **b)** 4^{16} și 8^9; **c)** 3^{12} și 9^7; **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; **f)** $[0,(3)]^2$ și $[0,(3)]^3$; **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^8$;

h) $\left(\frac{4}{9}\right)^3$ și $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; **i)** $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ și $\left(\frac{25}{4}\right)^2$; **j)** $(0,(6))^{-3}$ și $(0,(6))^{-2}$.

5. Determină numerele care, puse în locul literei, satisfac inegalitatea:

a) $3^n\le10$; **b)** $2^n\le12$; **c)** $\left(\frac{3}{2}\right)^n\le4$; **d)** $\left(\frac{5}{4}\right)^n\le5$; **e)** $\frac{1}{3}\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\le1$.

6. Calculează: $A=\frac{2^4\cdot3^5}{7^2}\cdot\frac{2\cdot7^3}{2^4\cdot3^4}$; $B=\frac{4^3\cdot5^2}{3^4}\cdot\frac{3^5}{2^6\cdot5}$; $C=\frac{7^5\cdot11^3}{2^3\cdot5}\cdot\frac{5\cdot2^3}{7^5\cdot11^2}$.

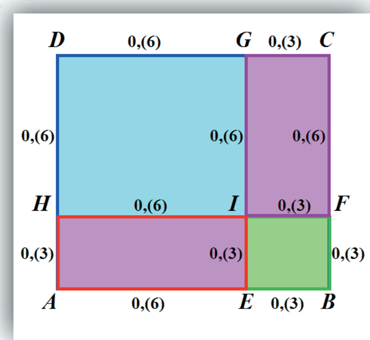
LECȚIA 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Atenție, începem!

A1. Identificați perechile de numere egale din mulțimea:

$\left\{A=a-(b+c),\ B=c:(a\cdot b),\ C=c^a\cdot b^a,\ D=(b\cdot c)^a,\ E=c:a\cdot b,\ F=a-b-c\right\}$, și verificați prin calcul egalitățile identificate, pentru $a=0,5^{-2}$, $b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right):(-2)$ și $c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$.

A2. Verificați prin calcul dacă aria pătratului $ABCD$, din figura alăturată, este egală cu suma ariilor pătratelor *DGIH*, *EBFI* și a dreptunghiurilor *AEIH*, *IFCG*.



Ce ne învață teoria?

1. Operațiile de același ordin se efectuează în ordinea în care sunt scrise, aplicând proprietățile acestora, atunci când este cazul.

Exemple:

a) $\frac{6}{5}+\frac{5}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=1+1+1=3$;

b) $-2\cdot\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{7}=1\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$.

2. Într-un exercițiu fără paranteze se efectuează întâi operațiile de ordinul al III–lea, apoi cele de ordinul al II–lea și, în final, cele de ordinul I.

Exemplu: $\frac{7}{5}+\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot1,2-\frac{29}{15}=\frac{^{3)}7}{5}+\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{5}-\frac{29}{15}=\frac{21}{15}+\frac{8}{15}-\frac{29}{15}=0$.

3. Dacă un exercițiu conține paranteze, se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte și, la final, operațiile din acolade.
Pe măsura efectuării calculelor, parantezele drepte se transformă în paranteze rotunde și acoladele se transformă în paranteze drepte.

Exemplu: $\left\{0,075+\frac{84}{575}\cdot\left[5,(6)-\left(3+\frac{75}{100}\right)\right]-4,5:(-6)\right\}\cdot10=\left[\frac{3}{40}+\frac{84}{575}\cdot\left(\frac{17}{3}-\frac{15}{4}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{6}\right]\cdot10=$

$=\left(\frac{3}{40}+\frac{84}{575}\cdot\frac{23}{12}+\frac{3}{4}\right)\cdot10=\left(\frac{^{5)}3}{40}+\frac{^{8)}7}{25}+\frac{^{50)}3}{4}\right)\cdot10=\frac{15+56+150}{200}\cdot10=\frac{221}{20}=11,05$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să calculăm: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$.

2. Să calculăm: $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}$.

3. Să calculăm: $\frac{1}{2}+\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}$.

4. Să calculăm: $\frac{1}{2}:\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}$.

Învățăm să rezolvăm

1. Calculați: **a)** $68:\frac{17}{4}-2\cdot3+\frac{3}{5}-1{,}6$; **b)** $1\frac{1}{3}:\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{2}-\frac{7}{4}\right)\right]$.

***Rezolvare*:** **a)** $68:\frac{17}{4}-2\cdot3+\frac{3}{5}-1{,}6=\frac{68}{1}\cdot\frac{4}{17}-6+\frac{3}{5}-\frac{16}{10}=16-6+\frac{3}{5}-\frac{8}{5}=10-\frac{5}{5}=10-1=9$;

b) Introducem întregii în fracție, efectuăm operațiile din paranteza rotundă și apoi efectuăm împărțirea $1\frac{1}{3}:\left[\frac{1}{4}+\left({}^{2)}\frac{7}{2}-\frac{7}{4}\right)\right]=\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{4}+\frac{14-7}{4}\right)=\frac{4}{3}:\frac{1+7}{4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{8}=\frac{2}{3}$.

2. Efectuați: $\left(2\frac{1}{3}\right)^2:1\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$.

***Rezolvare*:** Introducem întregii în fracție, efectuăm în ordine: ridicarea la putere, împărțirea și adunarea fracțiilor:

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^2:1\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\left(\frac{7}{3}\right)^2:\frac{10}{9}+\frac{1}{10}=\frac{49}{9}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=\frac{49}{10}+\frac{1}{10}=\frac{50}{10}=5.$$

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Calculează:

a) $0{,}4+\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{3}-\frac{7}{12}:2{,}5$; **b)** $0{,}(6)+\frac{2}{3}:\frac{4}{3}+0{,}(2)$; **c)** $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}:6$;

d) $0{,}23:2{,}3\cdot10+\frac{1}{3}$; **e)** $0{,}(7):\frac{1}{49}+2{,}(3)+\left(\frac{83}{31}\right)^0$; **f)** $(0{,}5)^2:\frac{1}{8}+(0{,}01)^2\cdot10^5$

★★

2. Calculează:

a) $30:\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$; **b)** $\left(3:\frac{2}{0{,}(6)}+3\right)\cdot\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{6}\right):\frac{5}{4}$;

d) $\frac{1}{4}\cdot(1{,}5+0{,}(3):2)$; **e)** $\left[\frac{1}{4}+\left(2{,}5-1\frac{3}{4}\right):\frac{7}{8}\right]\cdot14$; **f)** $\left[3{,}5+\left(5+\frac{1}{6}\right)-4\frac{1}{3}\right]:3\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$.

3. Calculează:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$;

b) $\left[\left(1\frac{2}{3}\right)^{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right]:\left(\frac{5}{3}\right)^{2}+\frac{1}{3}$;

c) $\left[(0,2)^{3}+(0,1)^{2}-\frac{1}{125}\right]:\left(\frac{1}{10}\right)^{2}$;

d) $0,(09)\cdot\dfrac{\left(\frac{21}{20}+0,3:\frac{2}{5}\right):\frac{11}{10}+0,1(63)}{\left(0,4+3\frac{1}{5}\right)\cdot 5}$.

4. Află numărul natural n, pentru care este satisfăcută egalitatea:

$$\left[\left(\frac{7}{9}+\frac{77}{99}+\frac{777}{999}\right):\frac{7}{9}-\frac{111}{700}:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{70}+\frac{1}{700}\right)\right]^{n}=8.$$

Proiect scratch

Modelează următorul scenariu: Titlul „Numere raţionale”, un personaj spune „Spune-mi, te rog ! Dacă a = 2,4 şi b = 3,1, scrie suma, diferenţa şi produsul lor (unde numerele sunt alese aleatoriu până la 10, cu o zecimală). Şi aşteaptă răspunsul (listă cu separatorul spaţiu), urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of ! Trebuia ...” (urmat de valoarea corectă, la noi ar fi 5,5 – 0,7 7,44).

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. Suma care are rezultat număr întreg este

f)	g)	h)	i)
$\frac{3}{5}+0,4$	$\frac{3}{5}+0,6$	$\frac{3}{5}+0,(4)$	$\frac{3}{5}-0,(6)$

2. Numărul care are modulul 0,2 este

p)	q)	r)	s)
$\frac{3}{5}-0,6$	$\frac{3}{5}+0,(6)$	$\frac{3}{5}-0,8$	$-\frac{3}{5}+0,6$

3. Dacă două numere au produsul -1 și suma $\frac{3}{2}$, atunci

t)	ț)	u)	v)
sunt egale	un număr este 2	sunt opuse	sunt inverse

4. Câtul a două numere raționale opuse este

a)	b)	c)	d)
-1	1	0	Neprecizat

5. Suma cu exponent 2, respectiv 4, ale unui număr rațional *a* nu poate fi

a)	b)	c)	d)
2	$\frac{5}{16}$	-1	0

6. Suma a patru puteri ale lui 2 cu exponenți numere întregi consecutive este $\frac{15}{8}$. Nici un exponent nu poate fi

f)	g)	h)	i)
-2	-1	0	1

7. Rezultatul calculului $\left(1,2^{-1}\right)^{-2}+1,44:2-2$ este

e)	f)	g)	h)
0,16	0	-0,56	1

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Opusul numărului rațional $-4,13$ este ... .

10p **2.** Modulul numărului rațional $2\frac{1}{5}$, scris sub formă zecimală, este ... .

10p **3.** Cel mai mare dintre numerele $-2,253$ și $-2,2503$ este ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Rezultatul calculului $\frac{2}{7}-\frac{3}{2}$ este:

a) $\frac{5}{9}$; **b)** $-\frac{1}{5}$; **c)** $\frac{1}{7}$; **d)** $-\frac{17}{14}$.

10p **2.** Rezultatul calculului $\frac{26}{15}:\frac{39}{45}$, exprimat ca fracție ordinară ireductibilă, este:

a) 2; **b)** $\frac{338}{225}$; **c)** $\frac{78}{39}$; **d)** $\frac{117}{45}$.

10p **3.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}$ este:

a) 1; **b)** $\frac{6}{9}$; **c)** $\frac{8}{27}$; **d)** $\frac{4}{9}$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Efectuați: **a)** $1,02+\frac{49}{50}-1,1(6)\cdot\frac{3}{7}$; **b)** $\left(-\frac{3}{7}\right)^5\cdot\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^2\right]^4:\left(-\frac{3}{7}\right)^{12}$.

10p **2.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)>\frac{1}{6}$.

10p **3.** Dacă $a=-0,1\cdot\frac{25}{2}$ şi $b=\left(-\frac{25}{2}\right)^{-2}$, calculaţi $a\cdot b$.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Opusul numărului rațional $\frac{7}{9}$ este ... .

10p **2.** Modulul numărului rațional $-3,7$ scris ca fracție ordinară este … .

10p **3.** Dintre numerele $a=-\frac{5}{3}$ şi $b=-\frac{7}{4}$ mai mare este numărul … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect. Doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Efectuând $\frac{7}{3}-2,(3)$ se obține:

a) $\frac{5}{3}$; **b)** 0; **c)** $-\frac{2}{9}$; **d)** $\frac{2}{9}$.

10p **2.** Rezultatul calculului $\frac{25}{7}\cdot\frac{42}{50}$, exprimat în fracție ordinară ireductibilă, este:

a) $\frac{15}{10}$; **b)** $\frac{150}{50}$; **c)** $\frac{42}{14}$; **d)** 3.

10p **3.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{3}{5}\right)^5:\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ este:

a) $\frac{9}{25}$; **b)** $-\frac{9}{25}$; **c)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^8$; **d)** $\frac{6}{10}$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Efectuați: **a)** $\left(\frac{21}{10}+\frac{1}{2}\right):\frac{13}{4}-\frac{6}{5}+0,4$; **b)** $\left(\frac{5}{3}\right)^5\cdot\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^7:\left(\frac{5}{3}\right)^{16}$.

10p **2.** Comparați numerele: $a=\left(\frac{3}{4}-1\right)\cdot(-0,2)+\frac{3}{2}$ şi $b=\frac{15}{82}-\frac{15}{82}\cdot\frac{41}{3}:\frac{5}{2}$.

10p **3.** Calculați inversul numărului $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}:\left(-\frac{5}{4}\right)^{-6}\cdot\left[\left(-\frac{5}{4}\right)^2\right]^3$.

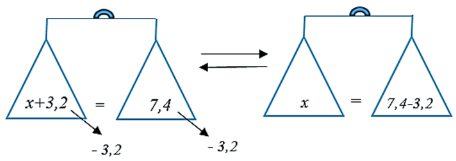
Unitatea de învățare: Ecuaţii

LECȚIA 6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale

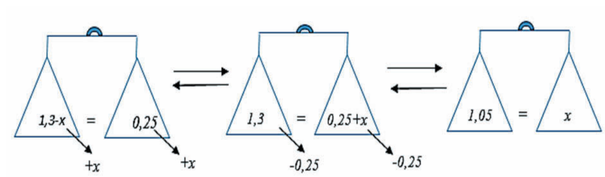
Atenție, începem!

A1. Justificați echivalențele următoarelor ecuații, identificând transformările relației de egalitate aplicate:

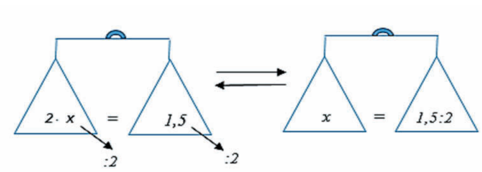
a) $x+3,2=7,4$ şi $x=7,4-3,2$



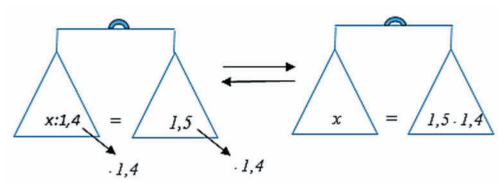
b) $1,3-x=0,25$ şi $x=1,3-0,25$



c) $2\cdot x=1,5$ şi $x=1,5:2$



d) $x:1,4=1,5$ şi $x=1,5\cdot 1,4$



A2. Justificați echivalențele de la activitatea **A1**, aplicând proba operației pentru fiecare ecuație: **a)**, **b)**, **c)**, **d)**.

Ce ne învață teoria?

1. Prin ***rezolvarea*** unei ecuații, în mulțimea numerelor raționale, înțelegem determinarea mulțimii tuturor soluțiilor raționale ale acesteia.
Două ecuații se numesc ***echivalente*** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Se obțin ecuații echivalente cu o ecuație dată prin aplicarea transformărilor relației de egalitate sau prin proba operației:

Prin adunarea sau scăderea aceluiaşi număr, în ambii membri ai ecuaţiei, obţinem o ecuaţie echivalentă cu ecuaţia dată.

a) Termenul necunoscut dintr-o sumă de doi termeni este egal cu diferența dintre sumă și termenul cunoscut:

$$2+x=-1,5 \Leftrightarrow x=-1,5-2 \Leftrightarrow x=-3,5;$$

b) Descăzutul este egal cu suma dintre diferență (rest) și scăzător:

$$x-3,5=2,35 \Leftrightarrow x=2,35+3,5 \Leftrightarrow x=5,85;$$

c) Scăzătorul este egal cu diferența dintre descăzut și rest:

$$14-x=2,5 \Leftrightarrow x=14-2,5 \Leftrightarrow x=11,5;$$

Prin înmulţirea sau împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei cu acelaşi număr nenul, obţinem o ecuaţie echivalentă cu ecuaţia dată.

d) Factorul necunoscut dintr-un produs de doi factori este egal cu câtul dintre produs și factorul cunoscut:

$x \cdot (-2{,}5) = 12{,}5 \Rightarrow x = 12{,}5 : (-2{,}5) \Leftrightarrow x = 5;$

Deîmpărțitul este egal cu produsul dintre cât și împărțitor:

$$x : 0{,}5 = -6 \Leftrightarrow x = -6 \cdot 0{,}5 \Leftrightarrow x = -3;$$

e) Împărțitorul se obține prin împărțirea deîmpărțitului la cât:

$$-2 : x = -4 \Leftrightarrow x = -2 : (-4) \Leftrightarrow x = 0{,}5.$$

2. Rezolvarea unor ecuații poate presupune aplicarea uneia sau a mai multor transformări:

***Exemplu*:** $1{,}2 \cdot x + 10 = 24{,}4 \;\; | -10$ ← scădem 10 din ambii membri ai ecuației;

$1{,}2 \cdot x + 10 - 10 = 24{,}4 - 10$ ← calculăm diferențele;

$1{,}2 \cdot x = 14{,}4 \;\; |:1{,}2$ ← împărțim la 1,2 ambii membri ai ecuației ;

$1{,}2 : 1{,}2 \cdot x = 14{,}4 : 1{,}2$ ← efectuăm împărţirile;

$x = 12$

Verificăm prin înlocuire în ecuaţia iniţială $1{,}2 \cdot 12 + 10 = 12{,}4 + 10 = 24{,}4$. Deci 12 este soluţia ecuaţiei date.

Să vedem ce am înțeles

1. Să stabilim care dintre ecuaţii sunt echivalente:

$2{,}5x = 2{,}5$; $\quad 2{,}5x - 2{,}5 = 0$; $\quad -2{,}5x = -2{,}5$; $\quad 2{,}5 + 2{,}5x = 5$;

$3x - 3 = 0$; $\quad 2x - 3x = 0{,}5$; $\quad 2{,}3x + 2{,}3 = 4{,}6$.

2. Să ordonăm logic următoarele relaţii, folosind echivalențele ecuațiilor:

$0{,}18x = -5{,}4$; $\quad 0{,}3x + 2{,}5 = 0{,}12x - 2{,}9$; $\quad x = -30$;

$x = -5{,}4 : 0{,}18$; $\quad 0{,}3x - 0{,}12x = -2{,}5 - 2{,}9$.

Învățăm să rezolvăm

1. Rezolvați, în mulțimea $\mathbb{Q}$, ecuația: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x + 1 = \frac{7}{4}$.

***Rezolvare*:** $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{^{2)}2}{3} + \frac{1}{6}\right)x + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{6}x + 1 = \frac{7}{4} \Big| -1 \Leftrightarrow \frac{5}{6}x = \frac{3}{4} \Big| : \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{9}{10} \in \mathbb{Q}$

și egalitatea $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{10} + 1 = \frac{7}{4}$ este adevărată. Deci $S = \left\{\frac{9}{10}\right\}$.

2. Aflați valoarea lui $a \in \mathbb{Q}$, dacă ecuația $3x - 2a = \frac{5}{2}$ are soluția 1,6.

Rezolvare: Deoarece 1,6 este soluție, înseamnă că, înlocuind necunoscuta x cu 1,6 în ecuație, egalitatea se verifică:

$$3 \cdot 1,6 - 2a = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4,8 - 2a = 4,8 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2a = 4,8 - 2,5 \Leftrightarrow 2a = 2,3 \Leftrightarrow a = 1,15 .$$

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Precizează dacă ecuațiile din perechile următoare sunt echivalente:

a) $\frac{1}{5}x - 2 = 1$ și $\frac{1}{5}x = 3$; **b)** $\frac{1}{5}x = 3$ și $x = 3 \cdot 5$; **c)** $\frac{2}{3}y + 1 = 3$ și $\frac{2}{3}y = 2$;

d) $\frac{2}{3}y = 2$ și $y = 2 \cdot \frac{3}{2}$; **e)** $\frac{5}{3} : x - 1 = 4$ și $\frac{5}{3} : x = 5$; **f)** $\frac{5}{3} : x = 5$ și $x = \frac{5}{3} : 5$.

2. Rezolvă, în $\mathbb{Q}$, ecuațiile:

a) $1,5 + x = -7,5$; **b)** $\frac{11}{4} + y = 3$; **c)** $z + 0,(3) = \frac{2}{3}$;

d) $y - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$; **e)** $-\frac{7}{2} \cdot x = 0,5$; **f)** $a - 0,2(3) = \frac{4}{15}$.

★★

3. Rezolvă, în $\mathbb{Q}$, ecuațiile:

a) $-0,5x = -7,5$; **b)** $-\frac{5}{2}y = \frac{1}{4}$; **c)** $1,4z = -\frac{7}{2}$;

d) $\frac{6}{5}u = 0,8$; **e)** $9,9 : x = -3$; **f)** $x : \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{13}{6}$;

g) $-1,6 : x = 0,8$; **h)** $y : \frac{5}{2} = 3,4$.

4. Determină mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 3\}$; $B = \left\{y \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{7}x + \frac{1}{2} = 2\right\}$; $C = \left\{z \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{2}z + 1 = 3\right\}$; ;

$D = \left\{x \in \mathbb{Q}_+ \mid \frac{2}{3}x + 0,5 = 1\right\}$; $E = \{y \in \mathbb{Q} \mid 0,25y + 0,1 = 0\}$.

★★★

5. Rezolvă ecuațiile:

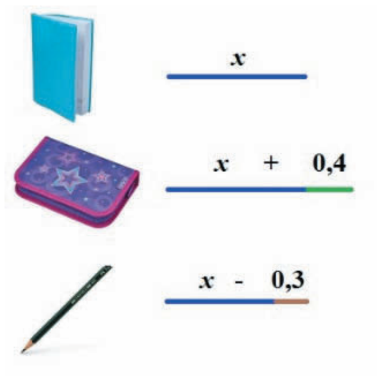
a) $x + \frac{1}{4}(1 - 2x) = \frac{5}{4}$; **b)** $1 + \frac{1}{5}(6x - 4) - x = \frac{2}{5}$; **c)** $2x + \frac{1}{2}(2 - 3x) - 1 = 1,5$;

d) $x + \frac{1}{5}(x - 2) - 1 = 0,2$; **e)** $x + \frac{2 - 3x}{5} = 1$; **f)** $2 + \frac{3x - 4}{2} - 2x = \frac{3}{2}$.

LECȚIA 7. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor în $\mathbb{Q}$

Atenție, începem!

1. Prețul unui caiet este cu 0,4 lei mai mic decât prețul unui penar și cu 0,3 lei mai mare decît prețul unui creion. Aflați prețul caietului, creionului și al penarului, știind că toate trei costă 4 lei.



***Rezolvare*:** Dacă notăm cu x prețul caietului, atunci prețul penarului este $x + 0,4$ și prețul creionului este $x - 0,3$.
Obţinem ecuaţia: $x + x + 0,4 + x - 0,3 = 4 \Leftrightarrow 3x + 0,1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 3,9 \Leftrightarrow x = 1,3$.
Prin urmare 1,3 lei este preţul caietului; preţul penarului este $1,3 + 0,4 = 1,7$ lei; preţul creionului este $1,3 - 0,3 = 1$ leu.
Proba: $1,3 + 1,7 + 1 = 4$ (A).

2. Un elev a cheltuit $\frac{3}{7}$ dintr-o sumă de bani, apoi a cheltuit $\frac{3}{5}$ din rest și încă 12 lei. Ce sumă inițială a avut elevul, dacă i-au mai rămas 20 lei?

***Rezolvare*:** Notăm cu x suma inițială. Dacă a cheltuit $\frac{3}{7}$ din sumă, adică $\frac{3}{7}x$, a rămas cu $x - \frac{3}{7}x = \frac{4}{7}x$ sumă din care a cheltuit apoi $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}x + 12 = \frac{12}{35}x$. A rămas cu $\frac{4}{7}x - \frac{12}{35}x - 12$ sumă ce reprezintă cei 20 de lei rămași. Deci $^{5)}\frac{4}{7}x - \frac{12}{35}x - 12 = 20 \Leftrightarrow \frac{8}{35}x = 32 \Leftrightarrow x = 140$ lei.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. La o muncă de vară, tu primeşti 3,2€ pe zi şi câte 2,3€ pentru fiecare comision. Calculează câte comisioane trebuie să faci pentru a câştiga 17€ într-o singură zi.
2. Găseşte trei numere întregi consecutive, ştiind că o treime din suma lor este 28.
3. Din două localităţi, aflate la distanţa de 24,3 km, pornesc unul către celălalt doi biciclişti cu vitezele 8,2 km/h, respectiv 6,5 km/h. Ei rulează până se întâlnesc. Calculează timpul de deplasare.
4. Nota de plată a mecanicului maşinii familiei tale este de 45,8£. Ştiind că piesele au costat 33,9£, iar ora de muncă valorează 3,4£, calculează câte ore de muncă sunt trecute pe nota de plată.

5. Pentru o perioadă de 5 luni, factura de plată a apei se calculează astfel: 16,70 € abonamentul și 2,45 €/m^3 de apă consumat. Calculează:

a) suma plătită de familia Georgescu, care consumă 75 m^3 în 5 luni;

b) consumul de apă al familiei Paraschiv, care plătește 261,15 euro pentru 5 luni.

6. După ce cheltuiește $\frac{2}{15}$ dintr-o sumă de bani, unui elev îi rămân 13 lei. Află ce sumă de bani a avut elevul inițial.

7. Diferența dintre $\frac{7}{8}$ și $\frac{1}{4}$ din capacitatea unui rezervor de lichide este de 20 l. Află capacitatea rezervorului.

8. Perimetrul unui dreptunghi este 18 cm. Calculează dimensiunile dreptunghiului, știind că lățimea sa este jumătate din lungime.

9. Un elev deschide o carte la întâmplare și constată că suma numerelor celor două pagini este 55. **a)** Află numerele celor două pagini la care a fost deschisă cartea; **b)** Află numerele celor două pagini dacă suma numerelor celor două pagini ar fi fost 37; **c)** Este posibil ca suma numerelor paginilor la care se deschide o carte, să fie un număr par?

10. Un croitor plătește pentru 15 m de stofă cu 455 lei mai mult decât pentru 8 m din aceeași stofă. Află prețul unui metru de stofă.

11. Suma a două numere este $\frac{19}{15}$, dar dacă adunăm $\frac{5}{6}$ din primul cu o şesime din al doilea obţinem 0,6(5). Află numărul mai mic.

12. Media aritmetică a trei numere este $20\frac{1}{3}$. Știind că două dintre aceste numere sunt 12,(5) și 9,(6), află al treilea număr.

13. Un ciclist constată că, după ce a parcurs $\frac{11}{18}$ din traseu, mai are de parcurs 50 km până la kilometrul 182. Află lungimea traseului.

14. Media aritmetică a trei numere este 21, iar media aritmetică a două dintre ele este 22. Află al treilea număr.

15. Se consideră două numere naturale, astfel încât unul este de 4 ori mai mare decât celălalt. Află cele două numere, știind că suma lor este cel puțin egală cu 145 și strict mai mică decât 150.

16. Perimetrul unui dreptunghi este strict mai mic decât 240 m. Știind că lungimea dreptunghiului are 80 m, formează inecuația prin care se află lățimea acestuia și rezolv-o în mulțimea numerelor naturale diferite de zero.

17. Enunță o problemă care se rezolvă cu ecuația $\frac{2}{3} \cdot x = 6$.

18. Enunță o problemă care se rezolvă cu ecuația $x : \frac{4}{5} = 10$.

19. Enunță o problemă care se rezolvă cu ecuația $2x + 5,6 = 34$.

Proiect scratch

Modelează următorul scenariu: Titlul „Ecuaţii”, un personaj spune „Spune-mi, te rog! ce soluţie (cu o singură zecimală) are ecuaţia $3x + 6 = 7x - 4$ *(unde numerele sunt întregi, alese aleatoriu între* -10 *şi* 10*). Şi aşteaptă răspunsul, urmând comentariul adecvat „Bravo !” sau „Of ! Trebuia ...” (urmat de valoarea corectă, la noi ar fi* 2,5*). Precizare – ecuaţia este de forma* $ax + b = cx + d$.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. Ecuația care are soluție un număr întreg este

i)	j)	k)	l)
$\frac{0,(2)x}{3,5} = -\frac{2}{21}$	$\frac{0,(1)x}{3,(5)} = -\frac{2}{21}$	$\frac{0,(1)-x}{3,5} = \frac{2}{21}$	$\frac{0,(1)x}{3,5} = -\frac{2}{21}$

2. Ecuația care nu are soluție pe $\frac{2}{3,(1)}$ este

q)	r)	s)	t)
$14x = 9$	$7x = 4,5$	$9x = 7$	$-28x = -18$

3. Roboțelul Sudi, pornind din punctul de abscisă $\frac{3}{0,(3)}$, face două deplasări identice spre stânga și ajunge în punctul $-\frac{-2}{0,(2)-2}$. După prima deplasare se află în punctul abscisă

o)	p)	q)	r)
3,9375	$-\frac{9}{8}$	9	$\frac{81}{16}$

4. După aplicarea unei măriri, un produl de 3,5lei costă 4,97lei. Mărirea a fost de

t)	u)	v)	w)
40%	42%	44%	38%

5. Un număr este cu 0,4 mai mic decât dublul altuia. Dacă suma lor este – 3,5 atunci cel mai mic este

t)	ț)	u)	v)
– 1,0(3)	– 2,4(6)	$-\frac{31}{30}$	– 4,3(2)

6. Valoarea raportului a două numere este 0,(5). Dacă suma lor este – 4,1, atunci modulul diferenței lor este

i)	j)	k)	l)
$\frac{41}{35}$	$-\frac{41}{35}$	1,17	– 1,16

7. Mulțimea soluțiilor ecuației $x(x+0,1)-\frac{x}{10}=-1$ este

b)	c)	d)	e)
{1}	{0}	{0; 1}	$\varnothing$

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Valoarea de adevăr al enunțului „13 este soluția ecuației $\frac{4}{3}x+1=x+5,(3)$" este ... .

10p **2.** Numărul care, prin adunare cu $1\frac{1}{3}$, dă rezultatul $\frac{7}{3}$ este ... .

10p **3.** Soluția ecuației $\frac{3}{4}x=6$ este ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Soluția ecuației $\frac{1}{7}(x-2,3)=\frac{5}{14}$ este:

a) $\frac{5}{9}$; **b)** $\frac{576}{245}$; **c)** $0,2$; **d)** $4,8$.

10p **2.** Numărul care, adunat cu $2,(3)$, dă rezultatul 4 este:

a) $\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{13}{9}$; **c)** $1,7$; **d)** 2.

10p **3** Dacă triplul unui număr micșorat cu 1,4 este 3,7 atunci numărul este:

a) 2,3; **b)** $0,7(6)$; **c)** $1,7$; **d)** $5,1$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţiile:

a) $\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}=3$; **b)** $|2x+5|=-3$.

10p **2.** Rezolvați, în mulțimea numerelor raționale, ecuația $-\frac{4}{9}(2x-4)=48$.

10p **3.** Un elev a cheltuit într-o excursie $\frac{5}{8}$ din suma de bani pe care o avea la el. Apoi a cheltuit trei cincimi din rest și încă 15 lei. Știind că s-a întors acasă cu 15 lei, aflați ce sumă de bani avea elevul la el.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Dacă $\frac{1}{2}$ este soluția ecuației $x+a=\frac{3}{4}$, atunci a este ... .

10p **2.** Suma dintre opusul numărului $-\frac{3}{8}$ și inversul numărului 8 este … .

10p **3.** Soluția ecuației $x-0,25=1,75+\frac{3}{4}$ este numărul … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Rezolvând ecuația $\frac{3}{5}x+\frac{1}{10}=2$ obținem soluția:

a) $\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{19}{6}$; **c)** $\frac{21}{6}$; **d)** $\frac{2}{9}$.

10p **2.** Numărul care înmulțit cu $5,(3)$ dă rezultatul $-\frac{2}{3}$ este:

a) $\frac{1}{9}$; **b)** $-\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{6}{53}$; **d)** $-\frac{17}{3}$.

10p **3.** Soluția ecuației $\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}=5$ este:

a) $\frac{232}{41}$; **b)** 18; **c)** $\frac{214}{47}$; **d)** $\frac{6}{12}$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Dintr-un depozit a fost distribuită în prima zi 10% din cantitatea de cartofi existentă și a doua zi 20% din cantitatea rămasă. Ştiind că în depozit se mai găsesc 144 kg de cartofi, aflaţi cantitatea iniţială.

10p **2.** Rezolvați, în mulțimea numerelor raționale, ecuația: $9x-5(3x-12)=30$.

10p **3.** Suma a trei numere naturale este 25. Aflați numerele, știind că primul număr este cu 1 mai mic decât o treime din al treilea număr și cel de-al doilea cu trei mai mare decât o cincime din al treilea.

Teme pentru portofoliu

1. Amplifică cu 2, 5 și 7 fiecare număr rațional: $\frac{1}{3};-\frac{2}{5};-\frac{3}{4};\frac{11}{13};\frac{23}{17};\frac{37}{43};-\frac{95}{101};\frac{0}{19}$.

2. Simplifică fracțiile următoare, pentru a obține fracții ireductibile:

$\frac{24}{36};\frac{52}{78};-\frac{26}{39};\frac{14}{49};-\frac{60}{140};\frac{2^7\cdot 3}{256};\frac{2^2\cdot 3^2}{5^2-4^2};\frac{100-64}{3^2\cdot 2}$.

3. Precizează care dintre echivalențele (egalitățile) următoare sunt adevărate:

$\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$; $\frac{-3}{11}=\frac{15}{-55}$; $\frac{6}{5}=\frac{7}{6}$;

$\frac{-3992}{1996}=-\frac{1}{2}$; $\frac{4^3}{2^6}=\frac{3^4}{9^2}$; $\frac{5^2}{75}=\frac{44}{2^2\cdot 11}$.

4. Un ciclist parcurge $\frac{1}{4}$ dintr-o distanță, în prima oră, $\frac{3}{12}$ din distanță, în a doua oră, $\frac{4}{16}$ din distanță, în a treia oră și $\frac{6}{24}$ din distanță, în a patra oră. Compară distanțele parcurse de ciclist în cele patru ore.

5. Copiază, calculează mintal și simplifică rezultatul, când este posibil:

$A=\frac{15}{8}+\frac{13}{8}-\frac{12}{8}$; $B=\frac{11}{7}+\frac{6}{7}-\frac{3}{7}$; $C=\frac{14}{9}+\frac{4}{9}-1$; $D=\frac{23}{6}+\frac{7}{6}-1$.

6. Calculează și verifică rezultatul, aplicând proba operației:

$A=\frac{1}{8}+\frac{5}{4}$; $B=-\frac{11}{25}-\frac{7}{5}$; $C=\frac{16}{21}-\frac{2}{7}$; $D=4+\frac{3}{5}$;

$E = 12 - \frac{4}{15}$; $F = \frac{1}{4} - \frac{3}{20}$; $G = \frac{5}{6} + \frac{2}{7}$; $H = -\frac{3}{5} + \frac{2}{9}$;

$I = 1,(12) - \frac{4}{33}$; $J = 0,4 + 0,1(3)$.

7. Calculează și scrie rezultatul sub formă de număr zecimal:

$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $C = \frac{2}{3} + \frac{1}{15} + \frac{4}{30}$.

8. Calculează cel mai rapid posibil:

$A = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$; $B = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} + \frac{7}{6} + \frac{6}{7}$;

$C = \frac{7}{6} - \frac{7}{3} - \frac{7}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$; $D = \frac{3}{2} - \frac{10}{3} + \frac{9}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7}$.

9. Simplifică fracțiile, când este posibil și apoi calculează:

$A = \frac{13}{24} + \frac{22}{48}$; $B = \frac{7}{5} + \frac{20}{25}$; $C = \frac{49}{35} - \frac{6}{15}$; $D = \frac{18}{21} - \frac{12}{14}$; $E = \frac{12}{12} - \frac{15}{30} + \frac{9}{6}$.

10. Calculează și simplifică rezultatul ori de câte ori este posibil:

$A = \frac{11}{25} \cdot \frac{11}{4}$; $B = \frac{13}{5} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)$; $C = \left(-2\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{3}{50}$; $D = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{8}{15}\right)$

$E = -4 \cdot \frac{17}{20}$; $F = 3\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{55}\right)$.

11. Calculează și verifică rezultatul, făcând proba împărțirii:

a) $\frac{9}{10} : \frac{3}{5}$; **b)** $\frac{1}{8} : \left(-\frac{5}{8}\right)$; **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{11}{12}$; **d)** $\frac{7}{9} : 9$;

e) $\left(-\frac{4}{13}\right) : (-4)$; **f)** $5 : \frac{1}{3}$; **g)** $-18 : \frac{2}{3}$; **h)** $2,4 : 0,3$;

i) $1,6 : \left(-\frac{7}{15}\right)$; **j)** $-2,(3) : \frac{8}{5}$; **k)** $-1,1(3) : \left(-\frac{17}{15}\right)$.

12. Folosește simplificările și calculează produsele următoare:

$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$; $B = \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{21}{8}\right) \cdot \frac{4}{9}$; $C = \left(-\frac{7}{18}\right) \cdot \left(-\frac{15}{14}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot 6$;

$D = \frac{11}{60} \cdot \left(-\frac{18}{7}\right) \cdot \left(-\frac{10}{99}\right) \cdot (-21)$.

13. Calculează cât mai simplu posibil:

$A = 0,5 \cdot 3,27 \cdot 2$; $B = 4,21 \cdot (-1,5) \cdot 6$; $C = -4,5 \cdot 260,6 \cdot (-5)$; $D = (-2,8) \cdot (-1,6) \cdot (-5^2)$.

14. Calculează în două moduri:

$$A=\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{4};\qquad B=\left(\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\right)\cdot\frac{3}{2};\qquad C=-\frac{35}{20}\cdot\left(\frac{11}{14}+\frac{2}{7}\right);$$

$$D=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4};\qquad E=\left(\frac{7}{5}-\frac{4}{15}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right).$$

15. I. Estimează produsul $23,48\cdot 9,75$ prin rotunjire: **a)** la zecimi; **b)** la unități.

II. Determină eroarea fiecăreia dintre estimările **a)** și **b)**.

16. a) Stabilește între ce numere naturale este cuprins produsul $6,8\cdot 2,4$ și apoi verifică rezultatul obținut prin calcul.

b) Estimează produsul $6,8\cdot 2,4$ prin rotunjire la unitate și apoi determină eroarea estimării.

17. Calculează:

$$A=2\cdot\frac{5}{7}:\frac{2}{7};\qquad B=\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{9};\qquad C=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{12}\right):\frac{7}{9};$$

$$D=\left(-\frac{4}{7}\right):\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right):\frac{2}{9};\quad E=\frac{4}{9}:\frac{2,5}{3}\cdot\frac{7}{10}.$$

18. Scrie mai simplu, folosind regulile de calcul cu puteri:

a) $2^5\cdot 2^7:2^{10}$; **b)** $\left(5^2\right)^4:5^7\cdot 5$; **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{27}:\left(\frac{2}{5}\right)^{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$;

d) $\left[\left(\frac{5}{4}\right)^4\right]^3:\left[\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^4\cdot\frac{5}{4}$; **e)** $(-3,5)^{17}:(-3,5)^{15}\cdot(-3,5)$; **f)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-34}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-32}\cdot\frac{3}{2}$;

g) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^7:\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]$.

19. Compară numerele din perechile următoare:

a) 2^{13} și 3^{13}; **b)** 3^{14} și 4^7; **c)** 9^{16} și 2^{32};

d) $\left(-\frac{5}{6}\right)^4$ și $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; **e)** $\left(\frac{4}{9}\right)^5$ și $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; **f)** $(0,(3))^{-2}$ și $(0,(6))^{-2}$

20. Calculează**:**

a) $2,(3)+\left[\left(1,5+\frac{4}{9}\cdot 2\frac{1}{4}\right):\frac{1}{9}+\frac{11}{4}\right]\cdot 4$; **b)** $\frac{1}{2}:0,5:\left[0,2+4\cdot\left(0,(3)+\frac{1}{3}:2\right)\right]+\frac{1}{11}$;

c) $\left[\left(1,5-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}-0,5\right)^2\right]:[1-0,8(3)]$; **d)** $[2+2,(6):0,(4)-1,2:0,3]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

21. Rezolvă în $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{3}{2}y-7=5$; **c)** $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$; **d)** $6x-7,2=0$;

e) $0,8x-4,8=0$; **f)** $\frac{10}{3}x+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$; **g)** $0,(6)\cdot x+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; **h)** $2:x+\frac{1}{2}=1,5$;

i) $0,(6)x-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$; **j)** $2x-1-\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$; **k)** $2+\frac{1}{5}x-x=\frac{5}{2}$;

l) $\frac{3}{4}x+1,2-0,75x=1\frac{1}{5}$; **m)** $1,4x+\frac{3}{2}-\frac{2}{5}x-1=\frac{1}{2}$.

22. Află numărul rațional *a*, pentru care ecuația cu necunoscuta *x* are soluția indicată:

a) $x+3=a$ are soluția 1,5; **b)** $\frac{x}{2}-1=a$ are soluția $\frac{2}{3}$;

c) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=a$ are soluția $\frac{3}{5}$; **d)** $0,2x-\frac{1}{5}=\frac{2}{3}a$ are soluția $\frac{10}{3}$.

23. Rezervorul unui automobil este plin cu combustibil la plecarea în cursă. După un parcurs, deoarece combustibilul consumat reprezintă trei pătrimi din capacitatea rezervorului, automobilul se alimentează cu 20 l de combustibil. După alimentare, combustibilul din rezervor reprezintă șapte optimi din capacitatea acestuia. Află ce fracție din capacitatea rezervorului reprezintă 20 l de combustibil și capacitatea rezervorului.

24. Radu și Victor au un pepene. Radu ia o treime din jumătate de pepene, iar Victor ia $\frac{1}{4}$ din $\frac{2}{3}$ din pepene. Care dintre cei doi are partea mai mare?

25. La un concurs de admitere se prezintă 200 de candidați. Știind că numărul locurilor reprezintă trei pătrimi din numărul candidaților și că, în urma concursului, se ocupă patru cincimi din numărul locurilor, află numărul celor admiși.

Capitolul 5. NOŢIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Unitatea de învățare: Unghiuri

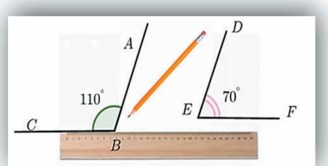
LECȚIA 1. Unghiuri suplementare; unghiuri complementare

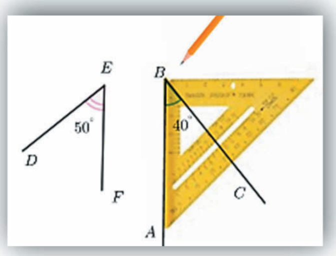
Atenție, începem!

A1. a) Indicați (precizând poziția, de la stânga la dreapta) ceasurile ale căror limbi care indică ora și minutul formează unghiuri: drepte, ascuțite, obtuze, alungite, respectiv nule;

b) Priviți ceasurile la care limbile care indică ora și minutul formează unghiuri drepte (cu măsura de 90°), respectiv unghiuri alungite (cu măsura de 180°). Observați că secundarul formează cu acestea câte două unghiuri pentru care suma măsurilor este de 90°, respectiv de180°. Cum se numesc două unghiuri pentru care suma măsurilor este de 90° şi cum se numesc două unghiuri pentru care suma măsurilor este de 180°?

A2. a) Construiți pe caiet, urmând indicațiile din figurile alăturate, suplementul, respectiv complementul unghiului *ABC* și arătați că este congruent cu unghiul *DEF*.



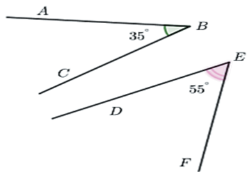


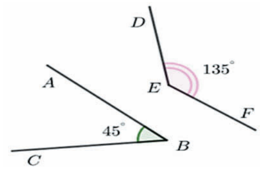
c) Ce proprietate au unghiurile cu același suplement sau cu același complement ?

Ce ne învață teoria?

1. Unghiurile alungite și unghiurile nule sunt ***unghiuri improprii***. Oricare unghi diferit de unghiul alungit sau de unghiul nul este ***unghi propriu***.
2. Două unghiuri cu suma măsurilor egală cu 90° se numesc ***unghiuri complementare*** (fiecare dintre cele două unghiuri este ***complementul*** celuilalt).
3. Două unghiuri cu suma măsurilor egală cu 180° se numesc ***unghiuri suplementare*** (fiecare dintre cele două unghiuri este ***suplementul*** celuilalt).

***Exemple*:**

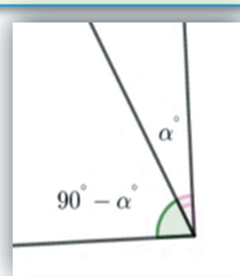




a) $\sphericalangle B + \sphericalangle E = 35° + 55° = 90°$; **b)** $\sphericalangle B + \sphericalangle E = 45° + 135° = 180°$

4. ***Dacă două unghiuri ascuțite sunt congruente, atunci și complementele lor sunt congruente.***

Demonstrație. Într-adevăr, dacă măsura celor două unghiuri congruente este de α^o, atunci măsura fiecărui complement este de $90^o - \alpha^o$, deci și complementele sunt congruente.



În același mod se justifică și proprietatea reciprocă: ***Dacă două unghiuri ascuțite au complementele congruente, atunci și ele sunt congruente.***

5. ***Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci și suplementele lor sunt congruente.***
Reciproc: ***Dacă două unghiuri au suplementele congruente, atunci și ele sunt congruente.***

Să vedem ce am înțeles

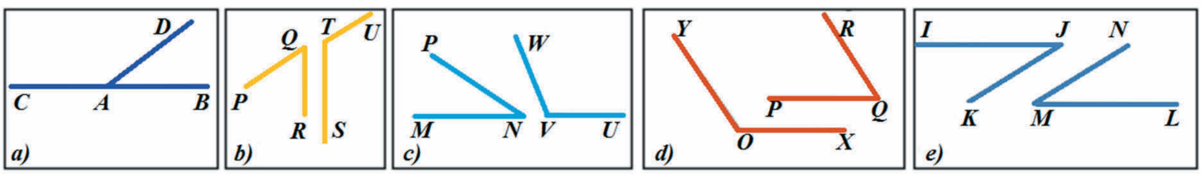
1. Să calculăm măsura complementului unui unghi de măsură: 12^o, 24^o, 30^o, 45^o, 60^o, 66^o, 78^o, apoi să calculăm măsura suplementului unui unghi de măsură: 20^o, 160^o, 45^o, 135^o, 60^o, 120^o, 30^o, 150^o.
2. Să găsim unghiul care are aceeaşi măsură ca şi complementul / suplementul său.

Învățăm să rezolvăm

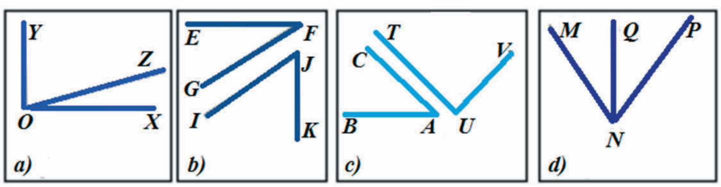
1. Unghiurile A și B sunt complementare, iar măsura unghiului B este cu 15^o mai mare decât măsura unghiului A. Determinați măsurile unghiurilor A și B.
***Rezolvare*:** Unghiurile A și B sunt complementare, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$ (1). Cum $\sphericalangle B = \sphericalangle A + 15°$, prin înlocuirea în (1), obținem $\sphericalangle A + \sphericalangle A + 15° = 90° \Rightarrow 2 \cdot \sphericalangle A = 75° \Rightarrow \sphericalangle A = 37°30'$ și $\sphericalangle B = 37°15' + 15° = 52°30'$.
2. Unghiurile M și N sunt suplementare, iar măsura unghiului N este de 4 ori mai mare decât măsura unghiului M. Determinați măsurile unghiurilor M și N.
***Rezolvare*:** Unghiurile M și N sunt suplementare, adică $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180°$ (1).
Cum $\sphericalangle N = 4 \cdot \sphericalangle M$, prin înlocuirea în (1), obținem $\sphericalangle M + 4 \cdot \sphericalangle M = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \cdot \sphericalangle M = 180° \Rightarrow \sphericalangle M = 36°$ și $\sphericalangle N = 4 \cdot 36° = 144°$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Scrie perechile de unghiuri complementare, știind că: $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle D = 25°30'$, $\sphericalangle E = 45°$, $\sphericalangle F = 64°30'$, $\sphericalangle G = 34°27'$ și $\sphericalangle H = 55°33'$.
2. Scrie perechile de unghiuri suplementare, știind că: $\sphericalangle A = 120°$, $\sphericalangle B = 37°40'$, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle D = 85°48'$, $\sphericalangle E = 142°20'$ și $\sphericalangle F = 94°12'$.
3. Unghiurile din perechile: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle P$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle Q$, respectiv $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle R$ sunt complementare. Află măsurile unghiurilor *P*, *Q* și *R*, știind că: $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 42°$, $\sphericalangle C = 37°43'$.
4. Unghiurile din perechile $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle U$, $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle V$, respectiv $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle W$ sunt suplementare. Află măsurile unghiurilor *U, V* și *W*, știind că: $\sphericalangle M = 120°$, $\sphericalangle N = 150°$, $\sphericalangle P = 165°34'$.
5. Unghiurile *ABC* și *CBD* sunt complementare și au aceeași măsură *x*. Află măsura *x*, comună unghiurilor *ABC* și *CBD*.
6. Unghiurile *BAC* și *CAD* sunt suplementare și au aceeași măsură *y*. Află măsura *y*, comună unghiurilor *BAC* și *CAD*.
7. Unghiurile *A* și *B* au același suplement, unghiul *M*. Știind că $\sphericalangle M = 128°$, află măsurile unghiurilor *A* și *B*. Ce poți afirma despre două unghiuri care au același suplement?
8. Unghiurile *C* și *D* au același complement, unghiul *P*. Știind că $\sphericalangle P = 27°35'$, află măsurile unghiurilor *C* și *D*. Ce poți afirma despre două unghiuri care au același complement?
9. Unghiurile *A* și *B* sunt suplementare, iar măsura unghiului *B* este cu 45° mai mare decât măsura unghiului *A*. Află măsurile unghiurilor *A* și *B*.
10. Unghiurile *P* și *Q* sunt complementare, iar raportul măsurilor unghiurilor *P* și *Q* este $\frac{2}{3}$. Află măsurile unghiurilor *P* și *Q*.
11. Identifică perechile de unghiuri suplementare din figurile următoare:



12. Identifică perechile de unghiuri complementare din coniguraţiile următoare:



13. Unghiurile din perechile *A* și *M*, respectiv *B* și *N* sunt suplementare, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle B = x$. Demonstrează că $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N$.
14. Formulează aceeași problemă pentru perechile de unghiuri complementare *C* și *P*, respectiv *D* și *Q*.
15. Arată că, dacă două unghiuri sunt complementare, atunci ele sunt unghiuri ascuțite.

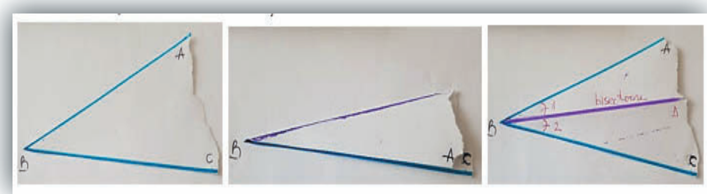
LECȚIA 2. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi

Atenție, începem!

A1. **a)** Indicați (precizând poziția, de la stânga la dreapta) ceasurile la care secundarul din interiorul unghiului format de limbile care indică ora și minutele, formează cu acestea două unghiuri situate de o parte şi alta a sa şi precizaţi cum se numesc aceste perechi de unghiuri proprii astfel formate;

b) Indicați ceasurile la care unghiurile formate de secundar cu limbile care indică ora şi minutele, sunt unghiuri adiacente complementare şi respectiv unghiuri adiacente suplementare;
c) Identificați ceasul la care cele două unghiuri adiacente formate de secundar cu limbile care indică ora şi minutele au măsurile egale. Cum se numeşte, în acest caz, semidreapta secundar pentru unghiul format de limbile care indică ora și minutele?

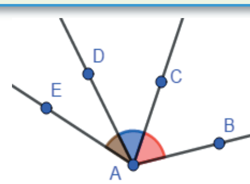
A2. Prin plierea hârtiei, astfel încât laturile unghiului *ABC* să se suprapună, se obţine semidreapta *BD*, cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului şi care formează cu laturile acestuia, unghiurile adiacente *ABD* şi *CBD* de măsuri egale. Este *BD* bisectoarea unghiului *ABC*? **a)** Care este poziția semidreptei *BD* față de unghiul *ABC*? **b)** Comparați unghiurile *ABD* și *CBD*.



Ce ne învață teoria?

1. Două unghiuri proprii, care au
- același vârf,
- o latură comună şi
- celelalte două laturi de o parte şi de alta a dreptei suport pentru latura comună, se numesc ***unghiuri adiacente.***

Exemplu: În figura alăturată unghiurile *BAC* și *CAD* sunt adiacente, *CAD* și *DAE* sunt tot adiacente. Dar unghiurile *BAC* și *DAE* nu sunt adiacente, deoarece nu au o latură comună.



2. *Bisectoarea* unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul unghiului şi care formează unghiuri congruente cu laturile acestuia.

***Exemplu*:** În figura 1, semidreapta *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*.

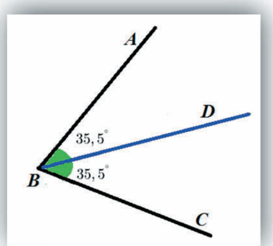


Fig. 1

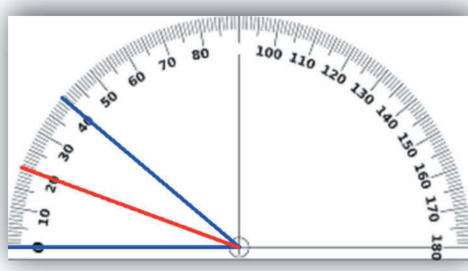


Fig. 2

3. Construcția bisectoarei unui unghi cu ajutorul raportorului (figura 2)

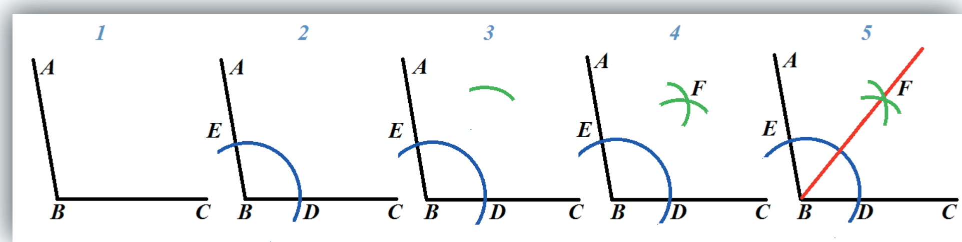
- Măsurăm unghiul ($40°$);
- Calculăm jumătate din măsură, așezând raportorul ca în figura 2) ($20°$), adică marcăm punctul din dreptul măsurii înjumătățite;
- Cu ajutorul riglei, construim semidreapta din vârul unghiului ce trece prin acest punct.

Să vedem ce am înțeles

4. Construcția bisectoarei unui unghi cu rigla negradată şi cu compasul

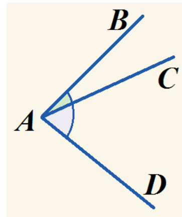
Să construim bisectoarea cu rigla şi compasul.

1. Să desenăm unghiul propriu *ABC*.
2. Cu acul compasului în *B*, să trasăm un arc care taie laturile unghiului în *D* şi *E*.
3. Cu acul compasului în *D*, trasăm un arc în interiorul unghiului.
4. Cu acul compasului în *E* (şi aceeaşi deschidere a compasului), tăiem ultimul arc, în *F*.
5. Unim *B* cu *F* şi am obţinut bisectoarea unghiului *ABC*. Să verificăm cu compasul.



Învățăm să rezolvăm

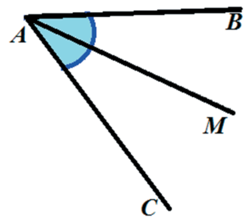
1. Se consideră unghiurile adiacente *BAC* și *CAD*, astfel încât $\sphericalangle BAD = 80°$. Știind că $\sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$, determinați măsurile unghiurilor *BAC* și *CAD*.



Ipoteză: $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD$ adiacente; $\sphericalangle BAD = 80°; \sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$.

Concluzie: $\sphericalangle BAC = ?; \sphericalangle CAD = ?$

Demonstrație: $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD$ adiacente $\Longrightarrow$ $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD \Longrightarrow$ $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = 80°$. Înlocuim în această relație $\sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$ și obținem $\sphericalangle BAC + 3 \cdot \sphericalangle BAC = 80° \Rightarrow \sphericalangle BAC = 20°$ și $\sphericalangle CAD = 3 \cdot 20° = 60°$.



2. Se consideră $\sphericalangle BAC = 76°$ și bisectoarea acestuia AM. Aflați măsura unghiului format de bisectoarea AM cu una dintre laturile unghiului.

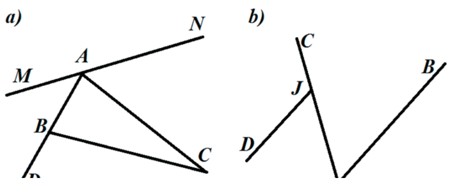
Ipoteză: $\sphericalangle BAC = 76°$; AM bisectoarea $\sphericalangle BAC$.

Concluzie: $\sphericalangle BAM = ?$

Demonstrație:

AM bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \dfrac{\sphericalangle BAC}{2} = \dfrac{76°}{2} = 38°$.

Acum să rezolvăm singuri!



1. Scrie perechile de unghiuri adiacente din configurațiile reprezentate în figura 1.

2. Explică de ce perechile de unghiuri CAM și CBN, respectiv BAD și CAD din figura 2, nu sunt adiacente.

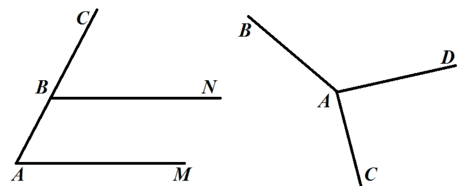


Figura 2

3. Construiește unghiurile adiacente BAC și CAD, dacă:

a) $\sphericalangle BAC = 20°; \sphericalangle CAD = 35°$;

b) $\sphericalangle BAC = 115°; \sphericalangle CAD = 57°$.

4. Construiește unghiurile adiacente complementare XOU și UOY, știind că:

a) $\sphericalangle XOU = 50°$; **b)** $\sphericalangle UOY = 75°$; **c)** $\sphericalangle XOU = \sphericalangle UOY$.

5. Construiește unghiurile adiacente suplementare AIC și CIB, știind că:

a) $\sphericalangle AIC = 75°$; **b)** $\sphericalangle CIB = 120°$; **c)** $\sphericalangle AIC = \sphericalangle CIB$.

6. Dacă unghiurile XOY și YOZ sunt adiacente suplementare, ce poți afirma despre punctele X, O și Z?

7. Construiește bisectoarea unghiului BAC, știind că:

a) $\sphericalangle BAC = 84°$; **b)** $\sphericalangle BAC = 45°$; **c)** $\sphericalangle BAC = 90°$

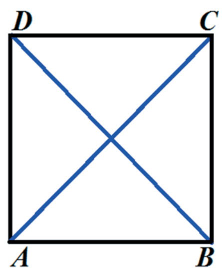


Figura 3

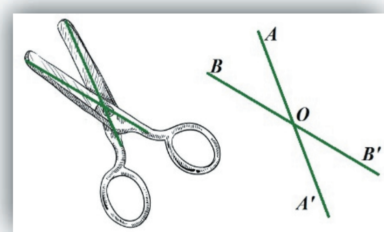
8. Construiește un unghi XOY, știind că bisectoarea sa OI formează cu latura: **a)** OX un unghi cu măsura de 30°; **b)** OY un unghi cu măsura de 27°; **c)** OY un unghi cu măsura de 45°.

9. Observă pătratul $ABCD$ din desenul alăturat și precizează dacă: **a)** AD este bisectoarea unghiului BAD; **b)** CA este bisectoarea unghiului BCD; **c)** BD este bisectoarea unghiului ABC; **d)** DB este bisectoarea unghiului ADC. Verifică afirmațiile, măsurând unghiurile cu raportorul.

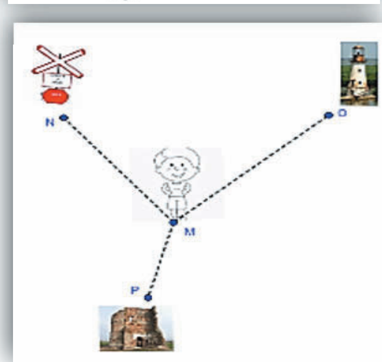
LECȚIA 3. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct

Atenție, începem!

A1. a) Priviți foarfeca deschisă, precizați câte perechi de unghiuri congruente, cu același vârf, s-au format și pozițiile laturilor unghiurilor din aceeași pereche.



b) Dreptele AA' și BB' concurente în O, determină perechile de unghiuri congruente AOB și $A'OB'$, respectiv AOB' și $A'OB$, cu proprietatea că laturile unuia dintre unghiuri sunt semidreptele opuse semidreptelor care formează celălalt unghi din pereche. Cum se numesc perechile de unghiuri cu această proprietate?



A2. Dan, aflat în punctul M, trasează trei semidrepte imaginare, de origine M și extremități punctele: N (semnalizatorul de cale ferată), O (un far) și P (ruinele unei biserici). Numiți cele trei unghiuri astfel formate și precizați:
a) dacă interioarele oricărei perechi dintre cele trei unghiuri, au puncte comune; **b)** dacă reuniunea celor trei unghiuri cu interioarele lor este întreg planul; **c)** cum se numesc unghiurile care îndeplinesc condițiile: au același vârf; două câte două nu au puncte interioare comune; reuniunea cu interioarele lor este întreg planul; **d)** cu cât este egală suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct ?

Ce ne învață teoria?

1. Două unghiuri cu același vârf și cu laturile perechi de semidrepte opuse se numesc ***unghiuri opuse la vârf***.

***Exemplu*:** În figura de la **A1**, unghiurile AOB și $A'OB'$ sunt opuse la vârf.

2. ***Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente***.

Justificare: Într–adevăr, dacă unghiurile AOB și $A'OB'$ sunt opuse la vârf, atunci perechile: OA și OA', respectiv OB și OB', sunt de semidrepte opuse. Deci, perechile de unghiuri: AOB și AOB', respectiv AOB' și $A'OB'$ sunt de unghiuri suplementare. Cum unghiurile AOB și $A'OB'$ au același suplement, ele sunt congruente.

3. Trei sau mai multe unghiuri cu același vârf, fără puncte interioare comune și care reunite cu interioarele lor dau întreg planul, se numesc ***unghiuri în jurul unui punct***.

Exemplu: Unghiurile *OMP*, *PMN*, *NMO* din desenul de la **A2** sunt unghiuri în jurul punctului *M*.

4. *Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu 360º*.

Să vedem ce am înțeles

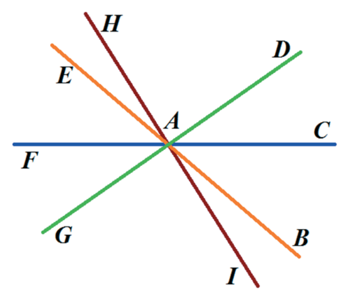
Pentru figura alăturată, să scriem:

a) Perechi de unghiuri opuse la vârf;

b) Triplete de unghiuri formate în jurul unui punct;

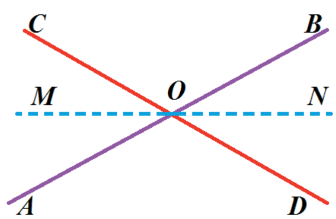
c) Perechi de unghiuri care nu sunt opuse la vârf;

d) Cvartete de unghiuri care nu sunt unghiuri în jurul unui punct.



Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră unghiurile *AOC* și *BOD* opuse la vârf. Dacă *OM* este bisectoarea unghiului *AOC* și *ON* este semidreapta opusă lui *OM*, arătați că *ON* este bisectoarea unghiului *BOD*.



Ipoteză: $\sphericalangle AOC, \sphericalangle BOD$ opuse la vârf; *OM* bisectoarea $\sphericalangle AOC$; *OM* și *ON* semidrepte opuse.

Concluzie: *ON* este bisectoarea $\sphericalangle BOD$.

Demonstrație: $\sphericalangle AOC, \sphericalangle BOD$ opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$;

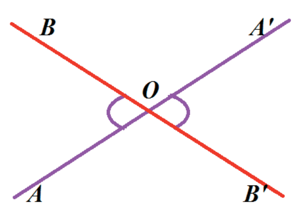
Dacă *OM* bisectoarea $\sphericalangle AOC \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MOC$ (1).

OM și *ON* semidrepte opuse $\Rightarrow$ punctele *M, O, N* coliniare și $\sphericalangle AOM$, $\sphericalangle BON$ opuse la vârf. Deci $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BON$ (2). Analog se arată că $\sphericalangle MOC \equiv \sphericalangle NOD$ (3).
Din relațiile (1), (2) și (3) obținem $\sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOD \Rightarrow$ *ON* este bisectoarea $\sphericalangle BOD$.

2. Fie *O* un punct situat pe segmentul *AA'* și *B,B'* două puncte de o parte și de alta a dreptei *AA'*.

a) Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$, atunci semidreptele *OB* și *OB'* sunt opuse;

b) Dacă două unghiuri congruente *AOB* și *A'OB'* au laturile *OA, OA'* semidrepte opuse, iar *OB, OB'* sunt de o parte și de alta a dreptei *AA'*, atunci cele două unghiuri sunt opuse la vârf.



Ipoteză: **a)** $O \in AA'$; *B*, *B'* de o parte și de alta a dreptei *AA'*; $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$; **b)** $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$; *OA*, *OA'* semidrepte opuse; *OB*, *OB'* de o parte și de alta a dreptei *AA'*.

Concluzie: **a)** *OB*, *OB'* semidrepte opuse; **b)** $\sphericalangle AOB, \sphericalangle A'OB'$ sunt opuse la vârf.

***Demonstrație*: a)** $\sphericalangle A'OB' + \sphericalangle BOA' = 180° \Rightarrow \sphericalangle BOB' = 180°$. Deci OB, OB' sunt semidrepte opuse. **b)** aceeași rezolvare ca la punctul **a).**

Observație: Aceste enunțuri formează ***teoremele reciproce ale unghiurilor opuse la vârf****.*

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Observă configurațiile din figura 1 și selectează afirmațiile adevărate:

a) Unghiurile *AOB* și *A'OB'* sunt opuse la vârf;

b) Unghiurile *ETD* și *FTC* sunt opuse la vârf;

c) Unghiurile *AOB'* și *A'OB* nu sunt opuse la vârf;

d) Unghiurile *ETF* și *CTD* nu sunt opuse la vârf.

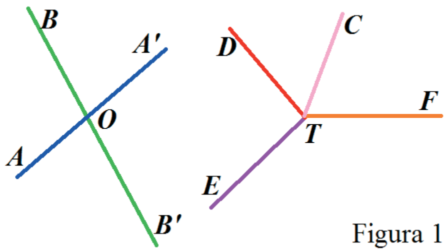


Figura 1

2. Observă figura 2 și selectează afirmațiile adevărate:

a) unghiurile *AOB, BOC, COD, DOE* și *AOE* sunt unghiuri în jurul unui punct;

b) unghiurile *AOB, BOC, COD* și *DOE* nu sunt unghiuri în jurul unui punct;

c) unghiurile *AOB, BOD* și *AOE* nu sunt unghiuri în jurul unui punct;

d) unghiurile *AOC, COE* și *AOE* sunt unghiuri în jurul unui punct;

e) unghiurile *AOC, BOD, DOE* și *AOE* sunt unghiuri în jurul unui punct.

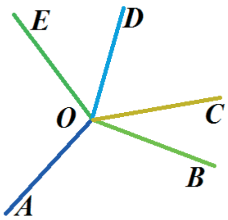


Figura 2

3. a) Reprodu în caiet desenul alăturat (figura 3);

b) Scrie unghiul opus la vârf unghiului *AOC*, apoi scrie încă trei perechi de unghiuri opuse la vârf;

c) Determină măsurile unghiurilor *FOD, COF* și *AOD;*

d) Trasează bisectoarele unghiurilor *AOC* și *BOC* și arată că acestea formează un unghi drept.

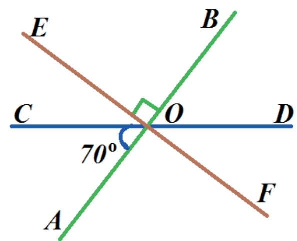
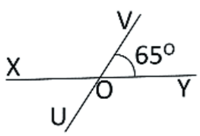


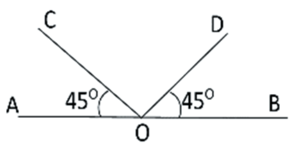
Figura 3

★★

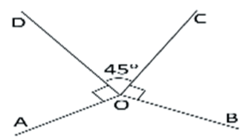
4. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsurile unghiurilor *XOU* și *XOV*.



5. Cu notațiile din desenul alăturat, determină măsura unghiului *COD*.



6. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsura



unghiului *AOB*.

7. În triunghiul *ABC*, punctul *M* aparține laturii *BC*, astfel încât $\sphericalangle BAM = 28°$ și $\sphericalangle MAC = 52°$. Bisectoarea unghiului *BAM* intersectează latura *BC* în punctul *D*, iar bisectoarea unghiului *MAC* intersectează latura *BC* în punctul *E*. Află măsura unghiului *DAE*.

★★★

8. În triunghiul *BAC*, punctul *M* aparține laturii *BC*. Trasează bisectoarele unghiurilor *AMB* și *AMC* și arată că acestea formează un unghi drept.

9. Măsurile a trei unghiuri în jurul unui punct sunt direct proporționale cu numerele 7, 11 și 12. Află măsurile celor trei unghiuri.

Proiect scratch

Modelează următorul scenariu: Titlul „Unghiuri”, un personaj folosind deplasările desenează o pereche de unghiuri opuse la vârf şi spune „Acestea sunt unghiuri opuse la vârf ”. Apoi şterge desenul şi repetă cu unghiuri adiacente.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6	7

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză:

1. Complementul unghiului cu măsura de 80^o are măsura de

a)	b)	c)	d)
6^o	16^o	176^o	166^o

2. Bisectoarele a două unghiuri adiacente cu măsurile de 74^o și, respectiv 16^o formează un unghi cu măsura de

s)	t)	u)	v)
45^o	29^o	16^o	34^o

3. Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf formează un unghi

a)	b)	c)	d)
ascuțit	nul	alungit	propriu

4. O semidreaptă inclusă în interiorul unui unghi și cu originea în vârful unghiului, formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsurile 42^o, respectiv 17^o. Atunci măsura unghiului este

s)	t)	u)	v)
48^o	73^o	59^o	123^o

5. O semidreaptă inclusă în exteriorul unui unghi, cu originea în vârful unghiului, formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsurile 152^o, respectiv 143^o. Atunci măsura unghiului este

t)	ț)	u)	v)
275^o	65^o	95^o	9^o

6. Suma măsurilor suplementelor a două unghiuri este 148°. Atunci suma măsurilor unghiurilor este

g)	h)	i)	j)
360°	32°	212°	90°

7. Diferența dintre măsura suplementului unui unghi și a complementului altui unghi este de 137°. Diferența măsutilor celor două unghiuri este

t)	u)	v)	w)
47°	147°	223°	43°

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

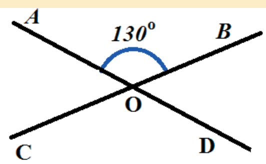
I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Dacă două unghiuri au suma măsurilor egală cu 180°, acestea se numesc ... .

10p **2.** Două unghiuri cu același vârf și care au laturile în prelungire se numesc ... .

10p **3.** Bisectoarea unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia și care formează cu laturile unghiului inițial ....

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.



10p **1.** Unghiurile AOC și BOD din figura alăturată sunt:
a) obtuze; **b)** opuse la vârf;
c) adiacente; **d)** drepte.

10p **2.** Suplementul unghiului AOD are măsura de:
a) 50°; **b)** 60°; **c)** 40°; **d)** 130°.

10p **3.** Bisectoarea unghiului BOD formează cu semidreapta OD un unghi de:
a) 50°; **b)** 65°; **c)** 25°; **d)** 35°.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

5p **1.** **a)** Se consideră două unghiuri adiacente, suplementare AOB și BOC. Determinați măsurile celor două unghiuri știind că măsura unghiului AOB este de două ori mare decât măsura unghiului BOC.
5p **b)** Desenați cele două unghiuri și bisectoarele acestora și determinați măsura unghiului format de acestea.

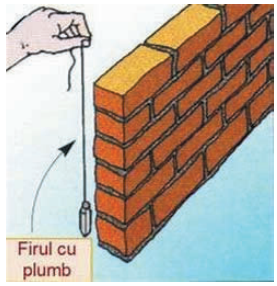
10p **2.** Se consideră dreapta AB, punctul O situat între A și B și punctele P și Q de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\sphericalangle POB = 81^\circ$, iar $\sphericalangle BOQ = 99^\circ$. Realizați desenul și aflați măsura unghiului AOQ.

10p **3.** Se consideră perechile de unghiuri adiacente: AOB, BOC, respectiv BOC și COD. Știind că $\sphericalangle AOB = 72^\circ 10'$ și $\sphericalangle COD = 65^\circ 20'$, aflați măsura unghiului BOC, astfel încât punctele A, O și D să fie coliniare și realizați desenul corespunzător.

Unitatea de învățare: Perpendicularitate

LECȚIA 4. Drepte perpendiculare în plan. Mediatoarea unui segment

Atenție, începem!

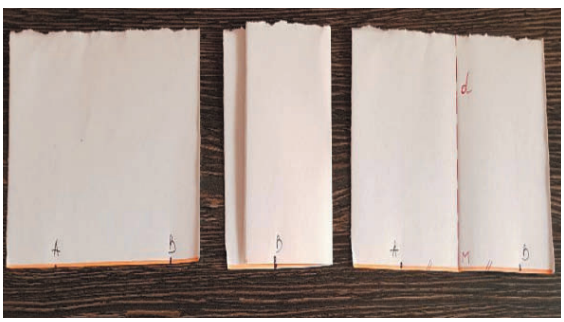


A1. În imaginea alăturată, firul cu plumb formează cu linia de bază a zidului un unghi drept și este folosit pentru a determina verticalitatea acestuia, iar dreptele de pe tapetul aplicat pe perete formează patru unghiuri drepte în jurul unui punct.

a) Cum se numesc două drepte concurente care formează un unghi drept?

b) Cum se numesc două drepte care nu sunt perpendiculare?

A2. Trasați o dreaptă *d*, considerați un punct *M* nesituat pe dreapta *d* și un punct *N* situat pe dreapta *d*. Cu ajutorul unui echer care are un unghi drept, duceți perpendicularele prin *M* și, respectiv, prin *N* pe *d*. Câte perpendiculare se pot duce printr-un punct la o dreaptă? Cum se numește punctul de intersecție a perpendicularei cu dreapta *d*?



A3. Pe lungimea unei coli *A*4, marcați două puncte, *A* și *B,* ca în imaginea dată și pliați foaia, astfel încât punctele *A* și *B* să se suprapună după îndoire. Notați cu *d* dreapta după care ați realizat plierea și cu *M* intersecția dreptelor *d* și *AB*.

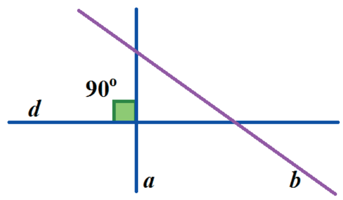
a) Precizați poziția dreptelor *d* și *AB*, una față de cealaltă, și poziția punctului *M* pe segmentul *AB*;

b) Cum se numesc punctele *A* și *B* situate de o parte și de alta a dreptei *d*, dacă dreptele *d* și *AB* sunt perpendiculare, iar punctul lor de intersecție este mijlocul lui *AB*? Mijlocul *M* al segmentului *AB* este centrul de simetrie al capetelor segmentului?

c) Cum se numește perpendiculara pe mijlocul unui segment? Este mediatoarea unui segment axa de simetrie a segmentului?

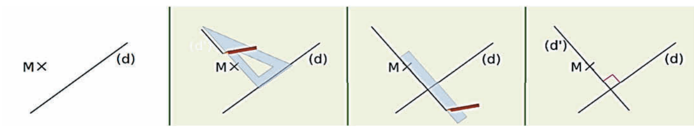
Ce ne învață teoria?

1. Două drepte concurente și care formează un unghi de **90°** se numesc ***drepte perpendiculare***. Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.
2. Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc ***oblice***.



Exemplu: Dacă dreptele a și d sunt perpendiculare, notăm $a \perp d$.

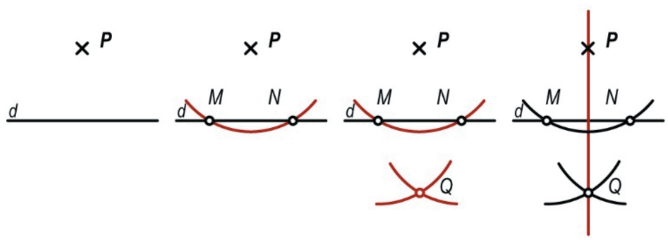
3. Construcții geometrice



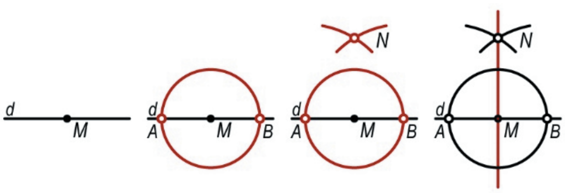
Construcția cu echerul și cu rigla a unei perpendiculare dintr-un punct exterior pe o dreaptă

Pasul 1. Așezăm echerul, astfel încât una dintre laturile unghiului drept să fie pe dreapta d şi cealaltă să fie pe punctul M.
Pasul 2. Trasăm dreapta care conține punctul M.
Pasul 3. Continuăm dreapta dincolo de M, cu ajutorul unei rigle.
Pasul 4. Notăm cu P punctul de intersecţie a perpendicularei cu dreapta d , pe care îl numim ***piciorul perpendicularei***. Lungimea segmentului MP este ***distanţa de la punctul M la dreapta d***.*Observație*: Analog se construiește perpendiculara într-un punct al dreptei d.

Construcția cu compasul și cu rigla negradată a unei perpendiculare dintr-un punct exterior pe o dreaptă



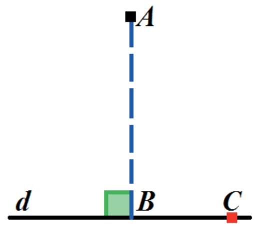
Pasul 1. Cu acul compasului în P construim un arc de cerc care intersectează dreapta d în punctele M și N.
Pasul 2. Cu acul compasului în M și N și cu aceeași deschidere a compasului trasăm două arce de cerc care se intersectează în Q.
Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta PQ, perpendiculara din P pe d.
Pasul 4. Notăm perpendiculara cu d' și marcăm unghiul drept.



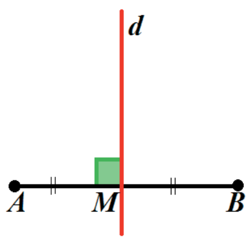
Construcția cu compasul și cu rigla negradată a unei perpendiculare pe o dreaptă într-un punct al ei

Pasul 1. Construim un cerc cu centrul în punctul M și care intersectează dreapta d în punctele A și B.
Pasul 2. Cu centrele în A și B și cu aceeași deschidere a compasului trasăm două arce de cerc care se intersectează în N.
Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta MN, perpendiculara în M pe d.
Pasul 4. Notăm perpendiculara cu d' și marcăm unghiul drept.

4. *Distanța de la un punct exterior la o dreaptă* este lungimea segmentului determinat de punct și de piciorul perpendicularei din punct pe dreaptă.
Distanța de la un punct al dreptei la dreaptă este egală cu 0



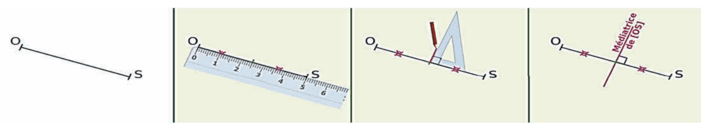
***Exemplu*:** Considerăm punctele: $A \notin d$, $C \in d$. Dacă $AB \perp d$, $B \in b$, B se numește piciorul perpendicularei din A pe dreapta d. Distanța de la A la dreapta d este $d(A,d) = AB$, $d(C,d) = 0$.



5. *Mediatoarea unui segment* este dreapta perpendiculară pe segment şi care trece prin mijlocul său.

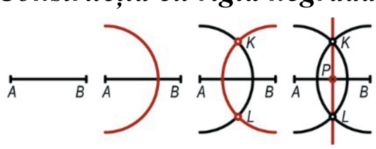
***Exemplu*:** Dreapta d perpendiculară pe segmentul AB, în mijlocul M al acestuia, este mediatoarea acestui segment.

6. Construcții geometrice
Construcția cu rigla și echerul a mediatoarei unui segment



Pasul 1. Considerăm un segment OS de lungime dată, căruia îi marcăm mijlocul M.
Pasul 2. Construim, cu echerul, perpendiculara pe segmentul OS, în punctul M.
Pasul 3. Prelungim mediatoarea cu ajutorul unei rigle.
Pasul 4. Notăm mediatoarea, marcăm unghiul drept și segmentele congruente.

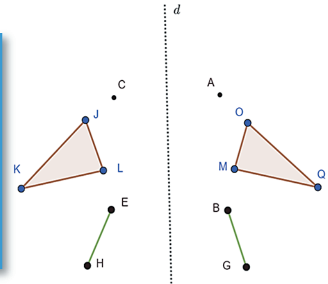
Construcția cu rigla negradată și compasul a mediatoarei unui segment



Pasul 1. Considerăm un segment AB şi trasăm un arc de cerc cu centrul în punctul A.
Pasul 2. Cu aceeași deschidere a compasului, trasăm un arc de cerc cu centrul în B. *Dacă cele două arce de cerc nu se intersectează în două puncte distincte, atunci refacem construcția cu o deschidere mai mare a compasului.*
Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta determinată de cele două puncte de intersecție ale arcelor.

Pasul 4. Notăm mediatoarea, marcăm unghiul drept și segmentele congruente.

7. Două puncte sunt ***simetrice în raport cu o dreaptă***, numită ***axă de simetrie***, dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.
8. Două ***figuri geometrice sunt simetrice în raport cu o dreaptă***, dacă simetricul fiecărui punct al unei figuri aparține celeilalte.



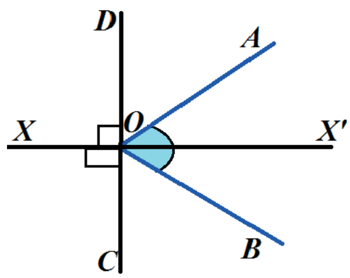
***Exemple*:** Punctele A și C, triunghiurile JKL și OQM, segmentele EH și BG sunt simetrice în raport cu dreapta d.

Să vedem ce am înțeles

Folosind numai rigla (negradată) şi compasul, să desenăm cu grijă:
- Trei puncte A, B, C diferite şi nesituate pe aceeaşi dreaptă.
- Mediatoarea segmentului AB şi perpendiculara din C pe AB. Mediatoarea segmentului AB şi perpendiculara din C pe AB sunt paralele?
- Mediatoarea segmentului AC şi notăm cu O intersecţia mediatoarelor segmentelor AB şi AC;
- Perpendiculara din O pe BC.

Învățăm să rezolvăm

1. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit, OX bisectoarea sa și OX' semidreapta opusă acesteia. Prin O se duce perpendiculara pe OX pe care se iau punctele C și D, astfel încât O este situat între C și D, cu semidreptele OC și OB de aceeași parte a dreptei OX. Comparați:



a) $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$; **b)** $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; **c)** $\sphericalangle AOX'$ și $\sphericalangle BOX'$.

Ipoteză: $\sphericalangle AOB$ ascuțit; OX bisectoarea $\sphericalangle AOB$; OX și OX' semidrepte opuse; $OC \perp OX : D \in OC$, O între C și D.

Concluzie: **a)** $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$; **b)** $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; **c)** $\sphericalangle AOX'$ și $\sphericalangle BOX'$.

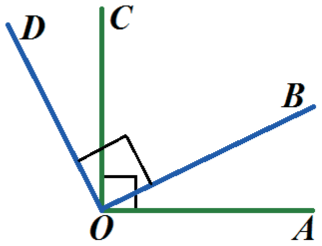
Demonstrație:

a) $OC \perp OX \Rightarrow \sphericalangle DOX = \sphericalangle COX = 90° \Rightarrow \sphericalangle AOD = \sphericalangle DOX - \sphericalangle AOX = 90° - \sphericalangle AOX$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COX - \sphericalangle BOX = 90° - \sphericalangle BOX$, dar OX bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$.

b) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COX + \sphericalangle AOX = 90° + \sphericalangle AOX$ și $\sphericalangle BOD = \sphericalangle DOX + \sphericalangle BOX = 90°$, iar $\sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

c) $\sphericalangle AOX' = \sphericalangle XOX' - \sphericalangle AOX = 180° - \sphericalangle AOX$ și $\sphericalangle BOX' = \sphericalangle XOX' - \sphericalangle BOX = 180° - \sphericalangle BOX$, iar $\sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle AOX' = \sphericalangle BOX'$.

2. Demonstrați că două unghiuri cu același vârf și cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente dacă ambele sunt ascuțite sau obtuze.



Ipoteză: $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ ascuțite sau obtuze;

$OC \perp OA$; $OD \perp OB$.

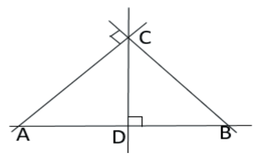
Concluzie: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Demonstrație: Considerăm desenul alăturat unde unghiurile sunt ascuțite și avem: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD = \sphericalangle BOD - \sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BOC$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Dacă ambele unghiuri sunt obtuze, avem: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = 90^\circ + \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD = \sphericalangle BOD + \sphericalangle BOC = 90^\circ + \sphericalangle BOC$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Reprodu desenul alăturat, scrie perechile de drepte perpendiculare și perechile de drepte oblice.

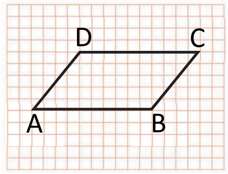


2. Desenează o dreaptă *d*, un punct *A* pe această dreaptă şi un punct *B* exterior ei. **a)** Construiește cu ajutorul echerului perpendicularele în *A* şi din *B,* pe dreapta *d*; **b)** Construiește un punct care se află la distanţa de 3,5 cm de dreapta *d*.

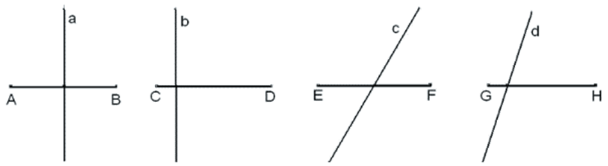
3. **a)** Desenează un pătrat și scrie patru perechi de drepte perpendiculare corespunzătoare desenului realizat. Trasează diagonalele pătratului și precizează poziția acestora, una față de cealaltă și poziția lor față de laturile pătratului;
b) Desenează un dreptunghi și scrie patru perechi de drepte perpendiculare corespunzătoare desenului realizat. Trasează diagonalele dreptunghiului și precizează poziția acestora, una față de cealaltă, și poziția lor față de laturile dreptunghiului;
c) Desenează un cub *ABCDA'B'C'D'*. Determină distanța de la punctul *A* la dreapta *BC*, de la punctul *A'* la dreapta *AB*, de la punctul *C* la dreapta *DD'*;
d) Desenează un paralelipiped dreptunghic *MNPQM'N'P'Q'*. Determină distanța de la punctul *Q* la dreapta *NP*, de la punctul *M'* la dreapta *Q'P'*, de la punctul *Q* la dreapta *MM'*;
e) Desenează o piramidă cu baza un pătrat *ABCD* și vârful *V*. Precizează poziția, una față de cealaltă, a dreptelor: *VB* și *BC*, *VA* și *VD*, *AB* și *AD*.

4. **a)** Desenează o dreaptă *a* și un punct *A* exterior ei; **b)** Trasează perpendiculara prin *A* pe dreapta *a* și notează piciorul acesteia pe *a* cu *B*; **c)** Trasează o oblică la dreapta *a*, prin *A,* și notează intersecția lor cu *C*; **d)** Compară distanța de la punctul *A* la dreapta *a* cu lungimea segmentului *AC* de pe oblica dusă la punctul **c)**.

5. **a)** Desenează o dreaptă a și fixează un punct O pe ea; **b)** Trasează perpendiculara prin O la dreapta a și indică piciorul perpendicularei; **c)** Trasează o oblică la dreapta a, prin punctul O și precizează poziția acesteia față de perpendiculara dusă prin O la a; **d)** Printr-un punct P al dreptei a, diferit de O, trasează o perpendiculară pe a și precizează poziția acesteia față de perpendiculara dusă prin O pe a.



6. Reprodu paralelogramul din desenul alăturat și precizează:
   a) distanța de la D la AB, știind că piciorul perpendicularei din D pe AB este E;
   b) distanța de la D la BC, știind că piciorul perpendicularei din D pe BC este F;
   c) distanța de la C la AB, știind că piciorul perpendicularei din C pe AB este G;
   d) distanța de la A la BC, știind că piciorul perpendicularei din A pe BC este H.

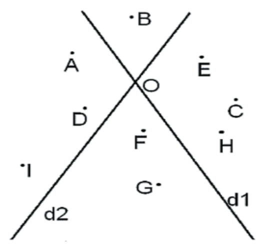


7. Identifică segmentul și mediatoarea sa din figurile geometrice alăturate.

8. Construiește un segment de 6 cm și mediatoarea acestuia.

9. Desenează o dreaptă d și un punct A exterior ei. Construiește segmentul AB, astfel încât dreapta d să fie mediatoarea acestuia.

10. Completează spațiile libere, urmărind notațiile din figura alăturată.
   a) Simetricul lui A în raport cu d_1 este ...;
   b) Punctele A și C sunt simetrice în raport cu ...;
   c) Simetricul lui E în raport cu d_1 este ...;
   d) Simetricul lui F în raport cu d_2 este ...;
   e) Simetricul lui O în raport cu d_1 este ...;
   f) Simetricul punctelor H și I în raport cu d_1, respectiv d_2, este ....



Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5

1. Mediatoarea unui segment este

o)	p)	q)	r)
paralelă cu segmentul	identică cu segmentul	oblică pe segment	perpendiculară pe segment

2. Dintr-un punct exterior unei drepte se pot coborî perpendiculare pe dreaptă

h)	i)	j)	k)
exact două, dar paralele	exact una	niciuna	exact două, dar în prelungire

3. Pentru a desena mediatoarea unui segment cu ajutorul riglei și al compasului, construim un număr de arce egal cu

d)	e)	f)	g)
0	1	2	3

4. Simetricul lui A față de mediatoarea MN a segmentului AB este

i)	j)	k)	l)
A	M	N	B

5. Distanța de la A la mediatoarea MN a segmentului AB, care intersectează AB în P, este

z)	a)	b)	c)
AM	AP	AB	AN

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Două drepte concurente care formează un unghi drept se numesc ... .

10p **2.** Lungimea segmentului care unește punctul cu piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă este ... de la un punct la o dreaptă.

10p **3.** Printr-un punct exterior unei drepte sau printr-un punct care aparține dreptei se poate duce o singură ... la acea dreaptă.

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Fie un segment AB și d mediatoarea sa, iar $d \cap AB = \{O\}$. Dacă $OB = 6$cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:

a) 12cm; **b)** 6cm; **c)** 14cm; **d)** 8cm.

10p **2.** Semidreptele OA și OB sunt perpendiculare. Bisectoarea unghiului AOB formează cu cele două semidrepte unghiuri cu măsura de:

a) 90^{o}; **b)** 180^{o}; **c)** 45^{o}; **d)** 55^{o}.

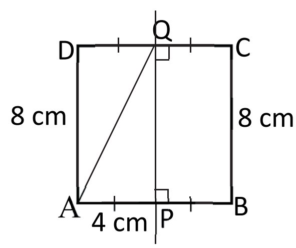
10p **3.** Se consideră un pătrat $ABCD$ cu latura de 3 cm. Distanța de la punctul B la dreapta AD este de:

a) 6cm; **b)** 2cm; **c)** 4cm; **d)** 3cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Desenați: un segment AB cu lungimea de 6 cm, mediatoarea segmentului AB și un punct P situat la distanța de 4 cm față de dreapta AB.

10p **2.** Folosind notațiile din desenul alăturat, în care $ABCD$ este un pătrat, scrieți: **a)** mediatoarea segmentului AB; **b)** lungimea distanței de la Q la BC; **c)** o dreaptă perpendiculară pe AB; **d)** o dreaptă oblică față de PQ; **e)** simetricul punctului C în raport cu dreapta PQ.



10p **3.** Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit, dreptele $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$, astfel încât punctele M și N sunt de aceeași parte a dreptei OB. Arătați că bisectoarele unghiurilor AOB și MON sunt perpendiculare.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc ... .

10p **2.** Intersecția dintre o dreaptă și perpendiculara pe aceasta, dusă dintr-un punct exterior ei, se numește ... perpendicularei.

10p **3.** Dreapta perpendiculară pe un segment, dusă prin mijlocul acestuia, se numește ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Cele două segmente în care mediatoarea împarte un segment de 18 cm au lungimea de:

a) 18 cm; **b)** 6 cm; **c)** 9 cm; **d)** 16 cm.

10p **2.** Fie un punct A situat la distanța de 4,5 cm față de o dreaptă d și A' simetricul său în raport cu dreapta d. Distanța de la A' la dreapta d este de:

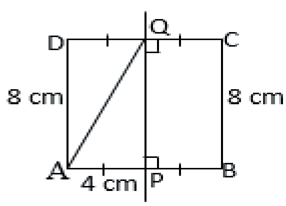
a) 9 cm; **b)** 4,5 cm; **c)** 4 cm; **d)** 8 cm.

10p **3.** Suma măsurilor a trei dintre cele patru unghiuri formate în jurul unui punct de două drepte perpendiculare este de:

a) 180°; **b)** 90°; **c)** 360°; **d)** 270°.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Desenați: o dreaptă d, un punct M situat la distanța de 3 cm față de d și simetricul lui M în raport cu dreapta d.



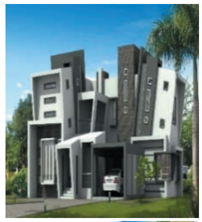
10p **2.** Folosind notațiile din desenul alăturat, în care $ABCD$ este un pătrat, scrieți: **a)** mediatoarea segmentului DC; **b)** lungimea distanței de la C la AB; **c)** o dreaptă perpendiculară pe AD; **d)** o dreaptă oblică față de CD; **e)** simetricul punctului B față de dreapta PQ.

10p **3.** Fie unghiul $\sphericalangle DOE$ ascuțit, $OM \perp OD$, $ON \perp OE$ astfel încât $\sphericalangle MON = 140^\circ$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, dacă OX este bisectoarea $\sphericalangle MOD$ și OY este bisectoarea $\sphericalangle NOE$.

Unitatea de învățare: Paralelism

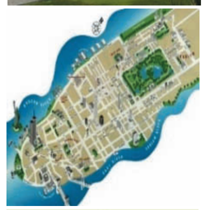
LECȚIA 5. Drepre paralele; axioma paralelelor. Aplicații practice

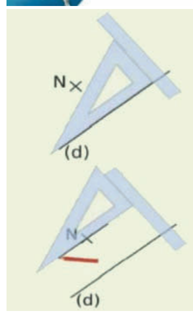
Atenție, începem!



A1. Imaginile reprezintă: o casă ultramodernă, o parte din harta orașului New York şi podul Anghel Saligny de la Cernavodă, detaliu.
Amintiți-vă cum se numesc două drepte care nu au niciun punct comun. Apoi, selectaţi un paralelipiped format de pereţii casei, un dreptunghi format de străzile longitudinale cu străzile transversale ale New York-ului şi un stâlp de

susţinere a podului Cernavodă şi daţi exemple de perechi de muchii paralele ale paralelipipedului ales, perechi de străzi paralele ale dreptunghiului ales şi perechi de grinzi paralele ale stâlpului de susținere ales.

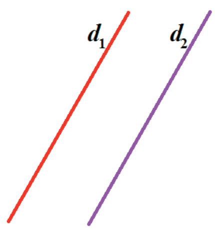




A2. Desenați, în caiete, o dreaptă d și un punct N nesituat pe d. Poziționați o riglă şi un echer, ca în desenul dat, şi deplasaţi echerul pe rigla fixată, până când latura de pe dreaptă trece prin punctul N. Apoi trasaţi o dreaptă de-a lungul acestei laturi a echerului.
a) Ce poziție are dreapta trasată astfel, față de dreapta d ?
b) Câte drepte paralele cu d puteţi duce prin punctul N?
c) Fixați un punct M, diferit de N și care nu aparține dreptei d. Repetați construcția anterioară pentru punctul M și precizați poziția dreptei, dusă prin M, față de cele două drepte paralele de la **a)**.

Ce ne învață teoria?

1. Două drepte din același plan, care nu au niciun punct comun, se numesc ***drepte paralele***.



Exemplu: Dreptele d_1, d_2 sunt paralele și notăm $d_1 \parallel d_2$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

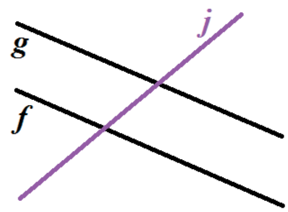
2. *Axioma paralelelor* (Euclid): Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o unică paralelă la acea dreaptă.

Consecințe:

a) Două drepte distincte, paralele cu o a treia ($f||h$, $g||h$), sunt paralele între ele ($f||g$) ***tranzitivitatea relației de paralelism***).

Justificare: Într-adevăr, dacă cele două drepte distincte ar avea un punct comun, atunci prin acest punct ar trece două paralele la dreapta a treia, ceea ce contrazice axioma paralelelor.

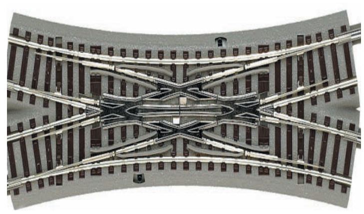
b) Dacă două drepte sunt paralele ($f||g$), atunci orice dreaptă care o intersectează pe una ($f \cap j \neq \varnothing$) o intersectează și pe cealaltă ($g \cap j \neq \varnothing$) (*Dreapta j este secanta la două drepte paralele*).



Justificare: Într-adevăr, dacă o dreaptă ar intersecta numai una dintre cele două paralele, atunci prin punctul de intersecție ar trece două paralele la cealaltă paralelă, ceea ce contrazice axioma paralelelor.

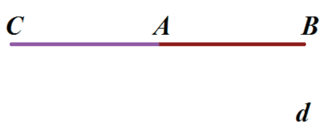
Să vedem ce am înțeles

Vorbind de şine de tren şi macazuri:
– să punem în evidenţă drepte paralele şi drepte secante;
– să dăm o intrepretare pentru axioma paralelelor;
– să dăm o interpretare pentru consecinţele axiomei paralelelor.



Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră dreapta *d*, punctul *A*, care nu aparţine lui d şi punctele distincte *B* şi *C*, astfel încât *AB* și *AC* sunt paralele cu *d*. Demonstrați că punctele *A, B, C* sunt coliniare.

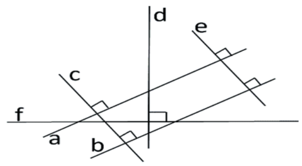


Ipoteză: $A \not\in d$; $B \neq C$; $AB || d$; $AC || d$.

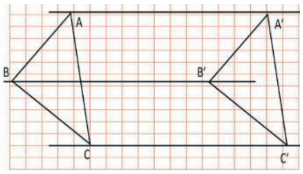
Concluzie: *A*, *B*, *C* coliniare.

Demonstrație: Utilizând proprietatea de tranzitivitate a paralelismului, avem: $AB || d$ și $AC || d \Rightarrow AB || AC$. Cum prin *A* trece o singură paralelă la *d* (axioma paralelelor), rezultă că *AB* și *AC* se confundă. Deci punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare.

Acum să rezolvăm singuri!



1. Reprodu desenul alăturat și scrie perechile de drepte paralele și perechile de drepte perpendiculare, folosind simbolurile „ $\parallel$” și „ $\perp$” .



2. În desenul alăturat, triunghiul $A'B'C'$ s-a obținut din triunghiul ABC prin translația acestuia spre dreapta, cu 10 pătrățele.

a) Scrie perechile și tripletele de drepte paralele obținute prin această translație, folosind notația „$\parallel$”;

b) Completează spațiile punctate cu unul dintre simbolurile „ $\equiv$” sau „ $\not\equiv$” , pentru a obține propoziții adevărate:

AB ... $A'B'$, AC ... $A'C'$, BC ... $B'C'$, AA' ... BB' ... $C'C'$,
CB ... $A'C'$, $\sphericalangle A$ ... $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B$ ... $\sphericalangle B'$, $\sphericalangle C$ ... $\sphericalangle C'$, $\sphericalangle A$ ... $\sphericalangle C'$.

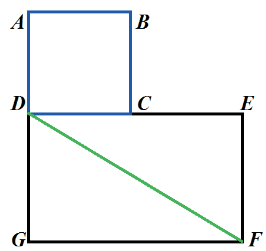
c) Dacă segmentul $A'B'$ se obține din segmentul AB, printr-o translație, ce poți afirma despre poziția unuia față de celălalt și despre lungimile lor?

d) Dacă unghiul $A'B'C'$ se obține din unghiul ABC, printr-o translație, ce poți afirma depre măsurile lor?

3. Trasează o dreaptă d și ia un punct M nesituat pe d. Du paralela a și perpendiculara b la dreapta d, folosind un echer cu un unghi drept. Precizează poziția dreptei b față de a. Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

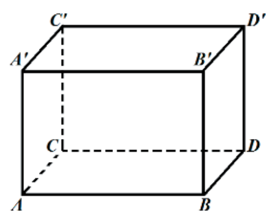
a) Două perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt …; **b)** Dacă două drepte sunt paralele, o perpendiculară pe una dintre ele este … și pe cealaltă.

4. Dacă dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta d este perpendiculară pe a, ce poziție are dreapta d față de b?



5. În desenul alăturat, $ABCD$ este un pătrat, iar $DEFG$ este un dreptunghi. Completează spațiile punctate cu simbolurile „ $\parallel$” sau „ $\nparallel$” , pentru a obține propoziții adevărate:

a) AB ... DE; **b)** AD ... EF; **c)** BC ... FG; **d)** DF ... AB.



6. În desenul alăturat, $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped. Scrie toate dreptele paralele cu: **a)** AA' ; **b)** BC ; **c)** $D'C'$.

7. Stabilește valoarea de adevăr a enunțului: „Dacă dreptele d_1, d_2 sunt paralele și dreptele d_2, d_3 nu sunt paralele, atunci dreptele d_1, d_3 nu sunt paralele”.

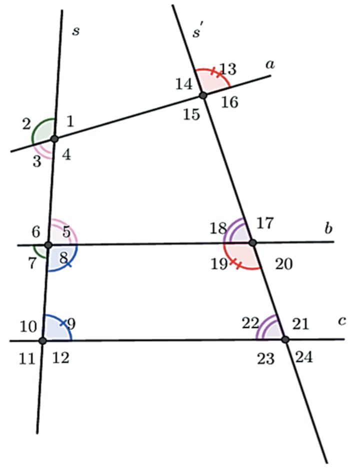
8. Câte paralele se pot construi prin punctele necoliniare M, N, P la dreptele NP, MP și, respectiv, MN? Justifică răspunsul dat.

9. Desenează o dreaptă d și un punct P situat pe aceasta. Trasează o paralelă la d, printr-un punct M care aparține perpendicularei pe d în P, folosind echerul și rigla.

LECȚIA 6. Criterii de paralelism

Atenție, începem!

A1. Dreptele *a, b, c* formează cu secantele *s* şi *s′* unghiuri numerotate de la 1 la 24. Dacă ne referim la cvartetele de unghiuri 1, 2, 3, 4, respectiv 5, 6, 7, 8 formate fiecare *în jurul unui punct*, ținând seama de pozițiile lor față de dreptele *a, b* şi secanta *s*, observăm că se formează următoarele ***perechi remarcabile de unghiuri***:



alterne externe: (1,7) şi (2,8); *alterne interne:* (3,5) şi (4,6);
corespondente: (1,5); (2,6); (3,7); (4,8);
externe de aceeaşi parte a secantei: (1,8); (2,7);
interne de aceeaşi parte a secantei: (3,6); (4,5).

a) Scrieţi perechile de unghiuri remarcabile formate de dreptele *a*, *b* şi secanta *s′*;

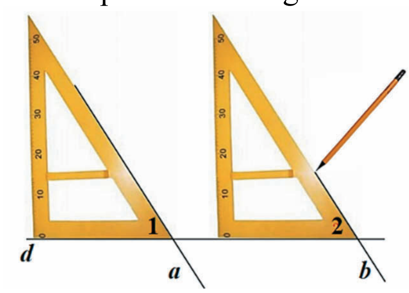
b) Pentru dreptele paralele *b*, *c* şi secanta *s*, comparaţi prin măsurare unghiurile alterne interne, 7 şi 9, apoi precizaţi dacă cealaltă pereche de unghiuri alterne interne (8,10) are aceeaşi proprietate. Repetaţi procedeul pentru perechile de unghiuri alterne externe, respectiv corespondente;

c) Tot pentru dreptele paralele *b*, *c* şi secanta *s*, măsuraţi şi calculaţi suma măsurilor unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei, 7 şi 10. Apoi, precizaţi dacă cealaltă pereche de unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei (8,9) are aceeaşi proprietate.

A2. Echerele din figura alăturată sunt identice.

a) Numiți şi comparați unghiurile 1 şi 2;

b) Precizați ce poziție are dreapta *a* față de dreapta *d*.



Ce ne învață teoria?

<table>
<tr><td rowspan="5">1. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri</td><td rowspan="2">alterne</td><td>interne</td><td rowspan="3">congruente</td><td rowspan="5">atunci unghiurile din cealaltă pereche de unghiuri</td><td rowspan="2">alterne</td><td>interne</td><td rowspan="5">sunt</td><td rowspan="3">congruente.</td></tr>
<tr><td>externe</td><td>externe</td></tr>
<tr><td colspan="2">corespondente</td><td colspan="2">corespondente</td></tr>
<tr><td>interne</td><td rowspan="2">de aceeaşi parte a secantei</td><td rowspan="2">suplementare</td><td>interne</td><td rowspan="2">de aceeaşi parte a secantei</td><td rowspan="2">suplementare.</td></tr>
<tr><td>externe</td><td>externe</td></tr>
</table>

Consecință: Două unghiuri cu laturile, respectiv paralele, sunt congruente sau suplementare.

<table>
<tr><td rowspan="5">2. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri</td><td rowspan="2">alterne</td><td>interne</td><td rowspan="3">congruente.</td><td rowspan="5">atunci cele două drepte sunt paralele.</td></tr>
<tr><td>externe</td></tr>
<tr><td colspan="2">corespondente</td></tr>
<tr><td>interne</td><td rowspan="2">de aceeași parte a secantei</td><td rowspan="2">suplementare.</td></tr>
<tr><td>externe</td></tr>
</table>

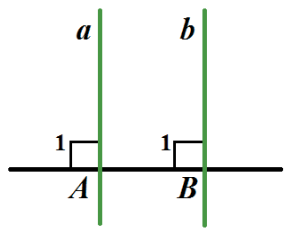
<table>
<tr><td rowspan="5">3. Două drepte paralele intersectate de o secantă formează perechi de unghiuri</td><td rowspan="2">alterne</td><td>interne</td><td rowspan="3">congruente.</td></tr>
<tr><td>externe</td></tr>
<tr><td colspan="2">corespondente</td></tr>
<tr><td>interne</td><td rowspan="2">de aceeași parte a secantei</td><td rowspan="2">suplementare.</td></tr>
<tr><td>externe</td></tr>
</table>

Învățăm să rezolvăm

1. Arătați că două drepte *a* și *b,* perpendiculare pe aceeași dreaptă *d,* sunt paralele.

Ipoteză: $a \perp d$; $b \perp d$.

Concluzie: $a \parallel b$.



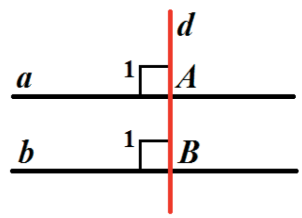
Demonstrație: $\left.\begin{array}{l} a \perp d \Leftrightarrow \sphericalangle A_1 = 90^\circ \\ b \perp d \Leftrightarrow \sphericalangle B_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (1).

$\sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle B_1$ sunt unghiuri corespondente, formate de dreptele a și b cu secanta d (2). Din afirmațiile (1) și (2) rezultă că $a \parallel b$.

2. Arătați că, dacă o dreaptă d este perpendiculară pe o dreaptă *a*, atunci *d* este perpendiculară pe orice dreaptă *b* paralelă cu *a*.

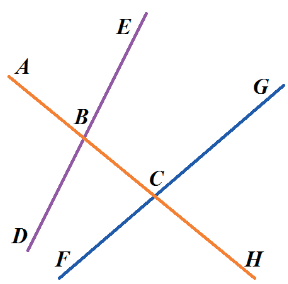
Ipoteză: $d \perp a$; $a \parallel b$ și $d \cap a = \{A\}, d \cap b = \{B\}$

Concluzie: $d \perp b$.



Demonstrație: Dreptele paralele a și b formează cu secanta d, unghiurile corespondente A_1 și B_1 congruente. Cum $\sphericalangle A_1 = 90^\circ$ (pentru că $d \perp a$) și $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1 \Rightarrow \sphericalangle B_1 = 90^\circ$, deci $d \perp b$.

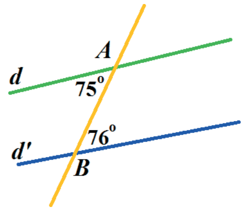
Acum să rezolvăm singuri!



★ **1.** Pentru figura geometrică din desenul alăturat, în care dreptele *DE* și *FG* sunt intersectate de secanta *AH*, scrie perechile de unghiuri:

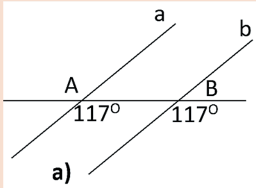
a) alterne interne; **b)** alterne externe; **c)** corespondente; **d)** interne de aceeași parte a secantei; **e)** externe de aceeași parte a secantei.

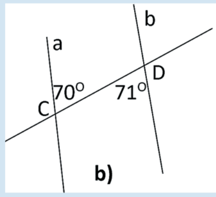
2. În desenul alăturat, dreptele d și d' formează cu secanta AB unghiurile A_1 și B_1, astfel încât $\sphericalangle A_1 = 75^\circ$ și $\sphericalangle B_1 = 76^\circ$. Precizează dacă dreptele d și d' sunt sau nu paralele și justifică răspunsul dat.

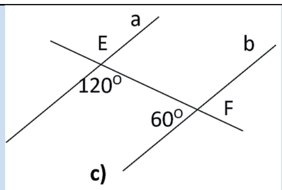


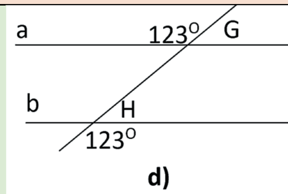
★★

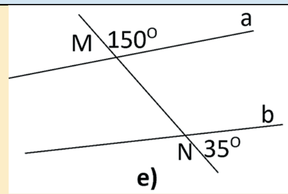
3. Pentru fiecare figură geometrică alăturată, precizează dacă dreptele a și b sunt paralele sau nu și justifică răspunsurile date.

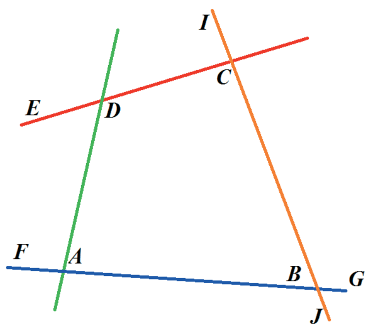












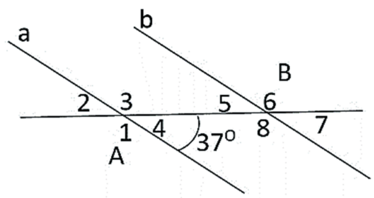
★★★

4. Pentru figura geometrică alăturată, indică ce tip de pereche de unghiuri formate de două drepte și o secantă reprezintă următoarele unghiuri:

a) *BAD* și *GBC*; **b)** *ADE* și *DAB*; **c)** *ADE* și *BCD*;
d) *DCI* și *ABC*; **e)** *FAH* și *CBG*; **f)** *ADC* și *BAD*;
g) *FAH* și *JBG*.

Specifică, în fiecare caz, cele două drepte și secanta.

5. Află măsurile unghiurilor $A_1, A_2, A_3, B_5, B_6, B_7, B_8$ din desenul alăturat, știind că $a \parallel b$ și $\sphericalangle A_4 = 37^\circ$.

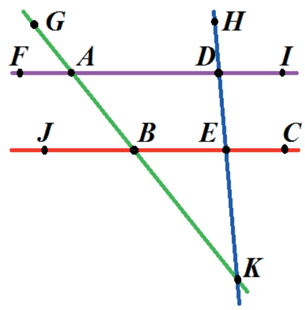


Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7



În figura alăturată,

1. O pereche de unghiuri alterne interne sunt

o)	p)	q)	r)
BAD, FAG	*BAD, JBA*	*ABE, BED*	*JBA, HDI*

2. O pereche de unghiuri alterne externe

a)	b)	c)	d)
FAG, EBK	*BAD, JBA*	*ABE, BED*	*JBA, HDI*

3. O pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei

p)	q)	r)	s)
FAG, EBK	*BAD, JBA*	*FAB, ABJ*	*BAD, FAG*

4. O pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei

a)	b)	c)	d)
FAG, HDI	*FAG, EBK*	*BAD, JBA*	*ABE, BED*

5. O pereche de unghiuri corespondente

l)	m)	n)	o)
FAG, ABJ	*FAG, EBK*	*BAD, JBA*	*FAB, ABJ*

6. O pereche de drepte paralele

e)	f)	g)	h)
BE, AD	*AB, AK*	*DE, FI*	*CE, GA*

7. Pentru paralele *AD* și *BE* nu e secantă

l)	m)	n)	o)
AF	*AB*	*AG*	*AK*

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Două drepte coplanare care nu au niciun punct comun se numesc ... .

10p **2.** Două drepte distincte paralele cu o a treia dreaptă sunt ... între ele.

10p **3.** Două drepte paralele tăiate de o secantă formează perechi de unghiuri alterne interne ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente cu măsurile $2x$ și 71°. Valoarea lui x este egală cu:

a) $35^\circ 50'$; **b)** 109° ; **c)** $35^\circ 30'$; **d)** 119°.

10p **2.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei cu măsurile y și 121°. Valoarea lui y este egală cu:

a) 59°; **b)** 121°; **c)** 69°; **d)** 180°.

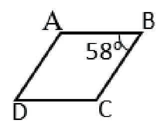
10p **3.** Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci este adevărată afirmația:

a) $AD \nparallel BC$; **b)** $AC \parallel BD$; **c)** $\sphericalangle ABD \not\equiv \sphericalangle BDC$; **d)** $AB \parallel CD$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Desenați: un unghi ABC cu măsura de 60° și paralela CD la AB, astfel încât punctele A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.
Determinați măsura unghiului BCD.

10p **2.** În desenul alăturat, avem $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$ și $\sphericalangle ABC = 58^\circ$. Arătați că $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle DAB$ și determinați măsura acestor unghiuri.



10p **3.** Arătați că bisectoarele unei perechi de unghiuri alterne interne formate de o secantă cu două drepte paralele sunt, la rândul lor, paralele.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce ... paralelă la dreapta dată.

10p **2.** Dacă două drepte distincte *a* și *b* sunt intersectate de o a treia dreaptă *c*, atunci dreapta *c* se numește ... dreptelor *a* și *b*.

10p **3.** Două drepte paralele tăiate de o secantă formează unghiuri interne de aceeași parte a secantei ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei cu măsurile $123^\circ 22'$ și *x*. Valoarea lui *x* este:

a) $56^\circ 38'$; **b)** $123^\circ 22'$; **c)** $57^\circ 38'$; **d)** $56^\circ 78'$.

10p **2.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe cu măsurile $3y$ și 81°. Valoarea lui y este egală cu:

a) 99°; **b)** 27°; **c)** 24°; **d)** 36°.

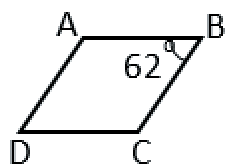
10p **3.** Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci este adevărată afirmația:

a) $AD \parallel BD$; **b)** $AB \nparallel CD$; **c)** $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$; **d)** $AB \nparallel CD$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Desenați: un unghi ABC cu măsura de 110° și paralela CD la AB, astfel încât punctele A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC. Determinați măsura unghiului BCD.

10p **2.** În desenul alăturat, avem $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$ și $\sphericalangle ABC = 62^\circ$. Arătați că unghiurile BDC și ACD sunt suplementare și determinați măsurile lor.



10p **3.** Arătați că bisectoarele unei perechi de unghiuri corespondente formate de o secantă cu două drepte paralele sunt paralele.

Unitatea de învățare: Cercul

LECȚIA 7. Cerc; elemente în cerc

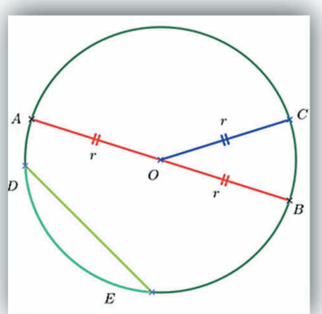
Atenție, începem!

A1. a) Citiți ora indicată de ceasul din desen și numiți figurile geometrice descrise de vârful minutarului, respectiv de vârful limbii orare, de la ora $10^{\underline{10}}$ la ora $11^{\underline{10}}$; **b**) Indicați centrul și raza cercului descris de vârful minutarului şi exprimaţi o definiţie a cercului de centru O şi rază r, unde r este distanţa de la centru la oricare punct al cercului; **c)** Cum se numeşte partea de cerc determinată de două puncte distincte ale cercului şi cum se numeşte unghiul format de două raze ale cercului, cu extremităţile în aceste puncte? **d)** Fixați un punct O în caiet şi construiți un cerc, cu centrul în O, de rază 3 cm, folosind compasul.

Ce ne învață teoria?

1. Fiind date un punct O și un număr pozitiv r, se numește ***cerc cu centrul în punctul O și raza r*** mulțimea punctelor din plan aflate la distanța r față de punctul O.
Notăm ***C(O,r).***
Elementele uni cerc sunt:
O – ***centrul cercului*** (punctul aflat la aceeași distanță de toate punctele cercului);
OC – ***rază*** a cercului (un segment determinat de centru și de un punct oarecare al cercului);
DE – ***coardă*** (segment determinat de două puncte ale cercului);
AB – ***diametru*** (coardă care conține centrul cercului); A, B – ***puncte diametral opuse***;
$\overset{\frown}{DE}$ – ***arc de cerc*** este o porțiune a cercului cuprinsă între două puncte ale cercului;
$\overset{\frown}{ACB}$ – ***semicerc*** este o porțiune a cercului cuprinsă între două puncte diametral opuse.

Observație: Pentru o descriere cât mai simplă, numim tot:
a) *rază* și distanța de la centrul cercului la un punct oarecare al său;
b) *diametru* și distanța dintre două puncte ale cercului, diametral opuse, iar aceasta este egală cu dublul razei.

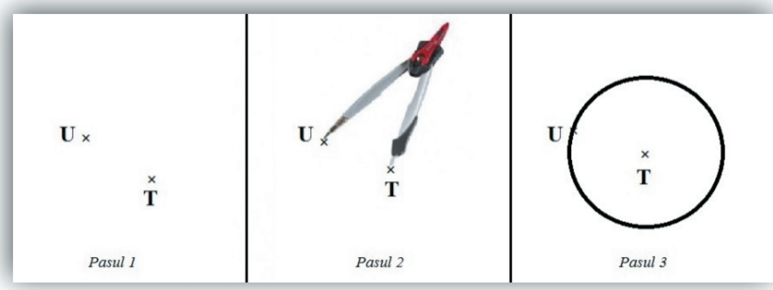


2. ***Construcția cercului de centru T și raza TU cu compasul***.

Pasul 1: Fixăm centrul *T* al cercului și alegem un punct *U* al cercului.

Pasul 2: Fixăm vârful compasului în punctul *T* și luăm deschiderea *TU*.

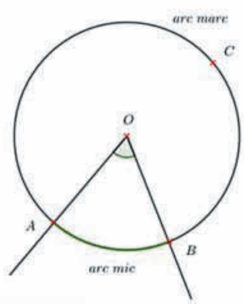
Pasul 3: Rotim vârful care conține creionul din *T* până ajunge iarăși în *T*.



3. Un unghi care are vârful în centrul cercului se numește ***unghi la centru***.
Mulțimea punctelor cercului aflate în interiorul unghiului *AOB*, la care adăugăm punctele *A* și *B*, se numește ***arc mic*** al cercului și se notează $\overset{\frown}{AB}$. Măsura acestuia este egală cu măsura unghiului *AOB*, care îl subîntinde.

Mulțimea punctelor cercului aflate în exteriorul unghiului *AOB*, la care adăugăm punctele *A* și *B*, se numește ***arc mare*** al cercului și se notează $\overset{\frown}{ACB}$, unde *C* este un punct al cercului aflat în exteriorul unghiului *AOB*. Măsura acestuia este egală cu 360^{o} –măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$. Măsura unui cerc este de 360^{o}, iar a unui semicerc este de 180^{o}.

Exemplu: Unghiul *AOB*, din desenul dat, este un unghi la centru.



Să vedem ce am înțeles

Să desenăm trei puncte necoliniare: *A, B, C* şi cercurile $\mathscr{C}$*(A,AB)*, $\mathscr{C}$*(B,BA)*, care trec prin punctul $\mathscr{C}$.

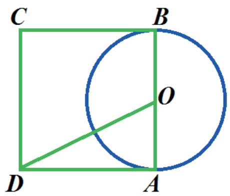
Să stabilim poziţia punctului *C* faţă de ambele cercuri.

Să construim diametrele din ambele cercuri care trec prin *C*.

Să punem în evidenţă, în fiecare cerc: o coardă, un arc mic, un arc mare.

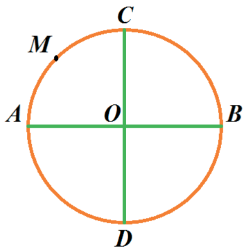
Învățăm să rezolvăm

1. Aflați raza unui cerc, care are ca diametru latura unui pătrat, cu perimetrul de 20 cm. Stabiliți poziția celorlalte două vârfuri ale pătratului față de cerc și justificați răspunsul dat.



Ipoteză: $ABCD$ pătrat; $P_{ABCD} = 20$ *cm*; AB diametrul cercului.
Concluzie: $r = ?$. Poziția punctelor C și D față de cerc
Demonstrație: $P_{ABCD} = 20$ cm $\Rightarrow AB = BC = CD = DA = 20 : 4 = 5$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow r = OA = OB = \dfrac{AB}{2} = 2{,}5$ cm. OD este o oblică și va avea lungimea mai mare decât OA, deci distanța de la O la D este mai mare decât raza OA. Atunci, punctul D este situat în exteriorul cercului. Printr-un raționament analog, se arată că și punctul C este situat în exteriorul cercului.

2. Într-un cerc de centru O, se consideră diametrele perpendiculare AB și CD și punctul M, mijlocul arcului AC. Determinați măsurile arcelor determinate de punctul M și extremitățile celor două diametre.



Ipoteză: $\mathscr{C}(O,r)$; AB, CD diametre; $AB \perp CD$; M mijlocul arcului AC.

Concluzie: $\overset{\frown}{MA}, \overset{\frown}{MB}, \overset{\frown}{MC}, \overset{\frown}{MD} = ?$

Demonstrație:
$AB \perp CD \Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle COB = \sphericalangle BOD = \sphericalangle DOA = 90° \Longrightarrow$
$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA} = 90^\circ$. Cum M este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AC}$, deducem că $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$. Apoi:
$\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AD} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. Analog se calculează $\overset{\frown}{MB} = 135^\circ$.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Se consideră în plan punctele A și B, astfel încât segmentul AB are lungimea de 4 cm. Desenează:
a) cercul de centru A și raza egală cu AB; **b)** cercul cu centrul în B și raza egală cu o pătrime din AB; **c)** cercul cu diametrul AB; **d)** cercul cu centrul în mijlocul lui AB și cu raza de 1 cm; **e)** cercul cu centrul în B și raza de 5 cm.

2. Desenează un cerc cu centrul într-un punct P și raza de 4 cm, o coardă cu lungimea de 6 cm și una cu lungimea de 8 cm. În cazul cărei coarde extremitățile acesteia și centrul cercului sunt coliniare ? Ce poziție au pe cerc extremitățile coardei de 8 cm ? Poți construi o coardă cu lungimea de 9 cm ? Justifică răspunsul dat.

3. Cercul din centrul unui teren de fotbal are raza de 9,15 m. Stabilește poziția față de acest cerc a trei jucători, care se află față de centrul terenului la distanța de 8 m, 10,1 m și, respectiv, 9,15 m.

4. Desenează un cerc $\mathscr{C}(Q,r)$, cu $r = 5$ cm. Reprezintă pe acest cerc un arc cu măsura de $60°$, unul cu măsura de $25°$ și unul cu măsura de $114°$. Marchează coardele corespunzătoare acestor arce și stabilește care dintre ele are lungimea cea mai mare și care are lungimea cea mai mică.

5. Un semicerc se împarte în 10 arce de măsuri egale. Realizează desenul și află câte grade are fiecare arc.

6. Află: **a)** diametrul unui cerc a cărui rază este de 5 cm; **b)** raza unui cerc cu diametrul de 24 cm; **c)** raza unui cerc pe care sunt situate două puncte diametral opuse la distanța de 6,4 dm unul față de celălalt.

LECȚIA 8. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

Atenție, începem!

A1. Observați imaginea alăturată, în care picăturile apei de ploaie determină, pe suprafața plană a apei, cercuri și precizați:

a) dacă există cercuri pe care dunga galbenă le taie, le atinge sau nu le atinge deloc; exprimați matematic poziția dungii galbene față de cerc, în fiecare dintre cele trei cazuri;

b) dacă există două cercuri care:

- nu se intersectează și sunt situate unui în interiorul celuilalt, sau unul în exteriorul celuilalt;
- au un singur punct comun și sunt situate unul în interiorul celuilalt, sau unul în exteriorul celuilalt;
- au două puncte comune.

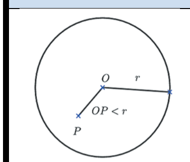
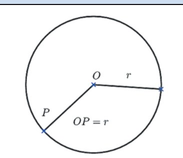
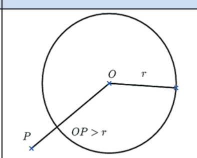
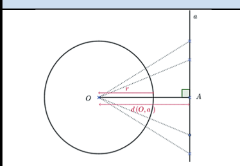
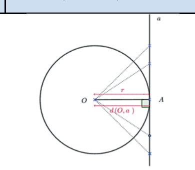
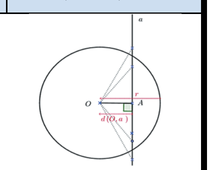
Exprimați matematic pozițiile celor două cercuri în cazurile enumerate;

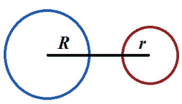
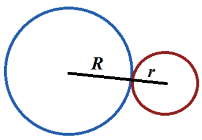
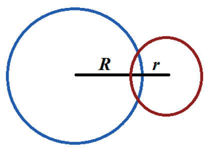
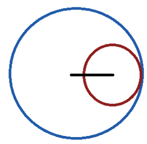
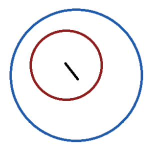
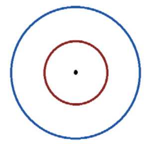
c) dacă există două cercuri, astfel încât unul să fie situat în interiorul celuilalt și să aibă același centru; exprimați matematic poziția acestor două cercuri.

A2. În pictura din tablou, dați câte un exemplu de două cercuri din categoriile: exterioare, tangente exterioare, tangente interioare, secante, interioare, respectiv concentrice, prezentându-le după culoare.

Ce ne învață teoria?

Fiind date: un punct P, o dreaptă a și un cerc de centru O și rază r:

1. Despre P spunem că este:			**2.** Despre o dreaptă a spunem că este:		
a) *interior cercului*	**b)** *pe cerc*	**c)** *exterior cercului*	***a)** exterioară* cercului	***b)** tangentă* cercului	***c)** secantă* cercului
dacă					
$OP<r$	$OP=r$	$OP>r$	$d(O,a)>r$	$d(O,a)=r$	$d(O,a)<r$
					

Fiind date două cercuri de centre O și Q, raze R și r, unde $R \geq r$:					
3. Despre $\mathscr{C}(O.R)$ și $\mathscr{C}(Q,r)$ spunem că sunt:					
exterioare	*tangente exterioare*	*secante*	*tangente interioare*	*interioare*	*concentrice*
dacă					
$O \neq Q$					$O = Q$
și					
$OQ > R + r$	$OQ = R + r$	$R - r < OQ < R + r$	$OQ = R - r$	$OQ < R + r$	$R > r$
					

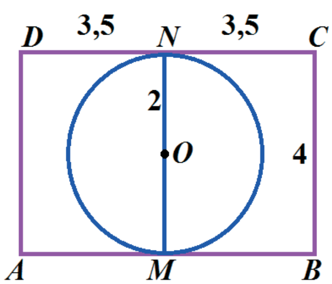
Să vedem ce am înțeles

Să considerăm un punct. Să realizăm un desen prin care să stabilim câte cercuri trec prin acest punct. Să desenăm unul.

- Să considerăm două puncte distincte. Să realizăm un desen prin care să stabilim câte cercuri trec prin cele două puncte. Ce puteți afirma despre centrele cercurilor care trec prin capetele segmentului determinat de cele două puncte?
- Să desenăm două cercuri exterioare unul altuia și două cercuri interioare unul altuia.

Învățăm să rezolvăm

1. În dreptunghiul $ABCD$ cu lungimea $AB = 7$ cm și lățimea $BC = 4$ cm, în care M este mijlocul segmentului AB și N este mijlocul segmentului CD, se construiește cercul de centru O și diametru MN. Determinați și explicați poziția dreptelor BC și AD față de cercul construit.



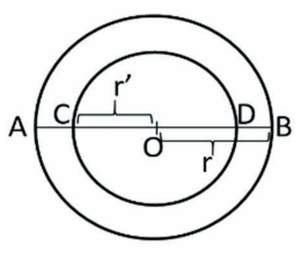
Ipoteză: $ABCD$ dreptunghi; $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm; M mijlocul lui AB; N mijlocul lui CD; O centrul cercului de diametru MN.

Concluzie: Poziția dreptelor BC și AD față de cerc.

Demonstrație: M mijlocul lui AB și N mijlocul lui CD $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN = 4$ cm $\Rightarrow$ raza cercului $OM = ON = 2$ cm.

Din $d(O, BC) = d(O, AD) = 3{,}5$ cm și $3{,}5 > 2$, deducem că dreptele BC și AD sunt exterioare cercului.

2. Se consideră cercurile concentrice $\mathscr{C}(O, r)$ și $C(O,r')$, cu diametrele de $8,(3)$ cm, respectiv de $4\frac{1}{3}$ cm și punctele coliniare *A, C, O, D, B* în această ordine, astfel încât *A* și *B* se găsesc pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$, iar *C* și *D* pe cercul $\mathscr{C}(O, r')$. Determinați lungimea segmentelor *AC* și *BD*.



Ipoteză: $\mathscr{C}(O,r)$, $\mathscr{C}(O,r')$; $r = 8,(3)$ cm, $r' = 4\frac{1}{3}$ cm; *A, C, O ,D, B* coliniare; $A, B \in \mathscr{C}(O, r)$ și $C, D \in \mathscr{C}(O, r')$.

Concluzie: *AC=? și BD=?*

Demonstrație: Deoarece $OA = OB = r$, $OC = OD = r'$, iar $AC = OA - OC$ și $BD = OB - OC$, rezultă $AC \equiv BD$. Razele celor două cercuri sunt:

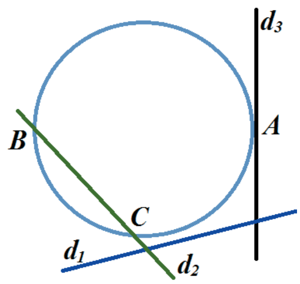
$$r = 8,(3) : 2 = \frac{25}{6}\text{cm}, \quad r' = 4\frac{1}{3} : 2 = \frac{13}{6}\text{cm}.$$

Atunci $AC = BD = r - r' = \frac{25}{6} - \frac{13}{6} = 2\text{cm}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

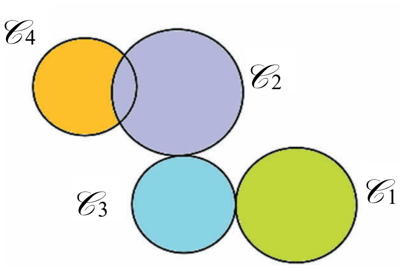
1. Precizează poziția dreptelor d_1, d_2 și d_3 față de cercul din figura alăturată.



2. Desenează un cerc cu centrul într-un punct *O* și raza de 3 cm și dreptele d_1, d_2 și d_3, astfel încât distanța de la *O* la d_1 este egală cu 4 cm, distanța de la *O* la d_2 este egală cu 3 cm și distanța de la *O* la d_3 este egală cu 1,5 cm. Precizează poziția celor trei drepte față de cerc.

3. O secantă la un cerc dat conține centrul acestuia. Exprimă, în funcție de raza r a cercului, distanța dintre cele două puncte în care secanta intersectează cercul.

4. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă două puncte sunt situate în exteriorul unui cerc, atunci dreapta determinată de ele este exterioară cercului." Justifică răspunsul dat.



★★

5. În figura alăturată sunt reprezentate cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ și $\mathscr{C}_4$. Identifică poziția fiecăruia din cele patru cercuri în raport cu celelalte.

6. Construiește cercurile $\mathscr{C}(O,r)$, $\mathscr{C}(O,r')$ în următoarele cazuri și precizează poziția unuia față de celălalt: **a)** $r = 3$ cm, $r' = 4$ cm, $OO' = 8$ cm; **b)** $r = 2$ cm, $r' = 4$ cm, $OO' = 5$ cm; **c)** $r = 2$ cm, $r' = 5$ cm, $OO' = 7$ cm; **d)** $r = 7$ cm, $r' = 2$ cm, $OO' = 4$ cm; **e)** $r = 6$ cm, $r' = 4$ cm, $OO' = 2$ cm; **f)** $r = 3$ cm, $r' = 4$ cm, $OO' = 0$ cm.

7. Se consideră un segment *AB* cu lungimea de 6 cm și cercul $\mathscr{C}(A,4)$. Află raza cercului cu centrul în punctul *B*, tangent cercului $\mathscr{C}(A, 4)$.

★★★

8. Se consideră cercurile $\mathscr{C}(I, r_1)$ și $\mathscr{C}(I, r_2)$. Știind că r_1 și r_2 sunt direct proporționale cu numerele 3 și 5, stabilește poziția celor două cercuri.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

1	2	3	4	5	6

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1. Dacă punctele *A, B* se află pe cercul *C(O,r)*, atunci *AB* nu poate fi

a)	**b)**	**c)**	**d)**
coardă	diametru	rază	un singur punct

2. Dacă distanța dintre centrele a două cercuri este 2cm, atunci cercurile nu pot fi

m)	**n)**	**o)**	**p)**
tangente	interioare	concentrice	exterioare

3. Dacă dreapta *d* trece prin centrul cercului *C(O,r)*, atunci *d* este

a)	**b)**	**c)**	**d)**
secantă	tangentă	rază	diametru

4. Fiind date două cercuri, numărul maxim de tangente comune este

o)	**p)**	**q)**	**r)**
0	1	2	3

5. Dacă distanța dintre centrele a două cercuri cu razele de 3cm, respectiv 4cm, este de 5cm, atunci cercurile sunt

a)	**b)**	**c)**	**d)**
interioare	tangente interioare	tangente exterioare	secante

6. Dacă mijlocul segmentului *AB* se află pe un cerc, atunci, dreapta *AB* nu poate fi față de cerc

a)	**b)**	**c)**	**d)**
exterioară	secantă	tangentă	diametru

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac înscrise enunțuri adevărate.

10p **1.** Segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc se numește ... .

10p **2.** Arcul de cerc cu extremitățile diametral opuse se numește ... .

10p **3.** Dreapta care are un singur punct comun cu un cerc se numește ... la cerc

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Diametrul unui cerc cu raza de 6 cm are lungimea de:

a) 3 cm; **b)** 12 cm; **c)** 18 cm; **d)** 14 cm.

10p **2.** Unghiul la centru AOB din cercul de centru O are măsura de 73º. Atunci, arcul mic AB are măsura de:

a) 287º; **b)** 297º; **c)** 73º; **d)** 90º.

10p **3.** Două cercuri tangente exterioare au razele de 5 cm și, respectiv, 8 cm. Atunci, distanța dintre centrele lor este egală cu:

a)13 cm; **b)**3 cm; **c)**14 cm ; **d)** 8 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Un teren de handbal are formă dreptunghiulară cu lungimea de 40 m. La cele două capete ale terenului sunt desenate două semicercuri cu centrele respectiv în mijlocul lățimilor și diametrul de 12 m. Ce distanță parcurge un jucător pentru a ajunge de la un semicerc la altul, deplasându-se pe dreapta care unește centrele celor două semicercuri?

10p **2.** Construiți două cercuri interioare, C (O,r) și C (O',r'), unde $r=6$ cm, $r'=2$ cm și $OO'=1$ cm. Determinați lungimea segmentului AB, unde $\{A\}=OO'\cap$ C (O,r) și $\{B\}=OO'\cap C(O',r')$, iar punctele O' și B aparțin segmentului OA. Precizați ce poziție are o tangentă la cercul $C(O',r')$ față de cercul $C(O,r)$.

10p **3.** În cercul $C(O,r)$, se consideră două diametre AA' și BB', astfel încât arcul mic AB are măsura de 70º. Construim semidreapta OC bisectoarea unghiului AOB, $C\in C(O,r)$ și punctul C' pe arcul mic $A'B'$, astfel încât măsura arcului $A'C'$ este de 35º. Arătați că punctele C,O,C' sunt coliniare.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Coarda care trece prin centrul cercului se numește ... .

10p **2.** Unghiul format de două raze ale unui cerc se numește unghi ... .

10p **3.** Două cercuri care au două puncte comune se numesc ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Raza unui cerc cu diametrul de 6 cm are lungimea de:

a) 12 cm; **b)** 2 cm; **c)** 14 cm; **d)** 3 cm.

10p **2.** Un arc de cerc AB al unui cerc de centru O are măsura de 112°. Atunci, $\sphericalangle AOB$ are măsura de:

a) 112°; **b)** 56°; **c)** 224°; **d)** 180°.

10p **3.** Două cercuri tangente interioare au razele de 5 cm și, respectiv, 8 cm. Atunci, distanța dintre centrele lor este egală cu:

a) 13 cm; **b)** 3 cm; **c)** 14 cm ; **d)** 8 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Un teren de handbal are formă dreptunghiulară cu lungimea de 40 m. La capete, sunt desenate două semicercuri cu diametrul de 12 m, cu centrele în mijloacele lățimilor dreptunghiului. Ce lungime trebuie să aibă pasa unui jucător aflat la centrul terenului pentru a ajunge la portar, care este așezat în punctul de intersecție a semicercului cu dreapta care unește centrul terenului cu centrul semicercului?

10p **2.** Construiți două cercuri exterioare, $C(O,r)$ și $C(O',r')$, unde $r=5$ cm, $r'=7$ cm și $OO'=15$ cm. Determinați lungimea segmentului AB, unde $\{A\}=OO'\cap C(O,r)$ și $\{B\}=OO'\cap C(O',r')$, iar A și B aparțin segmentului OO'. Precizați ce poziție are o secantă la cercul $C(O,r)$, paralelă cu dreapta OO' față de cercul $C(O',r')$.

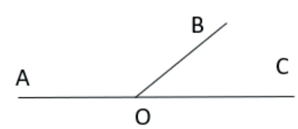
10p **3.** În cercul $C(O,r)$, se consideră două diametre AB și CD, astfel încât punctele A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD. Construim diametrul EF, astfel încât semidreapta OE este bisectoarea unghiului AOC. Arătați că raza OG, unde G este mijlocul arcului mic AB, este perpendiculară pe EF. Dacă măsura arcului AE este de 20°, calculați măsura unghiului GOD.

Teme pentru portofoliu

1. a) Determină măsura a două unghiuri suplementare, știind că măsura unuia dintre ele reprezintă două treimi din măsura celuilalt;

b) Determină măsura a două unghiuri complementare, știind că măsura unuia dintre ele reprezintă două treimi din măsura celuilalt.

2. Reprodu, în caiet, desenul alăturat și construiește cu rigla negradată și compasul bisectoarele unghiurilor AOB și BOC. Arată că măsura unghiului format de cele două bisectoare este de 90°.

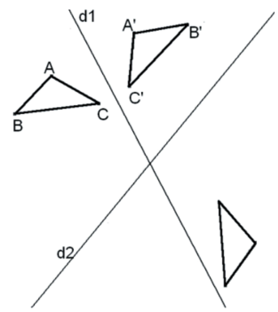


3. Arată că, dacă două unghiuri adiacente sunt suplementare, atunci laturile lor necomune sunt în prelungire.

4. Arată că, dacă două unghiuri adiacente au laturile necomune în prelungire, atunci ele sunt suplementare.

5. Trei drepte concurente în același punct determină șase unghiuri congruente în jurul acelui punct. Realizează desenul corespunzător, determină măsura unghiurilor și construiește bisectoarele a două dintre cele șase unghiuri, care să fie situate una în prelungirea celeilalte.

6. Se consideră dreptele AB și CD concurente în punctul O. Bisectoarea unghiului AOC formează cu semidreapta OA un unghi cu măsura de $21^\circ 30'$. Calculează măsura celor patru unghiuri formate de dreptele AB și CD.



7. Reprodu desenul alăturat și precizează simetricul segmentului AB și al lui AC în raport cu dreapta d_1. Localizează și notează cu A'', B'' și C'' simetricele lui A, B respectiv, C în raport cu dreapta d_2.

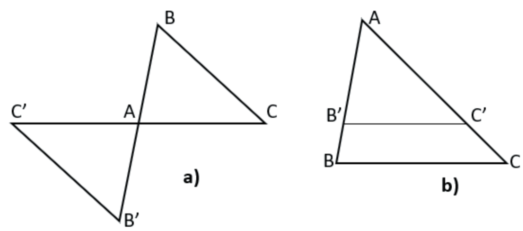
8. Desenează un unghi AOB cu măsura de 40º. Construiește simetrica OB' a semidreptei OB în raport cu OA și simetrica OA' a semidreptei OA în raport cu OB. Ce măsură are unghiul $A'OB'$?

9. Demonstrează că două unghiuri cu același vârf și laturile respectiv perpendiculare, unul ascuţit, iar celălalt obtuz, sunt suplementare.

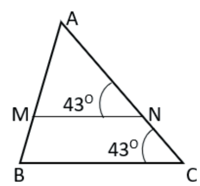
10. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ ascuţit, $OM \perp OA$, $ON \perp OB$ și $\sphericalangle MON = 120^\circ$. Află măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, dacă OX este bisectoarea $\sphericalangle MOA$ și OY este bisectoarea $\sphericalangle NOB$.

11. Fie unghiul ascuţit $\sphericalangle AOB$, $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$. Determină măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, unde OX și OY sunt bisectoarele $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle MON$.

12. În fiecare figură geometrică din desenul alăturat, dreptele BC și $B'C'$ sunt paralele. Indică perechile de unghiuri congruente din triunghiurile ABC și $AB'C'$.



13. Paralelogramul $ABCD$ are măsura unghiului A de 57°. Realizează desenul și află măsurile unghiurilor B, C și D. Ce poți afirma despre două unghiuri consecutive ale paralelogramului? Dar despre unghiurile opuse?



14. În triunghiul ABC din figura alăturată, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle MNA = 43^\circ$. Precizează poziția dreptei MN față de dreapta BC.

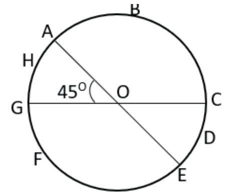
15. Prin vârful A al triunghiului ABC se duc semidreptele AM și AN, astfel încât unghiurile alterne interne MAC și ACB, respectiv NAB și ABC să fie congruente. Arată că punctele M, A și N sunt coliniare.

16. Două drepte paralele tăiate de o secantă formează opt unghiuri dintre care cinci sunt congruente. Determinaţi măsurile unghiurilor.

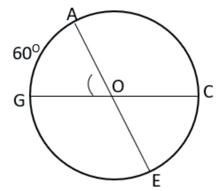
17. Două drepte paralele tăiate de o secantă formează opt unghiuri astfel încât trei dintre acestea au suma măsurilor egală cu 276°. Determinaţi măsurile unghiurilor.

18. Două cercuri au razele direct proporționale cu numerele 3 și 5. Care dintre cercuri are diametrul mai mare?

19. Două cercuri au diametrele invers proporționale cu numerele 4 și 8. Care dintre cercuri are raza mai mică?



20. Determină măsurile arcelor $\overset{\frown}{AHG}$, $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{CDE}$ și $\overset{\frown}{EFG}$ din desenul alăturat.



21. Află măsurile unghiurilor AOG, AOC, COE și EOG din desenul alăturat.

22. Determină măsurile unghiurilor formate de acele unui ceas, când acesta indică ora:

a) $9^{\underline{15}}$; **b)** $3^{\underline{00}}$; **c)** $12^{\underline{05}}$; **d)** $8^{\underline{20}}$.

23. Determină raza unui cerc, știind că diametrul acestuia este jumătate din perimetrul pătratului cu latura de 3 cm.

24. Două diametre împart un cerc în patru arce de măsuri egale. Care este poziția celor două diametre? Justifică răspunsul dat.

25. Pe un semicerc de diametru AB se aleg, în această ordine, începând de la punctul A către B, punctele D și E, astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DE}$ și $\overset{\frown}{EB}$ sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Află măsurile acestor arce și realizează desenul corespunzător, știind că $AB = 8$ cm.

26. Se consideră pătratul $ABCD$ și cercul cu diametrul AB. Determină și explică pozițiile celor patru laturi ale pătratului față de cercul construit.

27. Se consideră cercurile $\mathscr{C}(O,r)$ și $\mathscr{C}(O',r')$ exterioare, cu $r = 4$ cm și $OO' = 7$ cm. Află între ce valori poate fi cuprinsă lungimea razei r'.

28. Pe o dreaptă d se consideră patru puncte A, B, C, D, în această ordine, astfel încât AB = 3 cm, $BC = CD = 1$ cm. Construiește cercul cu diametrul AC, iar prin B, C și D perpendicularele pe dreapta d. Determină și explică poziția celor trei perpendiculare față de cercul construit.

29. Află razele a două cercuri exterioare, știind că acestea sunt invers proporționale cu 2 și 3, iar distanța dintre centrele lor este egală cu 10 cm.

Capitolul 6. TRIUNGHIUL

Unitatea de învățare: Triunghiul

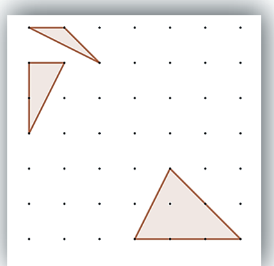
LECȚIA 1. Triunghiul; clasificare; perimetru

Atenție, începem!

A1. Numiți figurile geometrice de pe panourile indicatoare de circulație rutieră, din desenele alăturate, și precizați pentru fiecare numărul laturilor, unghiurilor, vârfurilor.

A2. Fixați, în caiete, trei puncte necoliniare și trasați segmentele determinate de două câte două dintre aceste puncte. Ce figură geometrică determină trei puncte necoliniare? Câte triunghiuri se pot construi prin trei puncte coliniare date?

A3. Pentru fiecare dintre cele trei triunghiuri din desenul de mai jos:



a) precizați numărul maxim de unghiuri obtuze, de unghiuri drepte, respectiv de unghiuri ascuțite pe care le poate avea un triunghi și, în funcție de aceasta, spuneți ce înțelegeți prin triunghi: *obtuzunghic*, *dreptunghic*, respectiv *ascuțitunghic*;

b) comparați lungimile laturilor și precizați dacă există triunghiuri: cu cele trei laturi de lungimi diferite, cu două laturi având aceeași lungime, respectiv cu toate trei laturile de aceeași lungime și spuneți ce înțelegeți prin triunghi: *oarecare*, *isoscel*, respectiv *echilateral*.

c) Dacă numim *bază a triunghiului isoscel* latura care nu are lungimea egală cu a celorlalte două, ce puteți afirma despre unghiurile de la baza triunghiului isoscel? Ce puteți afirma despre măsurile celor trei unghiuri ale triunghiului echilateral?

Ce ne învață teoria?

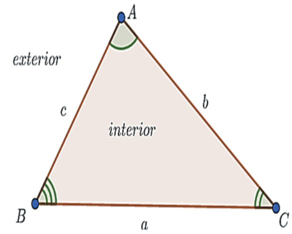
1. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare distincte, atunci reuniunea segmentelor AB, BC, CA se numește ***triunghiul ABC*** și se notează $\boldsymbol{\Delta ABC}$.

Elemente:

- Punctele A, B, C sunt ***vârfurile*** triunghiului ABC.
- Segmentele AB, BC, CA sunt ***laturile*** triunghiului
- $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$ sunt ***unghiurile*** triunghiului.

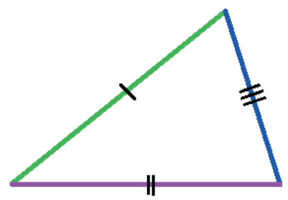
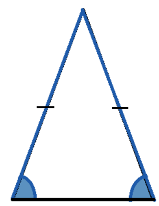
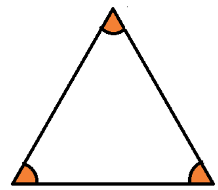
$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$ este ***perimetrul*** triunghiului ABC.

Un punct este în ***interiorul*** triunghiului ABC, dacă este interior fiecăruia dintre unghiurile triunghiului. Un punct este ***exterior*** unui triunghi, dacă nu este nici în interiorul triunghiului, nici pe laturile acestuia.

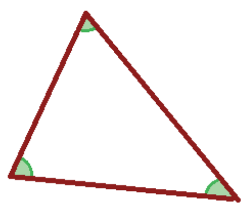
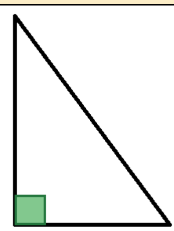
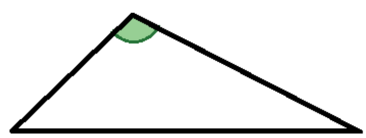


2. Clasificarea triunghiurilor

- ***După lungimile laturilor***:

oarecare sau *scalen*	***isoscel***	***echilateral***
are laturile de lungimi diferite două câte două	are două laturi congruente	are toate laturile congruente
		

- ***După măsurile unghiurilor***

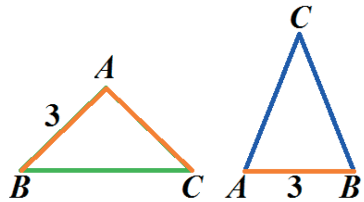
Ascuțitunghic	***dreptunghic***	***obtuzunghic***
are toate unghiurile ascuțite	are un unghi drept	are un unghi obtuz
		

Să vedem ce am înțeles

Considerăm patru puncte, P, Q, R, S, oricare trei necoliniare. Să scriem toate triunghiurile cu vârfurile în aceste puncte, iar unuia să-i notăm unghiurile, cu trei litere mari și laturile cu litere mici. Acestui triunghi să-i hașurăm interiorul.
Pentru unul dintre triunghiuri, să punem în evidenţă: laturile (cu două litere mari, dar şi cu o literă mică), unghiurile (cu trei litere), interiorul (prin haşurare).

Învățăm să rezolvăm

1. Un triunghi isoscel are o latură de 3 cm și perimetrul de 10 cm. Determinați lungimile celorlalte două laturi.



Ipoteză: ΔABC; $AB = 3$ cm; $P_{\Delta ABC} = 10\text{cm}$.

Concluzie: $AC = ?$; $BC = ?$.

Demonstrație: Problema se rezolvă în două cazuri.

Cazul 1: $AB \equiv AC \Longrightarrow AB = AC = 3\text{cm},\ P_{\Delta ABC} = AB + CA + BC = 10 \Longrightarrow 3 + 3 + BC = 10 \Longrightarrow BC = 4\text{cm};$

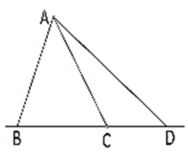
Cazul 2: $AC \equiv BC \Longrightarrow P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 10 \Longrightarrow 10 = 3 + 2 \cdot AC \Longrightarrow AC = 3{,}5\text{cm},\ BC = AC = 3{,}5\text{cm}.$

2. Câte triunghiuri determină patru puncte distincte două câte două?

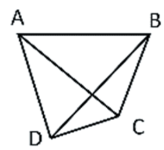
Ipoteză: patru puncte distincte două câte două.

Concluzie: Numărul de triunghiuri formate.

Demonstrație: Cazul 1: Punctele sunt coliniare. Nu se formează niciun triunghi.



Cazul 2: Numai trei dintre cele patru puncte sunt coliniare. În acest caz, se formează trei triunghiuri. În desen ele sunt: *ABC, ABD* și *ACD.*

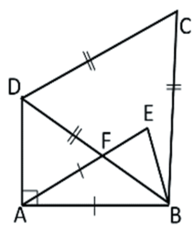


Cazul 3: Oricare trei dintre cele patru puncte sunt necoliniare. Se formează patru triunghiuri. În desen ele sunt: *ABC, ABD, ADC, BCD.*

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. **a)** Reprodu, pe caiet, desenul alăturat și scrie toate triunghiurile formate;

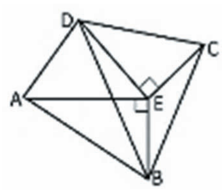


b) Identifică triunghiurile dreptunghice, isoscele și echilaterale, folosind instrumentele geometrice;

c) Pentru triunghiul dreptunghic, scrie catetele și ipotenuza;

d) Pentru triunghiul isoscel, scrie vârful și baza.

2. Realizează, pe caiet, desenul alăturat și scrie toate triunghiurile:



a) dreptunghice;

b) ascuțitunghice;

c) obtuzunghice.

3. Desenează un triunghi *ABC* și scrie:

a) unghiurile alăturate laturii *BC*; **b)** unghiul opus laturii *AB*; **c)** latura alăturată unghiurilor *A* și *B*.

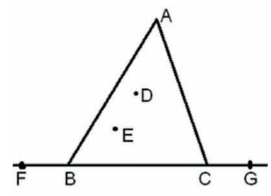
★★

4. În triunghiul *MNP*, laturile care formează unghiul *P* sunt congruente, iar una din ele este congruentă cu latura opusă unghiului *P*. **a)** Scrie congruența celor trei laturi. **b)** Desenează un triunghi *MNP,* folosind enunțul problemei și precizează cum se numește acest triunghi

5. Desenează un triunghi EFG:

a) dreptunghic isoscel, cu baza EF; **b)** obtuzunghic isoscel, cu baza EG.

6. Realizează, pe caiet, desenul din figura alăturată și stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.



a) D este în interiorul ΔABC; **b)** E este în exteriorul ΔABC;

c) $F \in \Delta ABC$; **d)** $\sphericalangle ACF$ este opus laturii AB;

e) FG este latură a ΔABC.

7. Calculează perimetrul triunghiului ale cărui laturi au lungimile:

a) 3 cm, 6 cm, 55 mm; **b)** 4 cm, 3 cm, 62 mm; **c)** 7 cm, 4 cm, 79 mm;

d) 3 cm, 40 mm, 5 cm; **e)** 3 cm, 3 cm, 4 cm; **f)** 2 cm, 2 cm, 2 cm.

8. Află lungimea unei laturi a unui triunghi, știind că: **a)** acesta are perimetrul de 14,5 cm și suma lungimilor celorlalte două laturi este de 9 cm; **b)** acesta are perimetrul de 18,5 cm și suma lungimilor celorlalte două laturi este 11 cm; **c)** acesta are semiperimetrul de 6 cm și suma lungimilor celorlalte două laturi este de 7 cm.

★★★

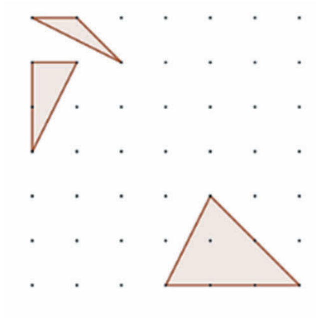
9. **a)** Un triunghi cu perimetrul de 65 m are lungimile laturilor proporționale cu numerele 2, 5 și 6. Află lungimile laturilor triunghiului.

b) Un triunghi cu perimetrul de 270 mm are lungimile laturilor proporționale cu numerele 3, 4 și 5. Află lungimile laturilor triunghiului.

10. Un triunghi isoscel are suma lungimilor a două laturi egală cu 7 cm și lungimea celei de-a treia laturi de 4 cm. Află perimetrul triunghiului. Câte soluții are problema?

LECȚIA 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Atenție, începem!



A1. Măsurați cu raportorul și apoi calculați suma măsurilor fiecăruia dintre cele trei triunghiuri din desenul dat. Este adevărată afirmația că suma măsurilor unui triunghi este $180°$?

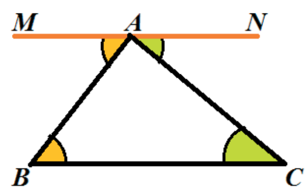
A2. a) Cu triunghiurile din imagine, decupate simultan din 10 bucăți de hârtie suprapuse, care au egale măsurile unghiurilor cu pată roz, ale unghiurilor cu pată galbenă, respectiv ale unghiurilor necolorate, s-a realizat mozaicul, în care vârfurile triunghiurilor sunt pe drepte paralele. Verificați afirmația făcută la activitatea **A1**, ținând seama că *suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct, de aceeași parte a unei drepte, este* $180°$.

Ce ne învață teoria?

1. *Teoremă*: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.

Ipoteza: un triunghi ABC. ***Concluzie***: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.

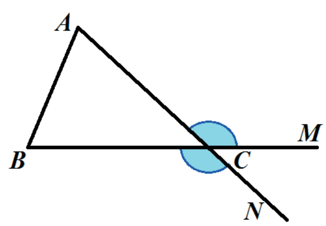
Demonstrație: Construim paralela prin A la BC (această construcție ajutătoare este sugerată de activitatea **A2**), pe care considerăm punctele M și N, cu A între M și N.



Remarcăm: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAM$ (unghiuri alterne interne formate de secanta AB, cu $BC \parallel MN$) și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CAN$ (unghiuri alterne interne formate de secanta AC, cu $BC \parallel MN$). Obținem:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAN + \sphericalangle BAM = 180°$$

2. Un unghi adiacent și suplementar unuia dintre unghiurile unui triunghi se numește ***unghi exterior al triunghiului.***



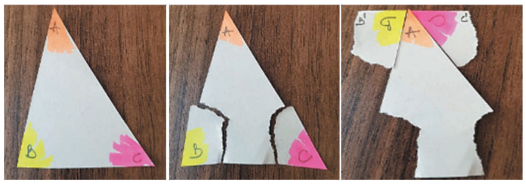
În figura alăturată, unghiurile ACM și BCN, adiacente și suplementare unghiului ACB, sunt exterioare triunghiului ABC.

Teorema unghiului exterior: Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

Ipoteza: Triunghiul ABC și unghiul ACM exterior lui.
Concluzia: $\sphericalangle ACM = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.
Demonstrație: Unghiul ACM este suplementul unghiului ACB, deci $\sphericalangle ACM + \sphericalangle ACB = 180°$.
Conform teoremei de la punctul 1, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle ACB = 180°$.
Obținem $\sphericalangle ACM = 180° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle A + \sphericalangle B$, adică $\sphericalangle ACM = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

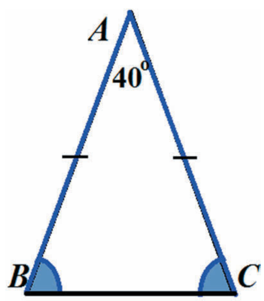
Să vedem ce am înțeles

Să decupăm un triunghi dintr-o foaie de hârtie și să-i rupem două colțuri. Apoi să le așezăm astfel încât să ne confirme afirmația de la teorema 1. Să le așezăm astfel încât să ne confirme și afirmația de la teorema 2!



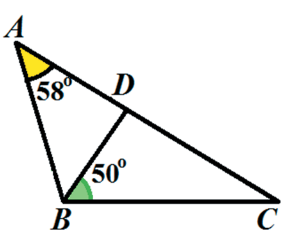
Învățăm să rezolvăm

1. Triunghiul ABC are unghiurile B și C congruente și măsura unghiului A este de $40°$. Determinați măsurile unghiurilor B și C.



Ipoteză: ΔABC; $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$; $\sphericalangle A = 40°$.
Concluzie: $\sphericalangle B = ?$, $\sphericalangle C = ?$
Demonstrație: Știm că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$. Din aceste două relații deducem că $\sphericalangle A + 2\cdot(\sphericalangle B) = 180° \Longrightarrow 40° + 2\cdot(\sphericalangle B) = 180°$ $\Longrightarrow 2\cdot(\sphericalangle B) = 180° \Longrightarrow \sphericalangle B = 140° \Longrightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C = 70°$.

2. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în D. Știind că $\sphericalangle BAC = 58°$ și $\sphericalangle CBD = 50°$, aflați măsurile necunoscute ale unghiurilor figurii geometrice.



Ipoteză: ΔABC; BD bisectoarea $\sphericalangle B$; $D \in AC$;
$\sphericalangle BAC = 58°$, $\sphericalangle CBD = 50°$.
Concluzie: $\sphericalangle ABD = ?$, $\sphericalangle ABC = ?$, $\sphericalangle BDC = ?$, $\sphericalangle BDA = ?$, $\sphericalangle C = ?$
Demonstrație: BD bisectoarea $\sphericalangle B \Longrightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = 50°$ și $\sphericalangle ABC = 2\cdot(\sphericalangle DBC) = 100°$. $\sphericalangle BDC$ este unghi exterior triunghiului ABD, deci $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DBA + \sphericalangle BAD = 50° + 58° = 108°$.
În ΔABD, avem $\sphericalangle BDA = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle ABD = 72°$.
În ΔABC, avem $\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B = 22°$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Determină unghiurile necunoscute ale triunghiului *ABC,* dacă:

a) $\sphericalangle C = 68°$ și ΔABC este dreptunghic în A ; **b)** $\sphericalangle A = 35°$ și $\sphericalangle C = 45°$;

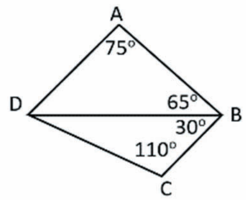
c) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$; **d)** $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle A = 35°$; **e)** $\sphericalangle B = 36°$ și $\sphericalangle C = 54°$.

2. Dacă măsura unuia dintre unghiurile unui triunghi este de $50°$, precizează dacă măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului pot fi:

a) $70°$ și $60°$; **b)** $49°$ și $71°$; **c)** $36°$ și $94°$; **d)** $65°$ și $65°$;

e) $90°$ și $40°$; **f)** $50°$ și $80°$.

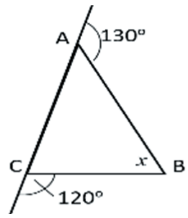
3. Determină măsurile unghiurilor *ADB* și *BDC* din figura alăturată.



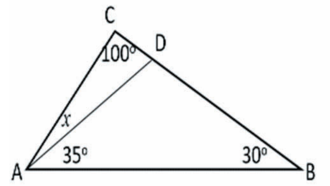
4. Se consideră un triunghi dreptunghic, cu unghiurile ascuțite congruente. Află măsura acestor unghiuri.

★★

5. Știind că *x* este măsura unghiului *B* din figura geometrică alăturată, determină *x*.



6. Știind că *x* este măsura unghiului *CAD* din figura geometrică alăturată, află *x*.

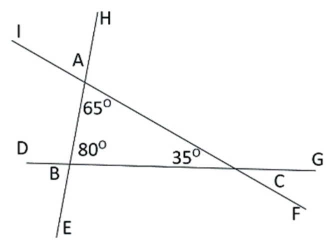


7. Realizează, pe caiet, desenul din figura alăturată.

a) Scrie toate unghiurile exterioare triunghiului *ABC*.

b) Determină măsura fiecăruia dintre cele șase unghiuri exterioare ale triunghiului *ABC* identificate la punctul **a)**. **c)** Arată că $\sphericalangle BAI = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$.

d) Precizează ce fel de unghiuri sunt unghiurile exterioare triunghiului *ABC,* $\sphericalangle BAI$ și $\sphericalangle CAH$, și compară măsurile lor.



8. În triunghiul dreptunghic *BAC*, cu $\sphericalangle BAC = 90°$, se construiește $AD \perp BC$, unde punctul *D* se găsește pe latura *BC*. Compară măsurile unghiurilor: **a)** *BAD* și *ACD*; **b)** *ABD* și *CAD*.

9. Se consideră un triunghi dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle C = 50°$. Știind că punctul *M* aparține perpendicularei duse prin *B* pe *BC*, de aceeași parte cu *A* față de *BC*, află măsura unghiului *ABM*.

★★★

10. Într-un triunghi *ABC*, măsura unghiului *A* este a treia parte din măsura unui unghi drept, iar măsura unghiului *B* este a treia parte din măsura unghiului *A*. Află măsurile unghiurilor triunghiului.

11. Un triunghi *ABC* are $\sphericalangle B = 2 \cdot (\sphericalangle A)$. Exprimă măsura unghiului *C* în funcție de cea a lui *A*.

12. Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi ascuțit este triplul măsurii celuilalt unghi ascuțit. Află măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

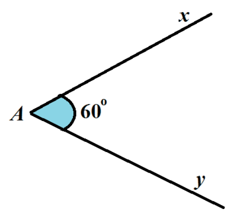
13. Într-un triunghi *ABC*, măsura unghiului *B* este triplul măsurii unghiului *A*, iar măsura unghiului *C* este dublul măsurii unghiului *B*. Arată că $10 \cdot (\sphericalangle A) = 180°$.

14. Determină natura triunghiului pentru care măsurile unghiurilor în grade sunt: *x*, 2*x* și 3*x*.

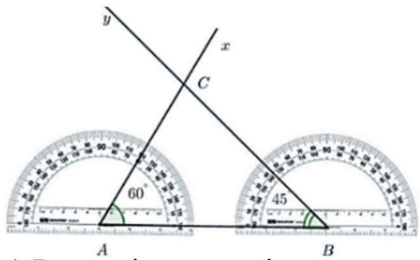
LECȚIA 3. Construcția triunghiurilor

Atenție, începem!

A1. Construiți cu raportorul unghiul xAy, cu măsura de $60°$. Cu deschiderea compasului de 5 cm și cu vârful în A, trasați cercul cu această rază și centrul în A și notați cu B punctul de intersecție cu semidreapta Ax. În același mod determinați punctul C pe semidreapta Ay, astfel încât $AC =$ 3 cm. Trasați segmentul BC. **a**) Măsurați lungimea laturii BC a triunghiului ABC astfel construit și comparați-o cu lungimea obținută de ceilalți colegi;



b) Repetați construcția anterioară, pornind de la un unghi de $90°$ și apoi de la unul de $120°$. Este posibilă această construcție, dacă unghiul xAy este alungit ?



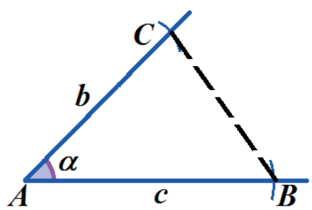
A2. Construiți segmentul AB cu lungimea de 4 cm. De aceeași parte a dreptei AB, trasați semidreptele Ax și By astfel încât $\sphericalangle ABy = 45°$ și $\sphericalangle BAx = 60°$. Notați cu C punctul de intersecție a celor două semidrepte. Măsurați celelalte elemente ale triunghiului ABC construit și comparați rezultatul obținut, cu colegii;

a) Repetați construcția pentru $\sphericalangle BAx = 60°$ și $\sphericalangle ABy = 90°$, apoi pentru $\sphericalangle BAx = 60°$ și $\sphericalangle ABy = 110°$. **b)** Este posibilă construcția pentru $\sphericalangle BAx = 60°$ și $\sphericalangle ABy = 120°$?

Ce ne învață teoria?

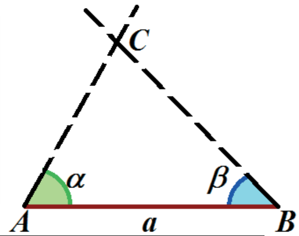
Cazurile de construcție a unui triunghi

1. Cazul **LUL** (latură, unghi, latură): Este suficient să cunoaștem măsura unui unghi (α) și lungimile (b, c) ale laturilor care îl formează, pentru a putea construi în mod unic triunghiul.



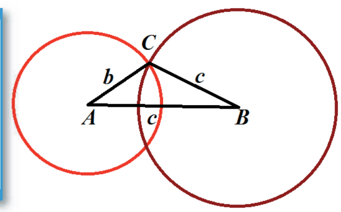
Pasul 1	*Pasul 2*	*Pasul 3*
Construim unghiul cu măsura α;	Pe una din laturile unghiului se fixează un punct, la distanța b de vârful unghiului, iar pe cealaltă latură se fixează un punct la distanța c de vârful unghiului.	Unim cele două puncte de la pasul 2 și notăm triunghiul obținut.

2. Cazul **ULU** (unghi, latură, unghi): Este suficient să cunoaștem lungimea unei laturi (c) și măsurile unghiurilor (α, β), cu vârfurile în capetele acestei laturi, pentru a putea construi în mod unic triunghiul.



Pasul 1	*Pasul 2*	*Pasul 3*
Construim segmentul de lungime a și notăm cu litere mari capetele segmentului	Construim unghiurile de măsuri α, respectiv β, cu vârfurile în capetele segmentului a și de aceeași parte a acestuia;	Notăm punctul de intersecție a celor două laturi, dacă există, și obținem triunghiul. Notăm triunghiul construit.

3. Cazul **LLL** (latură, latură, latură): Este suficient să cunoaștem lungimile: a, b, c (cu proprietatea că cea mai mare lungime este mai mică decât suma celorlalte), ale laturilor unui triunghi pentru a putea construi în mod unic triunghiul.



Pasul 1	*Pasul 2*	*Pasul 3*
Construim segmentul de lungime c;	Cu centrele în capetele segmentului construim cercurile cu razele de lungimi b, respectiv c;	Unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri, dacă există, este al treilea vârf al triunghiului. Notăm triunghiul obținut.

Să vedem ce am înțeles

1. Să construim triunghiul pentru care cunoaștem:

a) $\alpha = 30°$, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm (L.U.L.); b) $\alpha = 90°$, $\beta = 100°$, $c = 6$ cm (U.L.U.);

b) $a = 12$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm (L.L.L.);

2. Să construim un triunghi știind că el are un unghi de $30°$ și unul de $60°$.

Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră unghiurile $\sphericalangle ABC = 62°$ și $\sphericalangle ACB = 54°$. Aflați valoarea pe care o poate avea unghiul BAC, astfel încât punctele A, B, C să reprezinte vârfurile unui triunghi.

Ipoteză: $\sphericalangle ABC = 62°$; $\sphericalangle ACB = 54°$; A, B, C formează un triunghi.

Concluzie: $\sphericalangle BAC = ?$

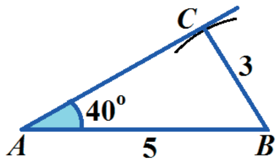
Demonstrație: Știm că suma măsurilor oricărui triunghi este egală cu $180°$. Deci, pentru ca punctele A, B, C să formeze un triunghi, este necesar ca $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC = 180°$. De aici, deducem că $62° + 54° + \sphericalangle BAC = 180° \Longrightarrow \sphericalangle BAC = 180°$.

2. Construiți un triunghi ABC, dacă se cunosc $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm și $\sphericalangle A = 40°$.

Rezolvare: Pentru construcția acestui triunghi se cunosc două laturi şi măsura unui unghi, dar nu a unghiului format de ele, ci a unghiului cu vârful în A, alăturat laturii AB (Nu suntem în niciunul dintre cazurile de construcţie ale triunghiului). Procedăm astfel:

1) construim latura AB de 5 cm;

2) construim o semidreaptă cu originea în A (deasupra sau sub AB) și care formează cu AB un unghi de $40°$;



3) cu deschiderea compasului 3 cm (lungimea laturii BC) și cu vârful în punctul B trasăm un arc de cerc care taie semidreapta cu originea în A, construită anterior. Punctul de intersecție dintre semidreaptă și arc este punctul C, al treilea vârf al triunghiului;

4) Unim punctele C și B și obținem triunghiul.

Acum să rezolvăm singuri!

1. Construiește triunghiul ABC, în care:

a) $\sphericalangle BAC = 40°$, $AC = 5$ cm și $AB = 3$ cm; **b)** $\sphericalangle ABC = 35°$, $AB = 7$ cm și $BC = 4{,}5$ cm;

c) $\sphericalangle ACB = 130°$, $AC = 5$ cm și $CB = 8$ cm.

2. Verifică dacă triunghiul ABC există și, în caz afirmativ, construiește-l:

a) $AB = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 65°$ și $\sphericalangle BAC = 80°$; **b)** $BC = 7$ cm, $\sphericalangle ABC = 47°$ și $\sphericalangle ACB = 45°$;

c) $AC = 5$ cm, $\sphericalangle ACB = 30°$ și $\sphericalangle BAC = 120°$; **d)** $AB = 3$ cm, $\sphericalangle ABC = 90°$ și $\sphericalangle BAC = 95°$.

3. Verifică dacă triunghiul ABC există și, în caz afirmativ, construiește-l:

a) $AB = 3{,}5$cm, $BC = 2$ cm și $AC = 5$ cm; **b)** $AB = 1{,}8$ cm, $BC = 4{,}5$ cm și $AC = 2{,}4$ cm;

c) $AB = 5$ cm, $BC = 2{,}7$ cm și $AC = 2$ cm.

4. Construiește triunghiul ABC, dreptunghic în A, în care:

a) $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm; **b)** $AB = AC = 5$ cm;

c) $AB = 3$ cm și $\sphericalangle ABC = 30°$; **d)** $AC = 4$ cm și $\sphericalangle ACB = 45°$.

5. Construiește triunghiul isoscel ABC, cu vârful în A, în care:

a) $AB = 4$ cm și $\sphericalangle A = 40°$; **b)** $\sphericalangle A = 90°$ și $AC = 3{,}5$ cm;

c) $\sphericalangle A = 120°$ și $AB = 3$ cm; **d)** $AB = 5$ cm și $BC = 3$ cm.

6. Construiește triunghiul echilateral:

a) ABC, știind că $AB = 3$ cm; **b)** DEF, știind că $EF = 4$ cm.

7. Precizează dacă se poate construi un triunghi ale cărui laturi să aibă lungimile:

a) 10 cm, 6 cm,8 cm; **b)** 75 mm, 0,6 dm, 6,5 cm;

c) 35 dm, 8 m, 65 cm; **d)** 65 mm, 4 cm, 2 cm.

8. Precizează dacă se poate construi un triunghi ABC, dacă:

a) $AB = 3{,}7$ cm, $\sphericalangle BAC = 110°$ și $\sphericalangle ABC = 50°$; **b)** $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 73°$ și $\sphericalangle BCA = 90°$;

c) $AC = 5$ cm, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 40°$, **d)** $AB = 4{,}2$ cm, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 60°$.

9. Construiește un triunghi ABC, cunoscând: $\sphericalangle A = 110°$, $AB = 5$ cm și $BC = 4$ cm. Câte soluții sunt?

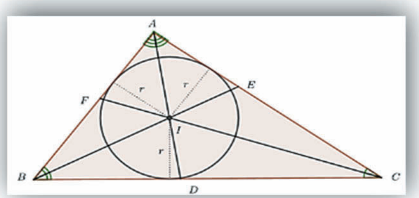
LECȚIA 4. Linii importante în triunghi

Atenție, începem!

A1. a) Construiți bisectoarele unghiurilor *A*, *B* ale triunghiului *ABC* și notați cu *I* punctul lor de intersecție. **b)** Trasați semidreapta *CI* și verificați cu raportorul dacă unghiurile *ACI* și *BCI* sunt congruente. Este adevărată afirmația că cele trei bisectoare ale triunghiului sunt concurente?
c) Construiți *P, Q, R* picioarele perpendicularelor din *I* pe *BC*, *AC*, respectiv *AB*. Stabiliți dacă segmentele *IP*, *IQ*, *IR* sunt congruente, prin măsurare cu rigla, și precizați dacă punctul *I* este egal depărtat de laturile triunghiului *ABC*.
A2. a) Construiți mediatoarele laturilor *AB, AC* ale triunghiului ascuțitunghic *ABC* și notați cu *O* punctul lor de intersecție. Construiți apoi, cu rigla negradată și cu compasul, mediatoarea laturii *BC* și stabiliți dacă cele trei mediatoare sunt concurente. **b)** Repetați construcția de la punctul **a)** pentru un triunghi dreptunghic și apoi pentru un triunghi obtuzunghic;
c) Pentru fiecare triunghi din cele trei construcții, măsurați segmentele *OA, OB*, *OC* și stabiliți dacă punctul *O* este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

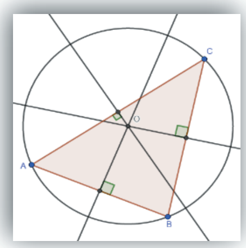
Ce ne învață teoria?

1. ***Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente***. Punctul lor de intersecție se notează cu *I* . El se află la egală distanţă de laturile triunghiului şi este ***centrul cercului înscris în triunghi***.

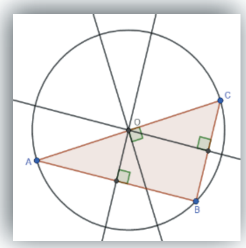


2. ***Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente***. Punctul lor de intersecție se notează cu *O*. El este la egală distanţă de vârfurile triunghiului şi este ***centrul cercului circumscris triunghiului.***

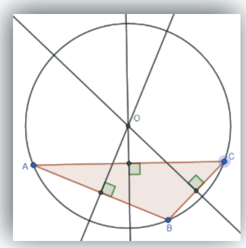
1. Triunghi oarecare



2. Triunghi dreptunghic

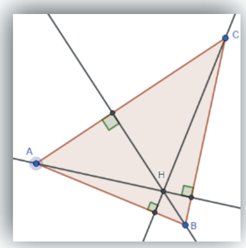


3. Triunghi obtuzunghic

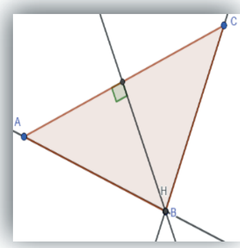


3. Un segment determinat de un vârf al unui triunghi și de piciorul perpendicularei din acel vârf pe latura opusă se numește ***înălțime*** a triunghiului. Dreptele care conțin ***înălțimile unui triunghi sunt concurente***, punctul lor de intersecție se numește ***ortocentru*** și se notează cu H.

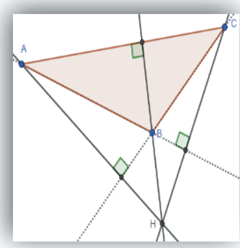
1. Triunghi oarecare



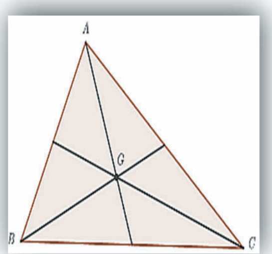
2. Triunghi dreptunghic



3. Triunghi obtuzunghic



4. Un segment determinat de un vârf al unui triunghi și de mijlocul laturii opuse se numește ***mediană*** a triunghiului. ***Medianele unui triunghi sunt concurente***, punctul lor de intersecție se numește ***centrul de greutate*** al triunghiului și se notează cu G. Centrul de greutate al triunghiului se află, pe fiecare mediană, la o treime de bază și la două treimi de vârf.



Să vedem ce am înțeles

1. Fie triunghiul PQR oarecare. Să construim mediatoarea laturii PQ, bisectoarea unghiului PRQ, mediana din R şi înălţimea din R.
2. Într-un triunghi să precizăm pozițiile celor trei:
a) bisectoare; **b)** mediane; **c)** mediatoare; **d)** înălțimi.

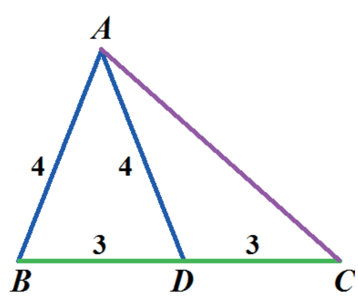
Învățăm să rezolvăm

1. Construiți un triunghi ABC, știind că are $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm și mediana $AD = 4$ cm.

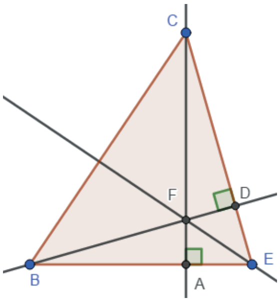
Ipoteză: $AB = 4$ cm; $CB = 6$ cm; D mijlocul lui BC; $AD = 4$ cm.

Concluzie: construiți ΔABC.

Demonstrație: Construim segmentul BC. Pentru că AD este mediană, înseamnă că D este mijlocul lui BC și $BD = BC : 2 = 3$ cm. Construim mai întâi triunghiul ABD, căruia îi cunoaștem toate laturile. Apoi, prelungim latura BD cu segmentul de aceeași lungime DC. Unim A cu C și se obține ΔABC.



2. Triunghiurile ABC și DBC sunt dreptunghice în A, respectiv în D și punctele A, D sunt de aceeași parte a dreptei BC. Demonstrați că $BC \perp EF$, știind că $AB \cap CD = \{E\}$ și $AC \cap BD = \{F\}$.



Ipoteza: ΔABC cu $A = 90^\circ$; ΔDBC cu $D = 90^\circ$; A, D de aceeași parte a lui BC; $AB \cap CD = \{E\}, AC \cap BD = \{F\}$.

Concluzie: $BC \perp EF$.

Demonstrație: Deoarece ΔABC este dreptunghic în A, deducem că $CA \perp AB \Longrightarrow CA \perp BE$; analog, ΔDBC este dreptunghic în D și $BD \perp DC \Longrightarrow BD \perp CE$. Atunci, CA și BD sunt înălțimi ale ΔBCE.

Deci $\{F\} = AC \cap BD$ va fi ortocentrul acestui triunghi. Cum $F \in EF$, deducem că EF este a treia înălțime a triunghiului și rezultă că $BC \perp EF$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Desenează în triunghiul ABC**:** bisectoarea unghiului A, mediatoarea laturii BC, înălțimea dusă din vârful A și mediana dusă din punctul A, dacă: **a)** triunghiul ABC este ascuțitunghic; **b)** triunghiul ABC este dreptunghic în A; **c)** unghiul A este obtuz.

2. Construiește triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor sale și marchează centrul cercului înscris în triunghi, știind că:

a) $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm și $AC = 5$ cm; **b)** $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $\sphericalangle B = 70^\circ$;

c) $AB = AC = 4$ cm și $\sphericalangle B = 42^\circ$; **d)** $AB = AC = 4$ cm și $\sphericalangle A = 42^\circ$.

3. Triunghiul ABC are $AB = 8{,}4$ cm, $\sphericalangle A = 35^\circ$ și $\sphericalangle B = 25^\circ$. **a)** Află măsura unghiului C ;

b) Construiește triunghiul, trasează mediatoarele laturilor sale și precizează dacă centrul cercului circumscris triunghiului este interior sau exterior triunghiului ABC.

★★

4. Triunghiul ABC are: $AB = 5$ cm, $\sphericalangle B = 75^\circ$ și $\sphericalangle C = 30^\circ$. **a)** Află măsura unghiului A;

b) Construiește triunghiul, trasează mediatoarele sale și precizează dacă centrul cercului circumscris triunghiului este interior sau exterior triunghiului ABC.

5. Desenează triunghiul ABC, înălțimile sale și ortocentrul H, în cazurile:

a) $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm și $\sphericalangle BAC = 80^\circ$; **b)** $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm și $\sphericalangle BAC = 90^\circ$;

c) $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm și $\sphericalangle BAC = 100^\circ$; **d)** $AB = AC = 4$ cm și $BC = 6$ cm;

e) $AB = AC = BC = 4$ cm; **f)** triunghiul este isoscel, cu baza $BC = 6$ cm și $AC = 4$ cm.

6. Construiește un triunghi ABC și medianele sale și marchează centrul de greutate, în următoarele cazuri:

a) $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 3$cm; **b)** $AB = 6$ cm, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 70^\circ$;

c) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $AB = 5$ cm și $AC = 3$ cm.

★★★

7. În triunghiul ABC, unghiul A are 90°, iar bisectoarele unghiurilor B și C sunt concurente în punctul I. Calculează: **a)** măsura unghiului BAI; **b)** suma măsurilor unghiurilor CBI și BCI.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Intersecția medianelor unui triunghi se numește

h)	i)	j)	k)
centrul cercului înscris	centru de greutate	centrul cercului circumscris	ortocentru

2. Intersecția bisectoarelor unui triunghi se numește

q)	r)	s)	t)
ortocentru	centrul cercului circumscris	centrul cercului înscris	centru de greutate

3. Intersecția mediatoarelor unui triunghi se numește

o)	p)	q)	r)
centrul cercului înscris	centru de greutate	centrul cercului circumscris	ortocentru

4. Intersecția înălțimilor unui triunghi se numește

q)	r)	s)	t)
ortocentru	centrul cercului circumscris	centrul cercului înscris	centru de greutate

5. Ortocentrul unui triunghi coincide cu un vârf al triunghiului

a)	b)	c)	d)
echilateral	ascuțitunghic	dreptunghic	obtuzunghic

6. Ortocentrul triunghiului se află în exteriorul triunghiului

e)	f)	g)	h)
echilateral	ascuțitunghic	dreptunghic	obtuzunghic

7. Centrul de greutate se află întotdeauna

k)	l)	m)	n)
la intersecția mediatoarelor	în interiorul triunghiului	în unghiul drept al triunghiului	în exteriorul triunghiului

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care, fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Triunghiul care are toate laturile de lungimi diferite se numește ... .

10p **2.** Un unghi adiacent și suplementar cu un unghi al unui triunghi se numește unghi ... acelui triunghi.

10p **3.** Punctul de intersecție a înălțimilor unui triunghi se numește ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Unghiul C al unui triunghi ABC, în care $\sphericalangle A = 50^\circ$ și $\sphericalangle B = 82^\circ$, are măsura de:

a) 90°; **b)** 72°; **c)** 58°; **d)** 48°.

10p **2.** Dacă măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt direct proporționale cu 2 și 3. Atunci ele sunt:

a) 36° și 54°; **b)** 30° și 60°; **c)** 36° și 64°; **d)** 72° și 108°.

10p **3.** În triunghiul ABC, AM este mediană cu $M \in BC$ și $BM = 3,8$ cm. Lungimea laturii BC este:

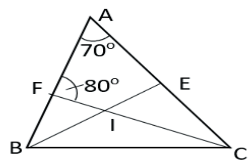
a) 76 cm; **b)** 6,6 cm; **c)** 7,6 cm ; **d)** 6,8 cm.

III. Pe foaia de rezolvare scrie, rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Construiți triunghiul ABC, cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $\sphericalangle A = 75^\circ$ și ortocentrul acestuia.

10p **2.** În desenul alăturat, BE este bisectoarea unghiului ABC, CF este bisectoarea unghiului ACB, $BE \cap CF = \{I\}$.

Știind că $\sphericalangle BAC = 70^\circ$ și $\sphericalangle CFA = 80^\circ$, determinați măsura unghiului FIE.



10p **3.** Se consideră triunghiul ABC, cu $\sphericalangle ABC = 130^\circ$, $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ și înălțimile AA' cu $A' \in BC$ și CC', cu $C' \in AB$. Realizați desenul și determinați măsurile unghiurilor $A'AB$, $C'CB$ și a unghiului format de dreptele AA' și CC'.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Un triunghi ale cărui unghiuri au măsurile mai mici de 90^o se numește ... .

10p **2.** Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu ... măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente lui.

10p **3.** Punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor unui triunghi este centrul cercului ... în triunghi.

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit cu măsura de 42^o. Măsura celuilalt unghi ascuțit este de:

a) 48^o; **b)** 58^o; **c)** 90^o; **d)** 52^o.

10p **2.** Unghiurile unui triunghi au măsurile invers proporționale cu numerele: 6, 4 și 3. Măsurile acestora sunt:

a) 30^o, 60^o, 90^o; **b)** 40^o, 60^o, 80^o; **c)** 45^o, 55^o, 80^o; **d)** 70^o, 60^o, 50^o.

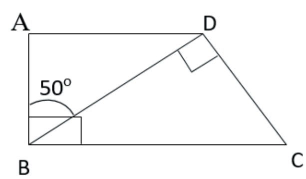
10p **3.** Un triunghi ABC are $AB = 6$cm, $AC = 3,4$cm și perimetrul de 15,2 cm. Lungimea laturii BC este de:

a) 6,2 cm; **b)** 6,8 cm; **c)** 5,8 cm ; **d)** 7,8 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Construiți un triunghi *ABC* cu *BC* = 5 cm, $\sphericalangle B = 64^\circ$ și $\sphericalangle C = 50^\circ$ și centrul de greutate al acestuia.

10p **2.** În figura alăturată, dreptele *AD* și *BC* sunt paralele, unghiurile *ABC* și *BDC* sunt drepte, iar unghiul *ABD* are măsura de 50^o. Determinați măsurile unghiurilor triunghiurilor *ABD* și *BDC*.



10p **3.** În triunghiul *ABC* se dau: măsura unghiului *A* de 50^o și $\sphericalangle B = 90^\circ + (\sphericalangle C)$. Se construiește înălțimea *AD*, cu $D \in BC$. Realizați desenul și determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABD.

Unitatea de învățare: Congruențe

LECȚIA 5. Congruența triunghiurilor oarecare

Atenție, începem!

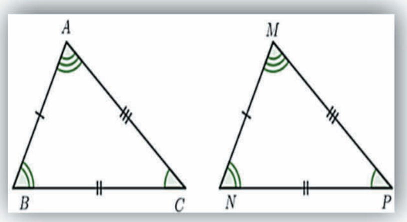
Ne amintim că două figuri geometrice care, prin suprapunere coincid, se numesc *figuri geometrice congruente.*

A1. Imaginându-vă că pliaţi steluța de hârtie din desenul alăturat, după axa sa de simetrie, identificaţi perechi de triunghiuri de culoare deschisă, respectiv de culoare închisă, congruente (care coincid prin suprapunere).

A2. Comparați triunghiul cu vârfurile roșii și cel cu vârfurile albastre, din imaginea alăturată, care au lungimile laturilor respectiv egale. Stabiliţi dacă sunt congruente. Dacă răspunsul este afirmativ, ce puteți spune despre congruența perechilor de unghiuri?

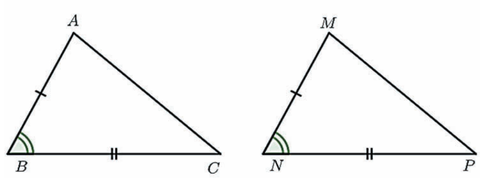
Ce ne învață teoria?

1. Două triunghiuri sunt ***congruente*** dacă au laturile și unghiurile, respectiv congruente.
Perechile de laturi sau de unghiuri respectiv congruente se numesc ***laturi, respectiv unghiuri omoloage*** ale triunghiurilor congruente.



De exemplu: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ înseamnă prin definiție: $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$, $CA \equiv PM$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$.

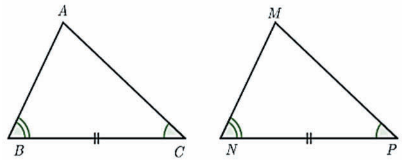
Criteriul LUL (latură, unghi, latură) de congruență a triunghiurilor.



Dacă un unghi al unui triunghi este congruent cu un unghi al altui triunghi și laturile care îl formează sunt respectiv congruente cu laturile care formează unghiul congruent cu el, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$AB \equiv MN, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, BC \equiv NP \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

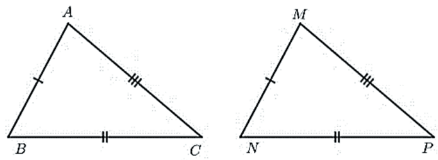
Criteriul ULU (unghi, latură, unghi) de congruență a triunghiurilor



Dacă o latură a unui triunghi este congruentă cu o latură a altui triunghi și unghiurile alăturate ei sunt respectiv congruente cu unghiurile alăturate laturii congruente cu ea, din celălalt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, BC \equiv NP, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

Criteriul LLL (latură, latură, latură) de congruență a triunghiurilor



Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

$$AB \equiv MN, BC \equiv NP, CA \equiv PM \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

Remarcă: Putem considera şi ***Criteriul LUU*** *(latură, unghi, unghi).*
Dacă o latură a unui triunghi este congruentă cu o latură a altui triunghi, un unghi alăturat şi un unghi opus ei sunt respectiv congruente cu unghiul alăturat, respectiv unghiul opus laturii congruente cu ea, din celălalt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

Exemplu: $AB \equiv MN$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

Demonstrație: Din $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P = 180^{\circ}$ şi din $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$. Acum avem $AB \equiv MN$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \underset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să scriem care elemente sunt congruente, dacă **a)** $\Delta SAC \equiv \Delta MOP$; **b)** $\Delta BUZ \equiv \Delta DOR$.
2. Să scriem congruenţa triunghiurilor, dacă $MS \equiv AV$, $TM = TV$ şi $ST \equiv TA$.
3. Să desenăm două triunghiuri necongruente care au două laturi şi câte un unghi respectiv congruente.

Învățăm să rezolvăm

1. Două triunghiuri echilaterale, cu perimetre egale sunt congruente? Justificați.

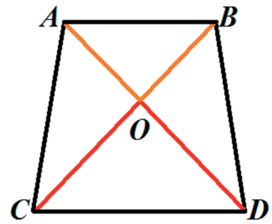
Ipoteză: ΔABC și ΔMNP echilaterale; $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta MNP}$.

Concluzie: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

Demonstrație: Notăm cu l lungimea laturilor triunghiului ABC și cu l' lungimea laturilor triunghiului MNP și avem $P_{\Delta ABC} = 3l$ și $P_{\Delta MNP} = 3l'$. Din $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta MNP} \Rightarrow 3l = 3l' \Rightarrow l = l'$.

Adică, $AB = AC = BC = MN = MP = NP$. De unde, $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, conform cazului de congruență *L.L.L.*

2. În figura alăturată avem: $AD \cap BC = \{O\}$, $AO \equiv OB$ și $CO \equiv OD$.



Arătați că $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$.

Ipoteza: $AO \equiv OB$, $CO \equiv OD$.

Concluzie: $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$.

Demonstrație: $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$ (unghiuri opuse la vârf). Atunci:

$AO \equiv OB,\ CO \equiv OD,\ \sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC \underset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta AOD \equiv \Delta BOC.$

Acum să rezolvăm singuri!

1. Pentru triunghiurile ABC și DEF, precizează care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și justifică răspunsul dat:

a) $AB \equiv DE,\ BC \equiv EF,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

b) $AB \equiv DE,\ BC \equiv EF,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle D \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

c) $AB \equiv DE,\ BC \equiv EF,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle F \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

d) $AC \equiv DF,\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D,\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

e) $AB \equiv DE,\ BC \equiv EF,\ AC \equiv DF \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

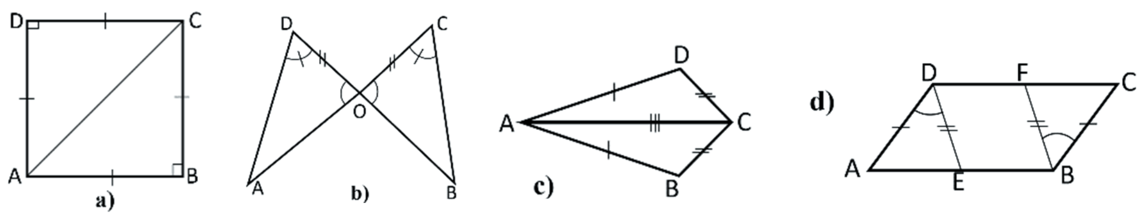
2. Pentru triunghiurile congruente IJK și LMN s-au scris câte trei congruențe ale elementelor acestora. Scrie congruențele lipsă:

a) $JK \equiv MN,\ \sphericalangle J \equiv \sphericalangle M,\ \sphericalangle K \equiv \sphericalangle N$; **b)** $IK \equiv LN,\ IJ \equiv LM,\ \sphericalangle I \equiv \sphericalangle L$;

c) $IJ \equiv LM,\ JK \equiv MN,\ IK \equiv LN$; **d)** $JK \equiv MN,\ IK \equiv LN,\ \sphericalangle K \equiv \sphericalangle N$;

e) $IJ \equiv LM,\ \sphericalangle I \equiv \sphericalangle L,\ \sphericalangle J \equiv \sphericalangle M$; **f)** $JK \equiv MN,\ IJ \equiv LM,\ \sphericalangle J \equiv \sphericalangle M$.

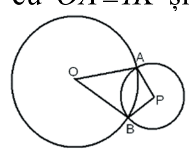
3. Identifică, în figurile de mai jos, perechile de triunghiuri congruente după marcajele elementelor lor, folosind criteriile de congruență a triunghiurilor și apoi scrie congruențele elementelor lor.



4. Triunghiurile echilaterale ABC și MNP au $BC \equiv NP$. Arată că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

5. Se consideră triunghiurile AOB și KIJ dreptunghice în O și, respectiv I, cu $OA \equiv IK$ și $OB \equiv IJ$. Arată că $\Delta AOB \equiv \Delta KIJ$.

6. Demonstrează că triunghiurile OAP și OBP din desenul alăturat sunt congruente.

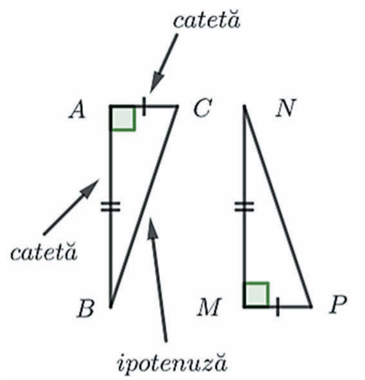


7. Se consideră ΔABC cu $AB \equiv AC$. Pe laturile AB și AC ale triunghiului se construiesc în exterior ΔDAB și ΔEAC. Dacă $\Delta DAB \equiv \Delta EAC$, atunci arată că $\Delta DAC \equiv \Delta EAB$.

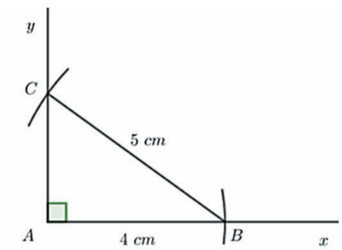
LECȚIA 6. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Atenție, începem!

Ne amintim că laturile triunghiului dreptunghic care formează unghiul drept se numesc catete, iar latura opusă unghiului drept se numeşte ipotenuză.



A1. Două triunghiuri dreptunghice au unghiurile drepte congruente. De aceea, pentru stabilirea unei congruențe între două triunghiuri dreptunghice, este suficient să identificăm, conform cazurilor de congruenţă ale triunghiurilor oarecare, încă două congruențe între elementele lor.
*Exemplu.*Triunghiurile dreptunghice din figura alăturată, cu catetele respectiv congruente, sunt congruente, conform criteriului LUL. Acest criteriu de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice se numeşte criteriul *catetă, catetă* (CC);
Stabiliţi criteriul de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice dedus din criteriul ULU al congruenţei triunghiurilor. Ce alte perechi de elemente congruente trebuie să aibă două triunghiuri dreptunghice pentru a fi congruente conform cazului ULU?



A2. a) Pe semidreapta *Ax* a unui unghi drept *xAy*, luați segmentul *AB* cu lungimea de 4 cm, iar cu vârful compasului în *B* şi deschiderea de 5 cm descrieți un arc de cerc care să intersecteze semidreapta *Ay* în *C*. Uniți punctele *B* și *C* şi aţi construit triunghiul dreptunghic *BAC*;

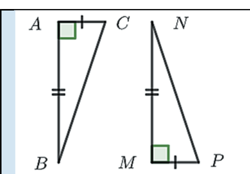
b) Repetați construcția anterioară, pentru cateta $AB = 5$ cm și ipotenuza $BC = 13$ cm;

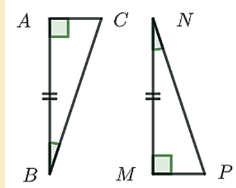
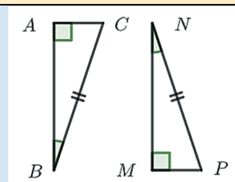
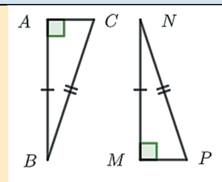
c) Din construcţiile de la punctele **a)** şi **b)**, se deduce că un triunghi dreptunghic poate fi construit cunoscând numai o catetă și ipotenuza. Numiţi criteriul de congruență a triunghiurilor dreptunghice obţinut din cazul de construcţie descris.

Ce ne învață teoria?

Criteriul CC (catetă, catetă): Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l} AB \equiv MN \\ AC \equiv MP \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



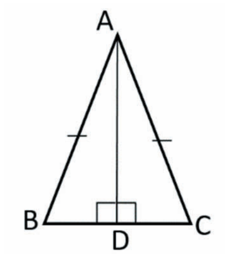
Criteriul CU (catetă, unghi ascuţit): Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente sunt congruente. *Exemplu*: $\left.\begin{matrix} AB \equiv MN \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$	
Criteriul IU (ipotenuză, unghi ascuţit): Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente. *Exemplu*: $\left.\begin{matrix} BC \equiv NP \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$	
Criteriul IC (ipotenuză, catetă): Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente sunt congruente. *Exemplu*: $\left.\begin{matrix} BC \equiv NP \\ AB \equiv MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$	

Să vedem ce am înțeles

1. Să demonstrăm că, dacă două triunghiuri dreptunghice isoscele au ipotenuzele congruente, atunci ele sunt congruente.
2. Să demonstrăm că, dacă două triunghiuri dreptunghice au toate unghiurile respectiv congruente, nu rezultă că ele sunt congruente.
3. Să demonstrăm că există două triunghiuri dreptunghice necongruente care au ipotenuzele congruente.

Învățăm să rezolvăm

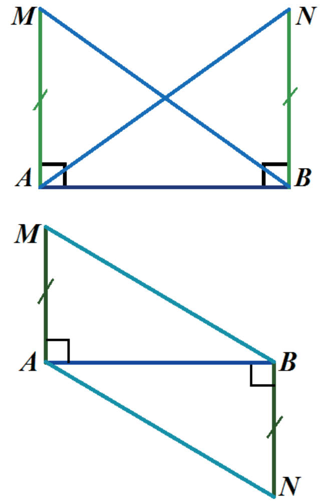
1. Se consideră un triunghi isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$ și înălțimea AD, unde $D \in AB$. Arătați că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.



Ipoteză: ΔABD isoscel; $AB \equiv AC$; $AD \perp BC$, $D \in AB$.
Concluzie: $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.
Demonstrație: $AD \perp BC \Rightarrow$ triunghiurile ADB și ADC dreptunghice în D.
Atunci:

$$\left.\begin{matrix} \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ \\ AD \equiv AD \\ AB \equiv AC \end{matrix}\right\} \underset{C.I.}{\Rightarrow} \Delta ADB \equiv \Delta ADC$$

2. Segmentul AB și perpendicularele $MA \perp AB$ și $NB \perp AB$ sunt astfel încât $MA \equiv NB$. Arătați că $\Delta MAB \equiv \Delta NBA$.



Ipoteză: $MA \perp AB$; $NB \perp AB$; $MA \equiv NB$.

Concluzie: $\Delta MAB \equiv \Delta NBA$.

Demonstrație: Problema are două cazuri, după cum punctele M și N sunt de aceeași parte sau de o parte și de alta a dreptei AB. Pentru că $MA \perp AB$ și $NB \perp AB$, deducem că triunghiurile MAB și NBA sunt dreptunghice. Atunci, pentru ambele situații ilustrate în desenul alăturat, avem:

$$\left.\begin{array}{l} MA \equiv NB \\ AB \equiv AB \\ \sphericalangle MAB = \sphericalangle NBA = 90^\circ \end{array}\right\} \underset{C.C.}{\Rightarrow} \Delta MAB \equiv \Delta NBA.$$

Acum să rezolvăm singuri!

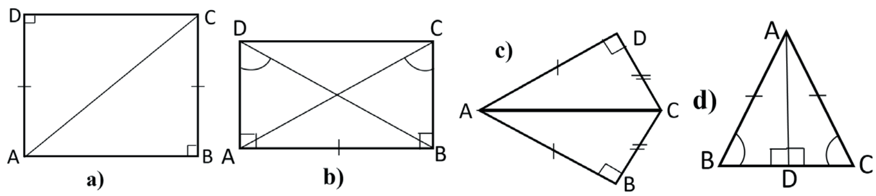
1. Pentru triunghiurile ABC și DEF dreptunghice în A și, respectiv D, completează spațiul punctat cu încă o condiție, astfel încât să se obțină afirmații adevărate:

a) $AB \equiv DE$, ... $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$; **b)** $BC \equiv EF$, ... $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

c) $AC \equiv DF$, ... $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$; **d)** ..., $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$;

e) ..., $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

2. Identifică, în figurile de mai jos, perechile de triunghiuri dreptunghice congruente după marcajele elementelor lor, apoi demonstrează folosind criteriile de congruență și scrie congruențele elementelor lor.



3. Se consideră ΔABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $C' \in AC$, astfel încât A să fie mijlocul segmentului CC'. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta ABC'$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$ și înălțimile $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, cu $E \in AC$ și $F \in AB$. Arată că $\Delta AEB \equiv \Delta AFC$.

5. Se consideră un unghi A și un punct D pe bisectoarea acestuia. Perpendiculara în D pe bisectoare intersectează laturile unghiului în punctele B și C.

a) Demonstrează că $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$;

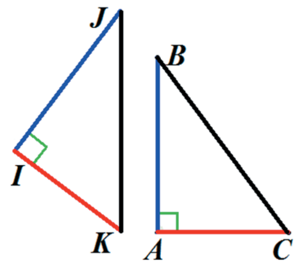
b) Dacă $AB = 8$ cm și $BD = 6$ cm, calculează perimetrul triunghiului ABC.

LECȚIA 7. Metoda triunghiurilor congruente

Atenție, începem!

A1. Mihai are de rezolvat următoarea problemă, prin metoda triunghiurilor congruente: *Triunghiurile dreptunghice CAB și KIJ au* $\sphericalangle A = \sphericalangle I = 90^\circ$, $AB \equiv IJ$ *și* $AC \equiv IK$. *Demonstrați că* $BC \equiv JK$.

Iată planul lui Mihai de rezolvare a problemei:



a) Citim cu atenție enunțul pentru a identifica congruențe și alte relații între elementele cunoscute din cele două triunghiuri (*ipoteza*), precum și elementele necunoscute, care trebuie aflate (*concluzia*);

b) Construim cele două triunghiuri, pe baza datelor cunoscute, marcăm perechile de laturi congruente și de unghiuri congruente, din cele două triunghiuri, în același fel, apoi scriem *ipoteza* și *concluzia;*

c) Identificăm criteriul de congruență a triunghiurilor pe care îl aplicăm și redactăm demonstrația, în spațiul marcat cu *demonstrație*.

Ipoteză: $\sphericalangle A = \sphericalangle I = 90^\circ$, $AB \equiv IJ$, $AC \equiv IK$. *Concluzie*: $BC \equiv JK$.

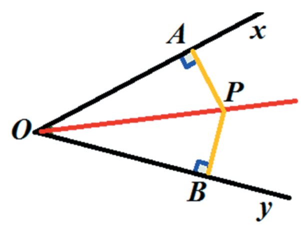
Demonstrație: $\sphericalangle A = \sphericalangle I = 90^\circ$, $AB \equiv IJ$, $AC \equiv IK \overset{c.c.}{\Rightarrow} \Delta CAB \equiv \Delta KIJ \Longrightarrow BC \equiv JK$.

Criteriul de congruență a triunghiurilor dreptunghice a permis scrierea congruenței triunghiurilor *CAB* și *KIJ*, iar definiția congruenței a două triunghiuri a permis scrierea congruențelor elementelor corespunzătoare din cele două triunghiuri, care nu se regăsesc în ipoteză.

A2. Rezolvați problema lui Mihai, dar cu următorul enunț: Triunghiurile dreptunghice *CAB* și *KIJ* au $\sphericalangle A = \sphericalangle I = 90^\circ$, $AB \equiv IJ$ și $BC \equiv JK$. Demonstrați că $AC \equiv IK$.

Ce ne învață teoria?

> ***Metoda triunghiurilor congruente*** se folosește pentru stabilirea congruențelor între elementele corespunzătoare a două triunghiuri, prin demonstrarea congruenței acestora, pe baza definiției și a unui criteriu de congruență a triunghiurilor.

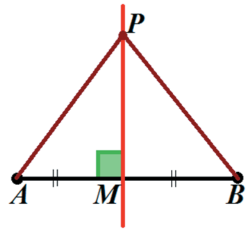


Aplicația 1**: **Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi:
Dacă un punct aparține bisectoarei unui unghi, atunci el este egal depărtat de laturile unghiului.

Pentru demonstrarea proprietății, considerăm unghiul xOy, un punct oarecare P pe bisectoarea acestuia și distanțele PA, PB de la P laturile unghiului, $A \in Ox$, $B \in Oy$.

Ipoteză: $PA \perp Ox,\ A \in Ox,\ PB \perp Oy,\ B \in Oy,\ \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$. ***Concluzie***: $PA = PB$.

Demonstrație: ΔOAP, ΔOPB sunt dreptunghice în A, respectiv B și $OP \equiv OP,\ \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$ $\overset{IU}{\Rightarrow} \Delta OAP \equiv \Delta OBP \Rightarrow PA = PB$.



Aplicația 2: ***Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment***: Dacă un punct aparține mediatoarei unui segment, atunci el este egal depărtat de capetele segmentului.

Pentru demonstrarea proprietății considerăm segmentul AB, mijlocul M al acestuia, mediatoarea d și un punct oarecare P al mediatoarei.

Ipoteză: $MA \equiv MB,\ M \in AB,\ d \perp AB,\ d \cap AB = \{M\},\ P \in d$.

Concluzie: $PA \equiv PB$.

Demonstrație: Dacă $P = M$, proprietatea este evident adevărată. Analizăm cazul $P \neq M$.

ΔPMA și ΔPMB sunt dreptunghice în M, conform ipotezei.

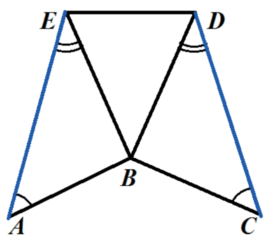
$PM \equiv PM,\ MA \equiv MB \overset{CC}{\Rightarrow} \Delta PMA \equiv \Delta PMB \Rightarrow PA \equiv PB$.

Să vedem ce am înțeles

1. Să demonstrăm că mediatoarea segmentului este axă de simetrie a acestuia.
2. Să demonstrăm că bisectoarea unghiului este axă de simetrie a acestuia.
3. Să demonstrăm că intersecția a două mediatoare ale laturilor unui triunghi se află pe mediatoarea celei de-a treia laturi.

Învățăm să rezolvăm

1. În figura geometrică alăturată, avem $AE \equiv CD$, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle BDC$. Demonstrați că: **a)** $AB \equiv BC$; **b)** triunghiul DBE este isoscel cu vârful B.



Ipoteză: $AE \equiv CD$; $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCD$; $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle BDC$.

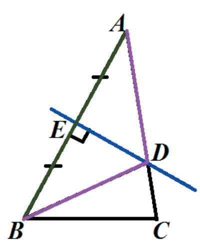
Concluzie: **a)** $AB \equiv BC$; **b)** $BE \equiv BD$.

Demonstrație: ***a)*** $AE \equiv CD,\ \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BCD,\ \sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle BDC \underset{U.L.U.}{\Rightarrow}$

$\Delta ABE \equiv \Delta CBD \Rightarrow AB \equiv BC$.

b) Din faptul că $\Delta ABE \equiv \Delta CBD \Rightarrow EB \equiv DB \Rightarrow \Delta DBE$ isoscel.

2. Construiește triunghiul ABC cu $BC = 6$ cm, $\sphericalangle B = 75^\circ$ și $\sphericalangle A = 45^\circ$. Dacă mediatoarea laturii AB intersectează AC în D, arată că ΔADB este dreptunghic isoscel.



Ipoteza: ΔABC; $BC = 6$ cm; $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle A = 45^\circ$; DE mediatoarea segmentului AB; $D \in AC$, $E \in AB$. ***Concluzie***: ΔADB dreptunghic isoscel.

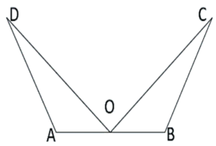
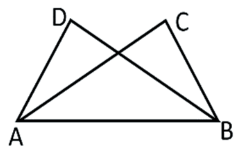
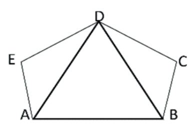
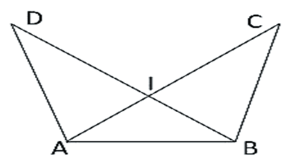
Demonstrație: Pentru a construi triunghiul, determinăm $\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle A - \sphericalangle B = 60^\circ$.

Pentru că D se găsește pe mediatoarea segmentului AB, avem $DA \equiv DB \Rightarrow \Delta ADB$ isoscel. Apoi, avem: $EA \equiv EB,\ AD \equiv AD,\ \sphericalangle AED = \sphericalangle BED = 90^\circ \underset{C.C.}{\Rightarrow} \Delta EAD \equiv \Delta EBD \Rightarrow \sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD = 45^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle BAD - \sphericalangle ABD = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, deci ΔADB este dreptunghic.

★

1. Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și că AB=6 cm, BC=9 cm, iar $\sphericalangle ABC = 75^\circ$.
Determină elementele triunghiului MNP ce pot fi aflate în aceste condiții.

2. În figura geometrică alăturată, avem: $OA \equiv OB$, $OD \equiv OC$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. Demonstrează că $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle OBC$ și $AD \equiv BC$. 	**3.** În figura geometrică alăturată, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$. Demonstrează că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$ și $AC \equiv BD$. 
4. În figura geometrică alăturată, triunghiul ADB este isoscel, cu vârful D, iar $AE \equiv BC$ și $DE \equiv DC$. Demonstrează că $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BCD$. 	**5.** În figura alăturată, $AI \equiv BI$, $ID \equiv IC$ și $\{I\} = AC \cap BD$. Demonstrează că: **a)** $AD \equiv BC$ și $\sphericalangle ADI \equiv \sphericalangle BCI$; **b)** $AC \equiv BD$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$. 

★★

6. Se consideră triunghiul ABC isoscel, cu vârful A, punctul M pe latura AC și N pe latura AB, astfel încât $AM \equiv AN$. Demonstrează că: **a)** $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ANC$ și $BM \equiv CN$; **b)** $\Delta BMC \equiv \Delta CNB$.

★★★

7. În interiorul unui unghi XOY se află două puncte, A și B, astfel încât fiecare este egal depărtat de laturile unghiului. Demonstrează că punctele O, A și B sunt coliniare.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5

1. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$, atunci ABC este triunghi

e)	f)	g)	h)
echilateral	isoscel	scalen	oarecare

2. Nu este caz de congruență

e)	f)	g)	h)
LUL	LUU	LLU	ULU

3. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, atunci ABC este triunghi

a)	b)	c)	d)
isoscel	echilateral	oarecare	scalen

4. Mulțimea punctelor egal depărtate de două puncte date este

i)	j)	k)	l)
bisectoarea unui unghi cu o latură conținând cele două puncte	înălțimea unui triunghi dreptunghic care are un unghi drept într-unul dintre punctele date	mediana unui triunghi isoscel ale cărui vârfuri de la bază sunt punctele date	mediatoarea segmentului format de cle două puncte

5. Nu este caz de congruență

c)	d)	e)	f)
CC	CU	UU	IU

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Două triunghiuri oarecare care au câte o ... și unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt congruente.

10p **2.** Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și ... ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente sunt congruente.

10p **3.** În două triunghiuri congruente, la unghiuri congruente se opun ... congruente.

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Se știe că: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm și $BC = 7$ cm. Atunci:

a) $MN = 4$ cm, $MP = 5$ cm, $NP = 7$ cm; **b)** $MN = 5$ cm, $MP = 4$ cm, $NP = 7$ cm;
c) $MN = 7$ cm, $MP = 4$ cm, $NP = 5$ cm; **d)** $MN = 5$ cm, $MP = 7$ cm, $NP = 4$ cm.

10p **2.** Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A, $\sphericalangle B = 35^\circ$ și este congruent cu ΔMNP. Atunci:

a) $\sphericalangle M = 35^\circ$; **b)** $\sphericalangle N = 90^\circ$; **c)** $\sphericalangle M = 55^\circ$; **d)** $\sphericalangle P = 55^\circ$.

10p **3.** Segmentele AB și MN au mijlocul comun în punctul O și nu sunt perpendiculare. Afirmația adevărată este:

a) $\Delta MOA \equiv \Delta NOA$; **b)** $\Delta MOB \equiv \Delta OBN$; **c)** $\Delta AOM \equiv \Delta BON$; **d)** $\Delta OMA \equiv \Delta BOM$

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete pentru următoarele exerciții

10p **1.** Se consideră un triunghi ABC și punctul D pe latura BC, astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$. Demonstrați că $AB \equiv AC$.

10p **2.** În triunghiul ABC, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm, D este intersecția bisectoarei unghiului A cu latura BC și E aparține laturii AC, astfel încât $AE = AB$. Realizați desenul și calculați perimetrul triunghiului DEC.

10p **3.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Construim D pe prelungirea lui MC, astfel încât M să fie mijlocul lui CD și E pe prelungirea lui NP, astfel încât P să fie mijlocul lui NE. Realizați desenul și demonstrați că punctele A, D, E sunt coliniare.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Două triunghiuri oarecare care au câte două laturi și ... cuprins între ele respectiv congruente sunt congruente.

10p **2.** Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o ... respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

10p **3.** În două triunghiuri congruente la laturi congruente se opun ... congruente.

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Se știe că: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$ și $\sphericalangle C = 80^\circ$. Atunci:

a) $\sphericalangle P = 80^\circ$; **b)** $\sphericalangle N = 30^\circ$; **c)** $\sphericalangle M = 70^\circ$; **d)** $\sphericalangle P = 70^\circ$.

10p **2.** Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A, $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm și este congruent cu ΔMNP. Atunci:

a) $NP = 4$ cm; **b)** $NP = 8$ cm; **c)** $MP = 8$ cm; **d)** $MN = 8$ cm.

10p **3.** Segmentele AB și DC sunt congruente și paralele, astfel încât B și C sunt de aceeași parte a dreptei AD, iar unghiul ABC este ascuțit. Afirmația adevărată este:

a) $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$; **b)** $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$; **c)** $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$; **d)** $\Delta CDB \equiv \Delta CDA$

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$, unde punctul D mijlocul laturii BC. Demonstrați că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$.

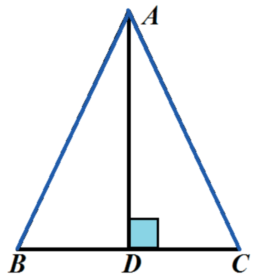
10p **2.** Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 8$ cm și $AC = 12$ cm. Știind că mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în D, realizați desenul și calculați perimetrul triunghiului ABD.

10p **3.** În triunghiul ABC, punctul D este mijlocul laturii BC. Dacă E este simetricul punctului A față de D, realizați desenul și demonstrați că $AB \parallel CE$.

Unitatea de învățare: Triunghiuri particulare

LECȚIA 8. Proprietăți ale triunghiului isoscel

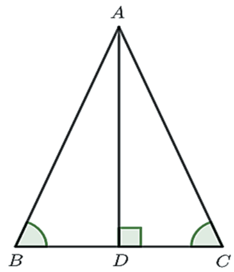
Atenție, începem!



A1. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB \equiv AC$ și AD este înălțime.

a) Demonstrați că triunghiurile dreptunghice ADB, ADC sunt congruente și deduceți: $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle BD \equiv \sphericalangle CD$.

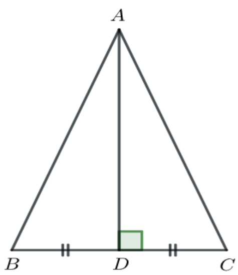
b) Ce puteți afirma despre: înălţimea, bisectoarea, mediana din vârful triunghiului isoscel, respectiv mediatoarea bazei şi axa de simetrie a triunghiului?



A2. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ şi AD este înălțime.

a) Demonstrați că triunghiurile dreptunghice ADB, ADC sunt congruente și deduceți că $AB \equiv AC$.

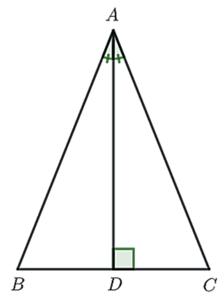
b) Ce puteţi afirma despre triunghiul care are două unghiuri congruente?



A3. În triunghiul ABC, AD este înălțime și mediană.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

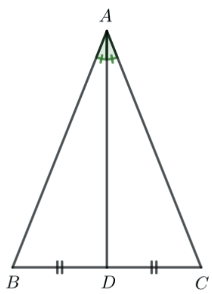
b) Ce puteţi afirma despre triunghiul în care o înălțime este și mediană?



A4. În triunghiul ABC, AD este bisectoare și înălțime.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

b) Ce puteţi afirma despre triunghiul în care o înălţime este şi bisectoare?



A5. În triunghiul ABC, AD este bisectoare și mediană.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

b) Ce puteți afirma despre triunghiul în care o înălțime este și bisectoare?

Ce ne învață teoria?

1. a) Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile de la bază sunt congruente.

b) Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci el este isoscel.

2. a) Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vârf, mediana și înălțimea corespunzătoare bazei coincid și sunt incluse în mediatoarea bazei.

b) Dacă, într-un triunghi, o bisectoare este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

c) Dacă, într-un triunghi, o mediatoare este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

d) Dacă, într-un triunghi, o mediană este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

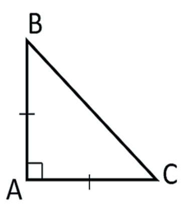
3. a) Dacă un triunghi este isoscel, atunci mediatoarea corespunzătoare bazei este axa de simetrie a triunghiului.

b) Dacă, într-un triunghi, mediatoarea unei laturi este axă de simetrie a triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.

Să vedem ce am înțeles

1. Să desenăm un segment şi mediatoarea sa. Să demosntrăm că orice punct de pe mediatoare formează, cu capetele segmentului, un triunghi isoscel.
2. Să desenăm un unghi şi bisectoarea sa. Printr-un punct de pe bisectoare să construim o perpendiculară pe aceasta. Să demonstrăm că obţinem un triunghi isoscel.

Învățăm să rezolvăm



1. Demonstraţi că fiecare unghi de la baza triunghiului dreptunghic isoscel are măsura de 45°.

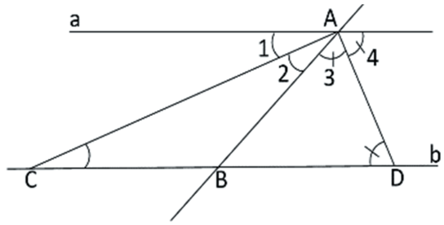
Ipoteză: $AB \equiv AC$; $\sphericalangle A = 90^\circ$.

Concluzie: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45^\circ$.

Demonstrație: Deoarece $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Ştim că $\sphericalangle A = 90^\circ$ şi $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$. De aici, obţinem:

$90^\circ + 2\cdot(\sphericalangle B) = 180^\circ \Rightarrow 2\cdot(\sphericalangle B) = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C = 45^\circ$.

2. Fie AB secantă la dreptele paralele a, b, cu $A \in a$ şi $B \in b$. Dacă AC şi AD ($C, D \in b$, cu B între C şi D) sunt bisectoarele unghiurilor formate în punctul A, atunci arătați că ΔABC şi ΔABD sunt isoscele și că B este mijlocul segmentului CD.



Ipoteza: $a \parallel b$; $A \in a$, $B \in b$; $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$; $\sphericalangle A_3 \equiv \sphericalangle A_4$; $C, D \in b$.

Concluzie: ΔABC, ΔABD sunt isoscele; $CB \equiv BD$.

Demonstrație: Din $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$ (ipoteză) și $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle BCA$ (unghiuri alterne interne formate $a \parallel b$ și secanta AC) $\Rightarrow$ $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle ACB$ $\Rightarrow$ triunghiul ABC este isoscel, cu baza AC.

Din $\sphericalangle A_3 \equiv \sphericalangle A_4$ (ipoteză) și $\sphericalangle A_4 \equiv \sphericalangle BDA$ (unghiuri alterne interne formate $a \parallel b$ și secanta AD) $\Rightarrow$ $\sphericalangle A_3 \equiv \sphericalangle BDA$ $\Rightarrow$ triunghiul ABD este isoscel, cu baza AD.

Din ΔABC isoscel, cu baza AC, avem $AB \equiv BC$ (1) şi din ΔABD isoscel cu baza AD, avem $AB \equiv BD$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $BC \equiv BD$. Deci B este mijlocul segmentului CD.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Demonstrează următoarele proprietăți ale triunghiului isoscel:

a) Medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente;

b) Bisectoarele unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente;

c) Înălțimile corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

2. Arată că un unghi de la baza unui triunghi isoscel nu poate fi drept sau obtuz.

3. În triunghiul isoscel MNP cu vârful M, se consideră punctul D pe latura NP astfel încât $\sphericalangle NMD \equiv \sphericalangle PMD$. Arată că: **a)** $MD \perp NP$; **b)** $ND \equiv PD$.

4. În triunghiul IJK se consideră punctul M pe latura JK, astfel încât $\sphericalangle JIM \equiv \sphericalangle KIM$ și $IM \perp JK$. Arată că ΔIJK este isoscel.

★★

5. În triunghiul PQR se consideră punctul I pe latura PR, astfel încât $PI = RI = 2{,}5$ cm și $QI \perp PR$. Arată că ΔPQR este isoscel.

6. În triunghiul ABC se consideră punctul D pe latura AC, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ și $AD \equiv CD$. Arată că ΔABC este isoscel.

7. În triunghiul isoscel ABC, AD este bisectoarea de la vârf, cu D situat pe latura BC și $\sphericalangle C = 55°$. Află măsura unghiului BAD.

★★★

8. În triunghiul isoscel ABC, AD este înălțimea corespunzătoare bazei BC și $BC = 6$ cm. Află lungimea segmentului BD.

9. În triunghiul isoscel ABC, AD este înălțimea corespunzătoare bazei BC și $\sphericalangle B = 48°$. Află măsura unghiului BAD.

LECȚIA 9. Proprietăți ale triunghiului echilateral

Atenție, începem!

A1. Construiți un triunghi echilateral ABC. **a)** Considerând $AB \equiv AC$, arătați că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$; **b)** Considerând $CA \equiv CB$, arătați că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$; **c)** Ce puteți afirma despre unghiurile unui triunghi echilateral, pe baza rezultatelor de la **a)** și **b)**?

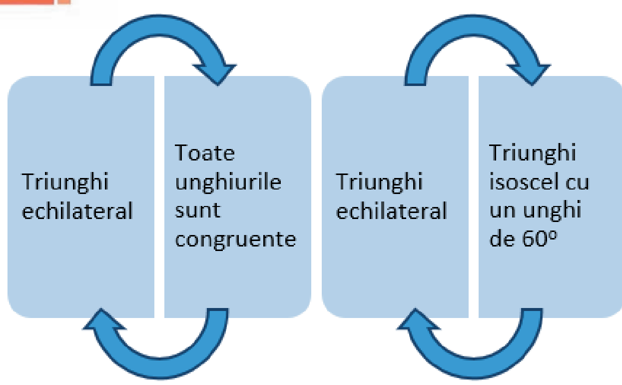
A2. Construiți un triunghi ABC cu toate unghiurile congruente. **a)** Considerând $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, arătați că triunghiul ABC este isoscel și indicați laturile congruente; **b)** Considerând $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, arătați că $CA \equiv CB$; **c)** Ce puteți afirma despre un triunghi care are toate unghiurile congruente, pe baza rezultatelor de la **a)** și **b)**?

A3. Calculaţi măsurile unghiurilor necunoscute ale triunghiului ABC:
a) dacă $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 60°$; **b)** dacă $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle B = 60°$. Ce puteți afirma despre un triunghi isoscel, cu un unghi cu măsura de $60°$, pe baza rezultatelor de la **a)** și **b)**?

A4. Construiţi un triunghi echilateral ABC. **a)** Considerând $AB \equiv AC$, ce puteți afirma despre: înălțimea, mediana, bisectoarea triunghiului din vârful A și mediatoarea laturii BC? **b)** Considerând $BA \equiv BC$, ce puteți afirma despre: înălțimea, mediana, bisectoarea triunghiului din vârful B și mediatoarea laturii AC? **c)** Ce puteți afirma despre: înălțimea, mediana, bisectoarea dintr-un vârf al triunghiului echilateral şi mediatoarea laturii opuse acestui vârf? **d)** Ce puteţi afirma despre: centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, centrul de greutate și ortocentrul triunghiului echilateral?

A5. Demonstrați că următoarele afirmaţii sunt adevărate: **a)** dacă două bisectoare ale unui triunghi sunt și înălțimi, atunci triunghiul este echilateral; **b)** dacă două mediane ale unui triunghi sunt și înălțimi, atunci triunghiul este echilateral; **c)** dacă două bisectoare ale unui triunghi sunt și mediane, atunci triunghiul este echilateral.

Ce ne învață teoria?



Triunghi echilateral → Mediana = Bisectoare = Înălţime = Mediatoare = Axă de simetrie

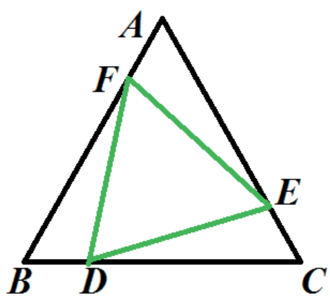
Triunghi echilateral → Două linii importante coincid

Triunghi echilateral → Două mediatoare sunt axe de simetrie

Să vedem ce am înțeles

1. Să desenăm un triunghi echilateral. Să numim şi să numărăm liniile importante care coincid, în raport cu un vârf al triunghiului.
2. Să demonstrăm că, dacă un triunghi are două axe de simetrie distincte, atunci el este echilateral.

Învățăm să rezolvăm



1. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele: $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$, astfel încât $BD \equiv CE \equiv AF$. Demonstrați că triunghiul DEF este echilateral.

Ipoteză: ΔABC echilateral; $D \in BC$, $E \in AC$ şi $F \in AB$, $BD \equiv CE \equiv AF$.

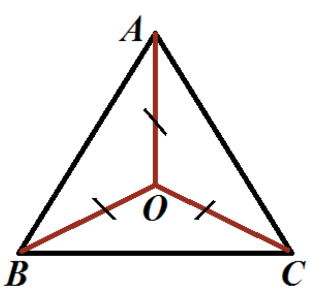
Concluzie: ΔDEF echilateral.

Demonstrație: $AB \equiv BC \equiv CA$ și $AF \equiv BD \equiv CE \Rightarrow FB \equiv DC \equiv EA$.

$AF \equiv BD \equiv CE,\ AE \equiv BF \equiv CD,\ \sphericalangle FAE = \sphericalangle DBF = \sphericalangle ECD = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta AFE \equiv \Delta BDF \equiv \Delta CED \Rightarrow FE \equiv FD \equiv DE \Rightarrow \Delta DEF$ este echilateral.

2. Se consideră trei unghiuri: AOB, BOC, COA adiacente două câte două și toate trei congruente. Știind că $OA \equiv OB \equiv OC$, arătați că ΔABC este echilateral și O este ortocentrul său.



Ipoteza: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ adiacente;
$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COA$; $OA \equiv OB \equiv OC$.

Concluzie: ΔABC echilateral; O ortocentrul ΔABC.

Demonstrație: $OA \equiv OB \equiv OC,\ \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COA \underset{L.U.L.}{\Rightarrow}$

$\Delta AOB \equiv \Delta BOC \equiv \Delta COA \Rightarrow AB \equiv BC \equiv CA \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral, în care OA, OB, OC sunt bisectoare, deci și înălțimi. Deci O este ortocentru.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. Justifică, în cazurile următoare, faptul că triunghiul ABC este echilateral:

a) $AB = AC = BC = 5$ cm;

b) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;

c) $AB = 4$ cm, $AC = 0{,}4$ dm, $BC = 40$ mm;

d) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60^\circ$;

e) $AB = AC = 6$ cm și $P_{\Delta ABC} = 18$ cm.

2. Află perimetrul unui triunghi cu latura de lungime 8 cm.

3. Află lungimea laturii unui triunghi echilateral al cărui perimetru este de 33 cm.

4. În triunghiul echilateral ABC, cu lungimea laturilor de 4 cm, se consideră înălțimile AD, cu $D \in BC$, BE cu $E \in AC$ și CF cu $F \in AB$. Calculează: **a)** BD; **b)** $AF + CE + DC$; **c)** $AB + CD + AE$; **d)** $\sphericalangle BAD + \sphericalangle FCB + \sphericalangle EBC$; **e)** $\sphericalangle BAC + \sphericalangle FCA$.

★★

5. În triunghiul echilateral IJK, IL este bisectoarea unghiului IJK, iar $L \in JK$. Arată că IL este înălțimea și mediana din I a triunghiului.

6. În triunghiul echilateral MNP, MI este mediana din M a triunghiului, iar $I \in MP$. Demonstrează că MI este bisectoarea unghiului NMP și înălțimea din M a triunghiului.

7. În triunghiul LMN, se consideră punctul A pe latura LN și punctul B pe latura MN. Știind că $MA \perp LN$, $LB \perp MN$, $\sphericalangle LMA \equiv \sphericalangle NMA$ și $\sphericalangle MLB \equiv \sphericalangle NLB$, arată că triunghiul LMN este echilateral.

★★★

8. În triunghiul PQR, se consideră punctul I pe latura QR și punctul J pe latura PR. Știind că

$PI \perp QR$, $QJ \perp PR$, $QI \equiv RI$ și $PJ \equiv RJ$, arată că triunghiul PQR este echilateral.

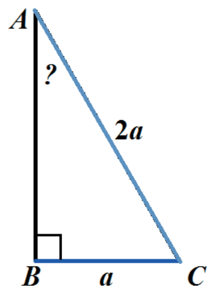
9. În triunghiul QRS, punctul M este mijlocul laturii RS și punctul N este mijlocul laturii QS. Știind că $\sphericalangle MQR \equiv \sphericalangle MQS$ și $\sphericalangle NRQ \equiv \sphericalangle NRS$, arată că triunghiul QRS este echilateral.

LECȚIA 10. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic

Atenție, începem!

A1. a) Construiți triunghiul dreptunghic ABC, în care: $\sphericalangle A=90^\circ$, $\sphericalangle B=30^\circ$ și $BC=6$ cm;

b) Măsurați cu rigla cateta AC și comparați lungimea acesteia cu jumătate din lungimea ipotenuzei BC.

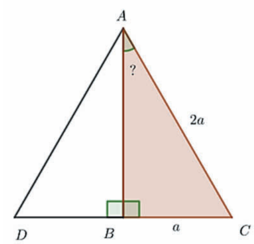


A2. Triunghiul ABC din figura alăturată este dreptunghic în A și lungimea catetei BC este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei BC.

a) Măsurați cu raportorul unghiul BAC. Comparați rezultatul măsurătorii voastre cu cel al colegilor;

b) Construiți acest triunghi în caiet și apoi simetricul D al lui C față de AB;

c) Arătați că triunghiul ACD este isoscel, cu $CA \equiv CD$;



d) Arătați că triunghiul ACD este isoscel, cu $AC \equiv AD$;

e) Stabiliți natura triunghiului ADC și precizați măsura unghiului C;

f) Calculați măsura unghiului BAC. Comparați rezultatul cu cel al măsurătorii de la punctul **a)**.

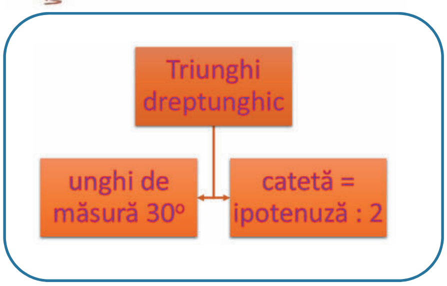
A3. a) Realizați în caiet următorul tabel:

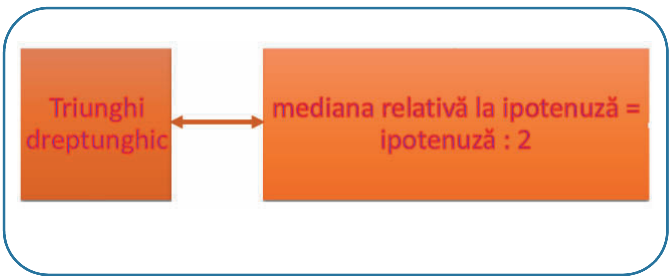
b) Construiți triunghiul ABC, dreptunghic în A, în fiecare dintre cele 4 cazuri indicate în tabel şi marcaţi cu M mijlocul ipotenuzei BC.

AB	AC	BC (măsurare)	$BC:2$ (calcul)	AM (măsurare)	AB^2+AC^2 (calcul)	BC^2 (calcul)
3	4					
6	8					
5	12					
10	24					
8	15					

c) Pentru fiecare triunghi măsurați ipotenuza și mediana corespunzătoare ipotenuzei. Completați apoi toate căsuțele libere din tabel.

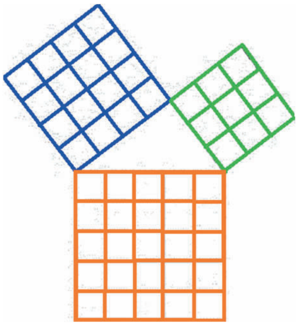
Ce ne învață teoria?





Consecință: Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

Teorema lui Pitagora: Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.



***Exemple*:** Triunghiul ABC este dreptunghic în A.

a) Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, atunci conform teoremei lui Pitagora $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, deci $BC = 5$ cm.

b) Dacă $AB = 5$ cm și $BC = 13$ cm, atunci $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$, deci $AC = 12$ cm.

Observații:

a) Trei numere naturale nenule a, b, c astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$ formează un triplet de numere pitagoreice. Cel mai cunoscut triplet este 3, 4, 5. Alte triplete 5, 12, 13 sau 8, 15, 17.

b) Dacă a, b, c sunt numere pitagoreice, atunci și multiplii acestora $a\cdot n, b\cdot n, c\cdot n$ unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sunt numere pitagoreice.

Să vedem ce am înțeles

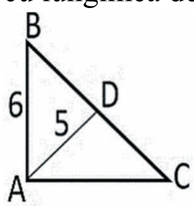
În $C(O,3)$ alegem un diametru PQ. Pe cerc alegem un punct R (diferit de P şi Q). Să demonstrăm că triunghiul PQR este dreptunghic.

Să desenăm (numai cu rigla, compasul şi grijă) un unghi de măsură 30º.

Să scriem un triplet de numere pitagoreice în care unul dintre termeni să fie 100.

Învățăm să rezolvăm

1. Un triunghi ABC dreptunghic în A are o catetă de 6 cm și mediana corespunzătoare ipotenuzei cu lungimea de 5 cm. Aflați perimetrul triunghiului ABC.



Ipoteză: ΔABC dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$; AD mediană; $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm.

Concluzie: $P_{\Delta ABC} = ?$

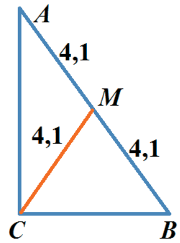
Demonstrație: AD mediană, $\sphericalangle A = 90^\circ \Rightarrow BC = 2\cdot AD \Rightarrow BC = 2\cdot 5 = 10$ cm.

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora, calculăm lungimea lui AC:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = 64 \Rightarrow AC = 8$ cm.

Prin urmare, $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 24$ cm.

2. Un triunghi ABC are latura AB=8,2 cm, iar mediana CM, cu $M \in AB$, are lungimea de 4,1 cm. Arătați că triunghiul este dreptunghic și precizați care este unghiul drept.



Ipoteza: ΔABC; $AB = 8,2\,\text{cm}$; CM mediană, $CM = 4,1\,\text{cm}$.

Concluzie: ΔABC dreptunghic.

Demonstrație: CM mediană și 4,1 =8,2 : 2, adică $CM = AB : 2 \Rightarrow$ mediana are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare. Deci, triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle C = 90^{\circ}$.

Acum să rezolvăm singuri!

★

1. În triunghiul dreptunghic DEF, măsura unghiului F este de 30° și lungimea catetei DE de 5 cm. Află lungimea ipotenuzei DF.

2. În triunghiul dreptunghic DEF, ipotenuza FE are lungimea de 7 cm și unghiul F are măsura de 30°. Află lungimea catetei DE.

3. În triunghiul isoscel NMP de vârf M, lungimea bazei NP este de 8 cm și unghiul M are măsura de 60°. Știind că MD este înălțimea corespunzătoare bazei NP, cu $D \in NP$, află lungimea segmentului MN.

4. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A. Află măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că AB = 7 cm și BC = 14 cm.

★★

5. Determină lungimea medianei duse din vârful drept al unui triunghi dreptunghic, a cărui ipotenuză are 15 cm.

6. Determină lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, știind că mediana corespunzătoare acesteia are 6,3 cm.

7. Stabilește natura triunghiului ABC, dacă BC=8 cm, iar mediana AD, cu $D \in BC$, are lungimea de 4 cm.

8. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $A = 90^{\circ}$. Determină:

a) lungimea ipotenuzei BC, știind că AB = 6 cm și AC = 8 cm;

b) lungimea catetei AB, știind că BC = 13 cm și AC = 12 cm;

c) lungimea catetei AC, știind că BC = 25 cm și AB = 15 cm.

★★★

9. Triunghiul ABC are lungimile laturilor astfel: AB = 10 cm, AC = 24 cm și BC = 26 cm. Arată că ΔABC este dreptunghic.

10. În triunghiul MNP dreptunghic în M, înălțimea MQ, cu $Q \in NP$, are lungimea de 5 cm. Știind că punctele N și P sunt simetrice față de MQ, află lungimea laturii NP.

Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5	6	7

1. Orice triunghi echilateral este

l)	m)	n)	o)
obtuzunghic	ascuțitunghic	dreptunghic	ascuțit

2. Orice triunghi are un număr de unghiuri ascuțite cel puțin egal cu

e)	f)	g)	h)
2	1	3	0

3. Selectează afirmația adevărată

b)	c)	d)	e)
un triunghi cu un unghi de 60^{o} este echilateral	un triunghi cu două unghiuri de 30^{o} este echilateral	un triunghi cu două unghiuri de 60^{o} este echilateral	un triunghi cu două unghiuri de 90^{o} este echilateral

4. Orice triunghi dreptunghic are un număr de unghiuri ascuțite, și anume

g)	h)	i)	j)
numai unul	mai mult decât două	exact două	trei

5. Un triunghi dreptunghic isoscel are ipotenuza de 10cm. Lungimea înălțimii din unghiul drept este

a)	b)	c)	d)
5 cm	6 cm	30^{o}	10 cm

6. Alege tripletul de numere pitagoreice, dintre

m)	n)	o)	p)
3, 4, 6	6, 8, 10	4, 6, 10	5, 5, 10

7. Fiind dat un segment, numărul triunghiurilor echilaterale distincte care au o mediană segmentul dat este

a)	b)	c)	d)
2	1	4	oricât de mare

Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie în spațiile punctate, cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Un triunghi cu două laturi congruente se numește ... .

10p **2.** Fiecare din cele trei unghiuri ale unui triunghi echilateral are măsura egală cu ...

10p **3.** Latura care se opune unghiului drept al unui triunghi dreptunghic se numește ...

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Triunghiul ABC isoscel, cu baza $BC = 6$ cm, are $AB = 4{,}5$ cm. Perimetrul său este

a) 15 cm; **b)** 16,5 cm; **c)** 16 cm; **d)** 15,5 cm.

10p **2.** Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A, $\sphericalangle B = 30°$ și $AC = 4$ cm. Lungimea ipotenuzei BC este egală cu:

a) 12 cm; **b)** 4 cm; **c)** 8 cm; **d)** 2 cm.

10p **3.** Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor de 9 cm și 12 cm. Ipotenuza sa are lungimea de:

a) 21 cm; **b)** 15 cm; **c)** 25 cm; **d)** 6 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții

10p **1.** Punctele M, N, P, Q, în această ordine, sunt coliniare, astfel încât segmentele MQ și NP au același mijloc. Se consideră punctul O care nu aparține dreptei MN, astfel încât $ON \equiv OP$. Realizați desenul și demonstrați că triunghiul OMQ este isoscel.

10p **2.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, $\sphericalangle C = 37°$, D este mijlocul lui BC și mediatoarea ipotenuzei intersectează cateta AB în E. Realizați desenul și determinați măsura unghiului ECD.

10p **3.** În triunghiul ABC latura AB are lungimea de 4 cm, măsura unghiului A este de 3 ori mai mare decât măsura unghiului C și măsura unghiului B este de două ori mai mare decât măsura unghiului C. Realizați desenul și determinați lungimea laturii BC.

Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Un triunghi cu toate laturile congruente se numește ... .

10p **2.** Unghiurile de la bază ale unui triunghi isoscel sunt ... .

10p **3.** Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au măsura de ... .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect. Doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Latura unui triunghi echilateral cu perimetrul de 36 cm are lungimea de:

a) 18 cm; **b)** 12 cm; **c)** 9 cm; **d)** 8 cm.

10p **2.** Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A și $BC = 8$ cm. Lungimea medianei duse din vârful A este egală cu:

a) 4 cm; **b)** 16 cm; **c)** 6 cm; **d)** 8 cm.

10p **3.** Un triunghi dreptunghic are lungimea ipotenuzei de 13 cm și o catetă cu lungimea de 5 cm. Lungimea celeilalte catete este egală cu:

a) 10 cm; **b)** 14 cm; **c)** 8 cm; **d)** 12 cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza BC. Se construiește, în exteriorul triunghiului ABC, un triunghi ECD, unde E aparține laturii AC și $CE \equiv CD$, astfel

10p încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDE$. Realizați desenul și demonstrați că $ED \parallel BC$.

2. Se consideră un triunghi echilateral ABC și punctele M, N, P mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Realizați desenul și demonstrați că punctele C, M și

10p mijlocul segmentului NP sunt coliniare.

3. În ΔMNP, $\sphericalangle N = 90^\circ$, $\sphericalangle P = 60^\circ$, cateta NP are lungimea de 5 cm, iar punctul D este mijlocul ipotenuzei. Dacă $DE \perp PM$, cu $E \in PN$, calculați perimetrul triunghiului MPE.

Teme pentru portofoliu

1. Calculează perimetrul ΔDEF, dacă:

a) $DF = 6$ cm, EF este cu 2 cm mai mare decât DF și DE este jumătatea lui EF ;

b) $DE = 5$ cm, DF este dublul lui DE și EF este cu 2,5 cm mai mare decât DE ;

c) $DE = 36$ mm, EF este de $\frac{7}{9}$ din DE și DF este jumătate din suma lungimilor laturilor DE și EF .

2. Află perimetrul unui triunghi isoscel, știind că lungimea uneia dintre laturile congruente este cu 12cm mai mare decât lungimea bazei, iar raportul lor este 1,(3).

3. Triunghiul ABC are perimetrul de 12 cm. Determină lungimile laturilor triunghiului, știind că AB este 75% din AC și BC este 125% din AC .

4. Construiește ΔABC dacă se cunosc:

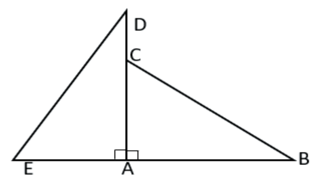
a) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $AB = 5$ cm și $AC = 6$ cm; **b)** $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$ și $BC = 4$ cm;

c) $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm.

5. În triunghiul MNP, A este mijlocul laturii MN și B este mijlocul laturii MP. Dacă $NB \cap PA = \{G\}$, arată că MG conține mijlocul laturii NP .

6. Construiește ΔABC, cu înălțimea AD este de 4 cm și mediana AM de lungime de 5 cm.

7. În figura geometrică alăturată, triunghiul ABC are $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm, iar triunghiul DAE are $\sphericalangle DAE = 90^\circ$, $AE = 3$ cm și $CD = 1$ cm. Demonstrează că: $BC \equiv DE$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AED$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADE$.



8. **a)** Consideră o dreaptă d și punctele $A \in d$ și $B \notin d$. Determină punctul $M \in d$, astfel încât $MA \equiv MB$;

b) Consideră o dreaptă d și punctele A și B de o parte și de alta a dreptei d . Determină punctul $M \in d$, astfel încât $MA \equiv MB$;

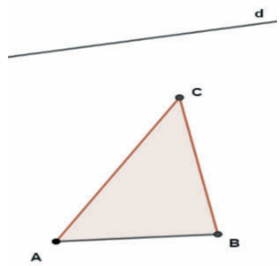
c) Consideră o dreaptă d și punctele A și B de aceeași parte a dreptei d . Determină punctul $M \in d$, astfel încât $MA \equiv MB$.

9. Desenează un cerc de centru I, raza de 4 cm și coarda $MN = 6$ cm. Trasează mediatoarea segmentului MN , folosind numai un echer cu un unghi drept.

10. Dacă ΔABC este isoscel cu vârful în A , iar ΔDBC este echilateral, arată că punctele A, D și mijlocul laturii BC sunt coliniare.

11. Se consideră o dreaptă d , două puncte A și B , iar A' și B' simetricele acestora față de dreapta d . Demonstrează că segmentele AB și $A'B'$ sunt congruente. Câte cazuri are problema?

12. În figura alăturată A, B, C sunt trei puncte de atracție dintr-un orășel al copiilor, iar d este calea ferată pentru trenulețul copiilor. Dacă $AC = 600$ m, $BC = 500$ m, $CD = 400$ m și distanța de la B la d este de 1 km.



a) Realizează un desen la scara $1:10000$.

b) Construiește punctul P care indică o nouă casă de bilete egal depărtată de cele trei puncte de atracție.

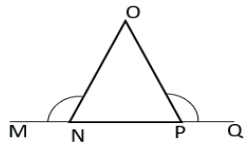
c) Construiește punctul G pe d care indică o gară suplimentară, egal depărtată de punctele A și B.

13. În ΔABC isoscel, AD este înălțimea corespunzătoare bazei BC, AC = 5,6 cm și BD = 2,8 cm. Calculează perimetrul ΔABC.

14. Se consideră dreapta A și punctele $A \in a$, $B \notin a$. Se construiește B' simetricul punctului B față de dreapta a. Arată că triunghiul ABB' este isoscel.

15. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi isoscel este de 110º. Calculează măsurile unghiurilor triunghiului. Câte soluții are problema?

16. În figura geometrică alăturată, punctele M, N, P și Q sunt coliniare și $\sphericalangle MNO \equiv \sphericalangle QPO$. Demonstrează că triunghiul ONP este isoscel.



17. Fie ΔABC cu unghiurile exterioare din A cu măsura de $80°$ și I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor B și C. Dacă $\sphericalangle PCB = 20°$, arată că ΔABC este isoscel.

18. În ΔABC echilateral, se ia punctul D mijlocul laturii BC și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Arată că **a)** ΔCDE este echilateral; **b)** $DE \parallel AB$.

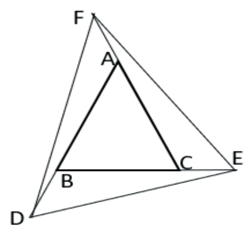
19. În ΔABC echilateral, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Știind că E este mijlocul laturii AB, arată că: **a)** ΔBEC este dreptunghic; **b)** ΔBDE este echilateral; **c)** $DE \parallel AC$.

20. În ΔABC echilateral, $E \in AC$ astfel încât BE este bisectoarea unghiului B și $D \in BC$ astfel încât $AD \perp BC$. Dacă $BE \cap AD = \{O\}$, arată că: **a)** BE și AD sunt axe de simetrie ale ΔABC; **b)** CO este mediatoarea laturii AB.

21. Dacă, în ΔABC echilateral, D este piciorul înălțimii din A pe BC, E este piciorul înălțimii din B pe AC și F este piciorul înălțimii din C pe AB, iar $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$, arată că $OA \equiv OB \equiv OC$ și $OD \equiv OE \equiv OF$.

22. Dacă ABC și ACD sunt triunghiuri echilaterale, $B \neq D$ și O este mijlocul laturii AC, arată că: **a)** punctele B, O și D sunt coliniare; **b)** $BO \equiv DO$.

23. În desenul alăturat, ΔABC este echilateral, iar $BD \equiv CE \equiv AF$. Demonstrează că ΔDEF este echilateral.



24. Fie dreapta a și punctele $A \in a$, $B \notin a$, astfel încât dreptele a și AB formează un unghi cu măsura de $30°$. Se construiește B' simetricul lui B față de dreapta a. Arată că $\Delta ABB'$ este echilateral.

25. În ΔABC dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei BC are lungimea de 4 cm, iar unghiul C are măsura de 60º. Află lungimile laturilor BC și AC.

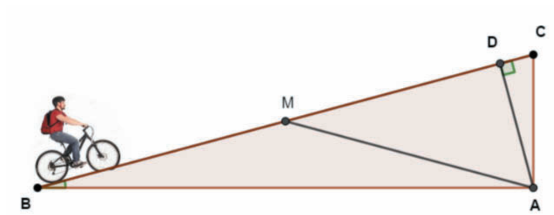
26. În ΔABC dreptunghic, ipotenuza BC are lungimea de 6 cm, iar unghiul B are măsura de 60°. Știind că punctul D este mijlocul ipotenuzei, află perimetrul ΔABD.

27. În ΔABC, AD este înălțimea și mediana corespunzătoare laturii BC, $D \in BC$. Știind că $AB = 8$ cm și unghiul B are măsura de 60º. Calculează perimetrul triunghiului ABC.

28. În ΔABC, E este piciorul înălțimii din B pe AC, F este piciorul înălțimii din C pe AB și I este mijlocul laturii BC. Știind că $BC = 8$ cm, află lungimile segmentelor IE și IF.

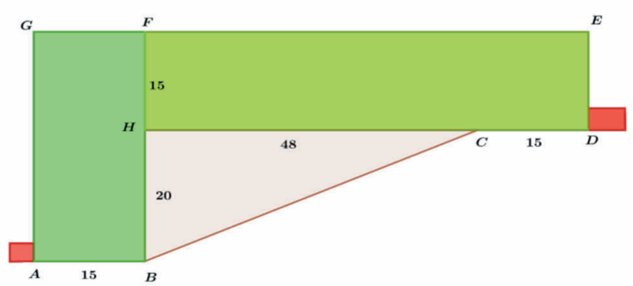
29. În triunghiul dreptunghic ABC, D este piciorul înălțimii din A pe ipotenuza BC și unghiul C are măsura de 30º. Dacă $AB = 4$ cm, află lungimile segmentelor BD și DC.

30. În figura alăturată este schițată o rampă utilizată pentru bicicliști. Dacă $AD \perp BC$ și $AM = BM = CM = 2AD$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC.



31. Fie ΔABC dreptunghic în A și AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Arată că bisectoarea unghiului DAC este perpendiculară pe bisectoarea unghiului B.

32. Lia trebuie să ajungă de acasă (punctul A) la școală (punctul D) în 10 de minute. Zona respectivă este schițată în desenul alăturat, realizat la scara 1:20, distanțele reale fiind măsurate în metri. Spațiile verzi și clădirea reprezentată prin triunghiul BHC sunt mărginite de alei. Lia poate ajunge la școală mergând pe alei sau pe spațiul verde. Știind că ea se deplasează cu viteza de 5 km/h, află ce traseu poate alege ca să ajungă la timp la școală.



Evaluare finală

Algebră

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

10p **1.** Rezultatul calculului $-8+(-12):(-3)$ este … .

10p **2.** Cel mai mic multiplu comun, diferit de 0, al numerelor 12 și 18 este ... .

10p **3.** Dacă 6 kg de mere cosstă 21 lei, atunci 11 kg de mere de același fel vor costa … lei .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Dacă $\frac{3}{a}=\frac{b}{5}$, atunci $14-ab$ este egal cu:

a) 1; **b)** – 1; **c)** 10; **d)** 0.

10p **2.** Dacă măsurile a două unghiuri complementare sunt invers proporționale cu numerele 3 și 6, atunci cel mai mare unghi măsoară:

a) $90°$; **b)** $50°$; **c)** $180°$; **d)** $60°$.

10p **3.** Cei 7 băieți ai unei clase reprezintă 25% din numărul total de elevi. Numărul fetelor este:

a) 27; **b)** 28; **c)** 21; **d)** 30.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

10p **1.** Rezolvă ecuația: $[-12+9:(-3)+13]\cdot(-10)^2-6x=(-2)^3$.

10p **2.** Determină valorile întregi ale lui x, astfel încât $\frac{5}{2x+1}$ să fie număr întreg.

10p **3.** Calculează: $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left[0,(3)+\frac{1}{2}:0,75\right]:\frac{8}{9}$.

Geometrie

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

10p **1.** Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu $180°$ se numesc… .

10p **2.** Unghiurile alterne interne, determinate de două drepte paralele cu o secantă sunt … .

10p **3.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei duse din vârful drept, este egală cu jumătate din lungimea … .

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect. Doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

10p **1.** Raza unui cerc cu diametrul de 24,8 cm are lungimea de:

a) 12,4 cm; **b)** 12,2 cm; **c)** 24,8 cm; **d)** 49,6 cm.

10p **2.** Un triunghi dreptunghic *ABC* în *A*, are $\sphericalangle B = 30°$ și *AC* = 3,(4) dm. Lungimea ipotenuzei *BC* este egală cu

a) 3,(4) dm; **b)** 4,(3) dm; **c)** 6,(8) dm; **d)** 6,8 dm.

10p **3.** Unghiurile congruente ale unui triunghi isoscel au măsura de $70°30'$. Măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului este de:

a) $49°$; **b)** $39°$; **c)** $59°$; **d)** $40°$.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

10p **1.** În triughiul *ABC*, unghiul *B* are măsura de $52°$, *BE* este bisectoarea unghiului *B*, cu *E* situat pe latura *AC*, iar punctul *D* este pe latura *AB*, astfel încât *DE* este
10p paralelă cu *BC*. Realizează desenul corespunzător, determină măsurile unghiurilor treiunghiului *DEB* și stabilește natura acestuia.

10p **2.** Pe un cerc de centru *O* se consideră, în această ordine, punctele *A*, *B*, *C* și *D*, astfel încât arcele *AB* și *CD* au măsuri egale. Realizează desenul și arată că centrul cercului și mijloacele coardelor *AD* și *BC* sunt puncte coliniare.

3. Se consideră triunghiul *ABC* cu unghiul A ascuțit. Se construiesc perpendicularele în punctul *A* pe *AB*, respectiv *AC*, pe care se aleg punctele *M*, respectiv *N*, astfel încât: $AM \equiv AB$, cu *M* și *C* de o parte și de alta a dreptei *AB* și $AN \equiv AC$, cu *B* și *N* de o parte și de alta a dreptei *AC*. Realizează desenul și demonstrează că $MC \equiv BN$.

Răspunsuri

Cap1_l1 2. $A=\{3,5,7,9\}$, $B=\{x,y,z\}$, $C=\{3\}$, $D=\{2,3,b\}$, $E=\{3,5,a\}$. **3. a)** $\{2,3,6,9\}$; **b)** $\{2,3,4\}$; **c)** $\{0,1\}$; **d)** $\{1\}$. **4. a)** $\in$; **b)** $\notin$; **c)** $\in$; **d)** $\notin$.

5. $A=\{1,3,5,7,9\}=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x \text{ impar},\ x<10\}$, $B=\{a,e,i,o,u\}$, $C=\{x \mid 3\cdot x=18\}=\{6\}$, $D=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x\,\vdots\,4,\ x<30\}=\{0,4,8,12,16,20,24,28\}$ $E=\{x \mid x \text{ divide } 9\}=\{1,3,9\}$.

6. a) adevărat, **b)** fals; **c)** fals. 7**.** $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{1,7\}$, $D=\{1\}$, $E=\{1,2,3\}$.**8.** $A=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x\le 12\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x\,\vdots\,2,\ x\le 16\}$, $C=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x \text{ număr impar},\ x\le 15\}$, $D=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x\,\vdots\,3,\ x\le 15\}$, $E=\{x \mid x=n^2,\ n\in\mathbb{N} \text{ cu } 0\le n\le 6\}$. **9.** A,B mulțimi finite, iar C,D mulțimi infinite.

Cap1_l2 1.a) "$\subset$"; **b)** "$\subset$"; **c)** "$\subset$"; **d)** "$\subseteq$"; **e)** "$\not\subset$". **2.** "$=$". **4.** *x* poate avea valoarea 1 sau 3. **5.** $x=2$. **6.a)** $\varnothing$ și A; **b)** $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, A. **7.a)** $\{2,3,4,6\}$ **b)** $\{1,12\}$. **8.a)** $\{0,2,4,6,8,10\}$; **b)** $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$. **9.a)** $\{0,3,6,9\}$; **b)** $\{0,3,6,9,12\}$.

10. a) $\{2,7\}$; **c)**$\{1,14\}$. **11. a)** $\{0,2,6,8,10,12\}$, $\{0,3,6,9,12\}$, $\{0,8,12\}$, $\{0,6,12\}$; **b)** $\{2,3,6\}$, $\{2,8\}$, $\{3,9\}$, $\{2,10\}$. **12.** $\{6,9,15\}$ și $\{3,27\}$ **.**

Cap1_l3 1. b) $D=\{a,d,f\}$; $E=\{a,c\}$; $M=\{e,b\}$ **2. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** F; **e)** F; **f)** F; **g)** A. **3.** $\{0,1,2,3,4,5,6\}$; $\{0,1,2,3,4,5,6\}$; $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$; $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$; $\{2\}$; $\{1,3,5\}$; $\{0,4,6\}$; $\{5\}$; $\{1,3,5\}$. **4.** $\{1,2,3,4\}$; $\{1,2,3,...,16\}$; $\{5,6,7,...,16\}$; $\varnothing$. **5. a)** $A=\{a,b\}$ și $B=\{a,c\}$; **b)** $A=\{a,b,c,d\}$ și $B=\{a,b,c,f\}$; **c)** $A=\{a,b,c,d,e\}$ și $B=\{d,e\}$. **6. a)** 7; **b)** 17; **c)** 22 cel mai mare cardinal al reuniunii, iar 12 cel mai mic cardinal al reuniunii; 10 cel mai mare cardinal al intersecției, iar 0 cel mai mic cardinal al intersecției. **7.** $x=3$ și $y=2$.

8. $X=\{0,1,3,4,5\}$, $Y=\{0,1,2\}$. **9.** $a=4$.

Cap1_l4 1. a) $\{2,3,23,31,67,97\}$; **b)** $\{6,15,33,54\}$. **2.** $15=3\cdot 5$, $22=2\cdot 11$, $35=5\cdot 7$, $39=3\cdot 13$, $65=5\cdot 13$, $77=7\cdot 11$, $91=7\cdot 13$. **3.** $A\cap B=\{2\}$. **4.a)** $2^2\cdot 3$, $2^3\cdot 3$, $2^2\cdot 3\cdot 5$, $3\cdot 5^2$; **b)** $2^3\cdot 3\cdot 5$, $2^6\cdot 3^2$, $2^2\cdot 3^4$, $2^5\cdot 5^2$; **c)** $3^2\cdot 5^2\cdot 11$, $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2$, $2^2\cdot 5^2\cdot 11^2$, $2^6\cdot 3^3\cdot 11$. **5. a)** 1, 13, 19, $13\cdot 19$; **b)** 1, 5, 11, 5^2, $5\cdot 11$, $5^2\cdot 11$; **c)** 1, 5, 11, $5\cdot 11$, $5\cdot 11^2$, $5\cdot 11^3$; **d)** $1;5;11;5^2;11^2;5\cdot 11;5\cdot 11^2;5^2\cdot 11;5^2\cdot 11^2$; **e)** 1, 5, 5^2, 5^3, 11, 11^2, $5\cdot 11$, $5\cdot 11^2$, $5^2\cdot 11$, $5^2\cdot 11^2$ $5^3\cdot 11$, $5^3\cdot 11^2$, **f)** 1, 5, 11, 13, $5\cdot 11$, $5\cdot 13$, $11\cdot 13$, $5\cdot 11\cdot 13$; **g)** 1, 5, 5^2, 11, 13, $5\cdot 11$, $5\cdot 13$, $11\cdot 13$, $5^2\cdot 11$, $5^2\cdot 13$, $5\cdot 11\cdot 13$, $5^2\cdot 11\cdot 13$. **6. a)** $750=5^3\cdot 3\cdot 2$, $1000=5^3\cdot 2^3$, $2500=5^4\cdot 2^2$, **b)** $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, $36=2^2\cdot 3^2$, $120=2^4\cdot 3\cdot 5$;. **7. a)** $3^3\cdot 5^3$; **b)** 11^8 **; c)** $2^2\cdot 3^4\cdot 5^2$; **d)** $2^6\cdot 5^3$; **e)** $2^6\cdot 5^6$. **9.** 3+101, 7+97, 31+73, 37+67. **10.** 6, 24, 54.

Cap1_l5 **1.a)** $D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$, $D_8=\{1,2,4,8\}$ și $(12,8)=4$; **b)** $D_{10}=\{1,2,5,10\}$, $D_{25}=\{1,5,25\}$ și $(10,25)=5$; **c)** $D_{18}=\{1,2,3,6,9,18\}$, $D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ și $(18,24)=6$; **d)** $D_{15}=\{1,3,5,15\}$, $D_{25}=\{1,5,25\}$ și $(15,25)=5$; **e)** $D_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$, $D_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$ și $(20,28)=4$; **f)** $D_8=\{1,2,4,8\}$, $D_{26}=\{1,2,13,26\}$ și $(8,26)=2$; **g)** $D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, $D_{22}=\{1,2,11,22\}$ și $(24,22)=2$. **2. a)** $108=2^2\cdot 3^3$, $45=3^2\cdot 5$, $(108,45)=3^2=9$; **b)** $57=19\cdot 3$, $38=19\cdot 2$, $(57,38)=19$; **c)** $120=2^3\cdot 3\cdot 5$, $48=2^4\cdot 3$, $(120,48)=24$; **d)** $42=2\cdot 3\cdot 7$, $54=2\cdot 3^3$, $(42,54)=2\cdot 3=6$; **e)** $182=2\cdot 7\cdot 13$, $42=2\cdot 3\cdot 7$, $(182,42)=2\cdot 7=14$; **f)** $24=2^3\cdot 3$, $36=2^2\cdot 3^2$, $(24,36)=3\cdot 2^2=3\cdot 4=12$; **3. a)** $36=2^2\cdot 3^2$, $16=2^4$, $48=2^4\cdot 3$, $(36,16,48)=2^2=4$; **b)** $8=2^3$, $24=2^3\cdot 3$, $36=2^2\cdot 3^2$, $(8,24,36)=2^2=4$; **c)** $15=3\cdot 5$, $36=3^2\cdot 2^2$, $12=2^2\cdot 3$, $(15,36,12)=3$; **d)** $20=2^2\cdot 5$, $30=2\cdot 3\cdot 5$, $40=2^3\cdot 5$, $(20,30,40)=10$; **e)** $126=2\cdot 3^2\cdot 7$, $162=2\cdot 3^4$, $270=2\cdot 3^3\cdot 5$, $(126,162,270)=2\cdot 3^2=2\cdot 9=18$; **f)** $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$, $2700=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$, $630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, $(360,2700,630)=2\cdot 3^2\cdot 5=90$; **4.** $M_3=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,...\}$, $M_5=\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,...\}$, $M_3\cap M_5=\{0,15,30,45,60,75,...\}$, $[3,5]=15$. **5.a)** 24; **b)** 60; c) 6300; d) 198. **6.a)** $15=3\cdot 5$, $14=2\cdot 7$, $(14,15)=1$ **b)** $12=2^2\cdot 3$, $37=37$ $(12,37)=1$; **c)** $8=2^3$, $35=5\cdot 7$, $(8,35)=1$; **f)** Calculăm *c.m.m.d.c* a două numere consecutive și obținem rezultatul 1. Două numere consecutive sunt prime între ele. **7. a)** $(1,1)$; **b)** $(1,2),(2,1),(2,2)$; **c)** $(1,5),(5,1),(5,5)$; **d)** $(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(4,4)$; **e)** $(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(2,3),(3,2),(3,6),(6,3),(6,6)$. **8.** $[6,8,10]=120.$

9. $[6,7,9]=126; 18\cdot 126=2268.$ **10.** $[5,6,12,15]=60; 420.$ **11.** Numerele divizibile cu 2 și 9 sunt: 91350, 71352, 51354, 31356, 11358. **12.** $a+b=40$ și $(a,b)=5$, $a=5\cdot a_1$, $a_1\neq 0$ și $b=5\cdot b_1$, $b_1\neq 0$; $(a_1,b_1)=1$, $5\cdot a_1+5\cdot b_1=40$, $5(a_1+b_1)=40$, $a_1+b_1=8$; pentru $a_1=1$, atunci $b_1=7$ și $(1,7)=1$; pentru $a_1=2$, atunci $b_1=6$ și $(2,6)\neq 1$; pentru $a_1=3$, atunci $b_1=5$ și $(3,5)=1$; pentru $a_1=4$ atunci $b_1=4$ și $(4,4)\neq 1$; pentru $a_1=5$, atunci $b_1=3$ și $(5,3)=1$; pentru $a_1=6$, atunci $b_1=2$ și $(6,2)\neq 1$; pentru $a_1=7$ atunci $b_1=1$ și $(1,7)=1$. Perechile de numere sunt: $a=5$ și $b=35$; $a=15$ și $b=25$; $a=25$ și $b=15$; $a=35$ și $b=5$.

Cap1_l6 **1. a); c); g); h); i). 2. a); c); d); f). 5.** 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77. **6.** 42, 48, 54. **7. a)** $D_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$, $D_{55}=\{1,5,11,55\}$, $D_{42}\cap D_{55}=\{1\}$, numerele 42 și 55 nu au divizori comuni diferiți de 1; **b)** $D_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $D_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$, $D_{30}\cap D_{42}=\{1,2,3,6\}$, numerele 30 și 42 au divizorii comuni diferiți de 1 numerele: 2, 3, 6;

c) $D_{55}=\{1,5,11,55\}$, $D_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $D_{55}\cap D_{30}=\{1,5\}$, numerele 55 și 30 au divizor comun diferit de 1 numărul 5; **8. a)** $0,6,12,18$**;** **b)** $0,15,30,45$**;** **c)** $0,12,24,36$**;** **d)** $0,105,210,315$;**10.** $24m;d\vdots 2$ **. 11.** $a=21b=3\cdot 7b\vdots 3$, deci restul este zero**. 12.** 3 soluții, $x\in\{1,3,9\}$.

Portofoliu_Cap1. 1. a) $\{0,1,2,3,8,9\}$; **b)** $\{a,e,i,c,n,t\}$. **2. a)** adevărat; **b)** fals; **c)** adevărat; **d)** fals; **e)** fals. **3.** $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, $P=\{1,2,5,10\}$, $S=\{19\}$, $T=\{0,1,2,3,4,5\}$.
4. $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 3\le x\le 14\}$, $B=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 4\}$, $C=\{5n+1 \mid n\in\mathbb{N}, 0\le n\le 4\}$, $D=\{x^2 \mid x\in\mathbb{N}, 0\le x\le 7\}$. **5.** $A=\{0,1,3\}$ și submulțimile sunt: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0,1\}$, $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{0,1,3\}$. **6.** $3,9,15\in A$ și $3,9,15\notin B$, deci $A\not\subset B$. **7.** $A=\{2\}$, $B=\{1,2,5,10\}$, $A\cup B=B$ $A\cap B=A$, $A-B=\varnothing$. **8.** $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$, $A\cap B=B$, $A\cup B=A$, $A-B=\{4,5\}$ $B-A=\varnothing$. **9. a)** $\{0,1,2,3,4,5,6\}$; **b)** $\{5\}$; **c)** $\{1,3,5\}$; **d)** $\mathbb{N}$; **e)** $\varnothing$. **10.** $x=3, y=2$. **11.** $a=4$. **12.** $2\notin\{3,4,5\}$ și egalitatea este falsă. **13.** $611 = 13\cdot 47$, deci $\overline{abcd}\in\{1347,4713\}$. **14.** Pentru descompunerea în factori primi $x=a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}$, x are $(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)$ divizori. **a)** $(2+1)\cdot(4+1)\cdot(1+1)=3\cdot 5\cdot 2=30$ de divizori; **d)** $1245000=2^3\cdot 3\cdot 5^4\cdot 83$ și are $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(4+1)\cdot(1+1)=80$ de divizori. **15.** $27 = 1\cdot 3\cdot 9$ și numerele prime sunt 139 și 193. **16.** Din suma lui Gauss: $A=500\cdot(999\cdot n+2)$; din $A\vdots 10^6 \Rightarrow 500\cdot(999\cdot n+2)=2^6\cdot 5^6 \Rightarrow$ $999\cdot n+2=2000 \Rightarrow n=2$. **17.** $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111\cdot(a+b+c)\vdots 111$. **18.** $\overline{abab}=\overline{ab}\cdot 101$ și are divizorii 1, $\overline{ab}$, 101, $\overline{abab}$. **19.** 500. **20. a)** 15 și 35 sau 5 și 45; **d)** 10 și 240 sau 30 și 80. **21. a)** $a\in\{1,3,5,7,9\}$; **b)** $a\in\{1,2,4,5,7,8\}$; **c)** x poate fi orice cifră; **d)** $y\in\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ **e)** $x\in\{1,5,7,9\}$; **f)** $a\in\varnothing$. **22. a)** 367; **b)** 359. **23.** 15 mm. **24.** 400 dale. **25. a)** $x\in\{1,3\}$; **b)** $x\in\{1,5\}$; **c)** $x\in\{1\}$; **d)** $x\in\{0,4\}$.

Cap2_l1 1. a) $\frac{24}{8}=3$, $\frac{11}{55}=\frac{1}{5}$, $\frac{169}{13}=13$, $\frac{20}{400}=\frac{1}{20}$; **b)** 30, $\frac{1}{50}$, 12, $\frac{268}{187}$; **c)** 2, $\frac{1}{10}$, 1, 2.
2. $\frac{35}{25000}=\frac{7}{5000}$, $\frac{2400}{36}=\frac{200}{3}$, $\frac{2000}{400}=5$, $\frac{12}{150}=\frac{2}{25}$, $\frac{1100}{132}=\frac{25}{3}$, $\frac{10}{25000}=\frac{1}{2500}$. **3.** 41800.
4. $\frac{15}{100}\cdot 72=10{,}8$ kg sare. **5.** Raportul dintre cantitatea de argint și cea de aliaj este 0,325. Cantitatea de argint este $0{,}325\cdot 400=130$ g argint. **6.** Segmentul *AB* se împarte în trei părți egale, iar *AC* reprezintă două părți. **7.** Dacă notăm cu d distanța pe hartă și cu D distanța reală, atunci $\frac{d}{D}=\frac{1}{1000000} \Rightarrow d=\frac{1}{1000000}\cdot D$ și $D=1000000\cdot D$; **7. a)** $D=20$ km; **b)** $d=2{,}6$ cm. **8.** CD-urile cu muzică clasică reprezintă 12% din total, adică 57. **9.** 400 bilete. **10.** 10% din

40% din sumă: $\frac{10}{100}\cdot\left(\frac{40}{100}\cdot S\right)=\frac{4}{100}\cdot S$,adică 4% din suma inițială. **11.** $30-3=27$ elevi au promovat; procentul de promovabilitate este dat de relația $\frac{x}{100}\cdot 30=27$, deci este de 90%.

12. a) 7,5 euro; **b)** 4,5 euro.

Cap2_l2 1. a) Prin simplificare cu 3, se obține $\frac{6}{21}^{(3}=\frac{2}{7}$, deci se obține o proporție; **b)** $\frac{225}{900}^{(225}=\frac{1}{4}$ formează proporție; **c)** $\frac{18}{420}^{(6}=\frac{3}{70}\neq\frac{3}{7}$ nu formează proporție; **d)** $\frac{1,2}{3}=\frac{2}{5}\neq\frac{1}{5}$ nu formează proporție; **e)** $\frac{1,2}{3}=\frac{2}{5}$ formează proporție. **2. a)** $\frac{99}{165}=\frac{3}{5}$; **b)** $\frac{8}{3,2}=\frac{5}{2}$; **c)** $\frac{4,2}{1,4}=\frac{3}{1}$; **d)** $\frac{0,6}{0,36}=\frac{5}{3}$; **e)** $\frac{2\cdot 3^2}{2^2\cdot 3}=\frac{3}{2}$; **3. a)** $\frac{5}{7}=\frac{50}{70}$, $\frac{5}{7}=\frac{75}{105}$; **b)** $\frac{6}{11}=\frac{60}{110}$, $\frac{6}{11}=\frac{90}{165}$; **c)** $\frac{0,5}{0,3}=\frac{5}{3}$, $\frac{0,5}{0,3}=\frac{7,5}{4,5}$; **d)** $\frac{1,3}{1,03}=\frac{13}{10,3}$, $\frac{1,3}{1,03}=\frac{19,5}{15,45}$; **e)** $\frac{0,(3)}{0,2(3)}=\frac{3,(3)}{2,(3)}$, $\frac{0,(3)}{0,2(3)}=\frac{5}{3,5}$. **4.** $\frac{1,98}{49,5}=\frac{1}{25}$, deci scara este de $\frac{1}{25}$. **5.** Viteza este raportul dintre distanța parcursă și timp: $v=\frac{170}{2}=85$ km/h≠ 65 km/h. **6. a)** $x=2$; **b)** $y=9$; **c)** $z=36$; **d)** $a=4$; **e)** $b=1,2$; **f)** $u=4,05$; **g)** $x=12$; **h)** $x=10$; **7.** $\frac{6}{x}=\frac{2}{300}\Rightarrow x=6\cdot 300:2=900$, deci obiectul are 9 m. **8.** $a\cdot b=4\cdot 16\Rightarrow a\cdot b=2^6\Rightarrow a^3\cdot b^3=(a\cdot b)^3=2^{18}$.

9. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=1\Rightarrow 730-\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=729=27^2$.

Cap2_l3 1. a) $\frac{1,2}{7,5}=\frac{1,6}{10}$, b) $\frac{10}{1,6}=\frac{7,5}{1,2}$, c) $\frac{7,5}{10}=\frac{1,2}{1,6}$. **2. a)** $\frac{2x}{y}=\frac{8}{5}$; **b)** $\frac{3x}{2y}=\frac{12}{10}$; **c)** $\frac{5y}{3x}=\frac{20}{15}$.

3. a) $\frac{x+y}{y}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{6}{y}=\frac{3}{2}\Rightarrow y=4$ și $x=2$; **b)** $\frac{x}{y-x}=\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{x}{6}=1\Rightarrow x=6$ și $y=12$; **c)** $\frac{3x}{2y}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3x+2y}{2y}=\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{42}{2y}=\frac{7}{4}\Rightarrow y=12$ și $x=6$; **d)** $x=6$ și $y=12$. **4. a)** $m=5,4$, $n=43,2$; **b)** $m=5,4$, $n=43,2$. **5.** $a=6$ cm și $b=9$ cm. **6.** $x=28$ lei și $y=20$ lei. **7. a)** $\frac{12}{13}$; **b)** $\frac{13}{7}$; **c)** $\frac{19}{20}$. **8. a)** $x=7$; **b)** $x=\frac{2}{11}$; **c)** $x=\frac{1}{2}$. **9.** $a=248$, $b=372$, $c=620$.

Cap2_l4. 1. a) $x=5, y=15, z=4$; **b)** $x=0,75$; $y=2,4$; $z=3,9$; **c)** $x=20, y=55, z=30$.

2. $\frac{1}{10}$. **3.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=k \Rightarrow x=2k, y=6k, z=5k$; din $x+y+z=78000 \Rightarrow 13k=78000 \Rightarrow$ $k=6000$ și $x=12000, y=36000, z=30000$. **4.** $\frac{x}{1,6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5,2}=\frac{x+y+z}{9,8}=\frac{24,5}{9,8}$, de unde obținem $x=\frac{24,5\cdot 1,6}{9,8}=4$, $y=\frac{24,5\cdot 3}{9,8}=7,5$ și $z=\frac{24,5\cdot 5,2}{9,8}=13$. **5.** $10-4=6$.
6. $\frac{2x}{3}=\frac{3y}{5}=\frac{5z}{4}=k \Rightarrow x=\frac{3k}{2}$, $y=\frac{5k}{3}$ și $z=\frac{4k}{5}$; din $x+y+z=1$ obținem $119k=30 \Rightarrow k=\frac{30}{119}$ și $x=\frac{45}{119}, y=\frac{50}{119}, z=\frac{24}{119}$. **7.** $a=5k, b=11k, c=9k \Rightarrow 71k=284 \Rightarrow$ $k=4 \Rightarrow a=20, b=44, c=36$. **8. a)** $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z} \Rightarrow \frac{a+b+c}{x+y+z}=3$; **b)** $\frac{2a+3b+4c}{2x+3y+4z}=3$
c) $\frac{a}{x}=3 \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{9}$.

Cap2_l5 1. Mărimile sunt direct proporționale deoarece $\frac{2}{80}=\frac{7}{280}$; **b)** Mărimile sunt direct proporționale deoarece $\frac{3}{12,60}=\frac{1,5}{6,30}$; **c)** Mărimile sunt direct proporționale deoarece $\frac{130}{2}=\frac{520}{8}$; **d)** Mărimile nu sunt direct proporționale deoarece $\frac{2}{3}\neq\frac{4}{1,5}$ **3. a)** sunt mărimi proporționale; **b)** nu sunt mărimi proporționale; **c)** sunt mărimi proporționale. **6. a)** Suma cea mai mare este pentru produsul Y; **b)** Pentru produsul X se alocă 18,75 lei, iar pentru Y, 81,25 lei. **8.** $a=14$ și $b=49$.**10.** 80%.

Cap2_l6. 1. a) Mărimile sunt invers proporționale: 900 · 18 = 450 · 36; **b)** sunt mărimi invers proporționale; **c)** nu sunt mărimi invers proporționale; **d)** sunt mărimi invers proporționale.
2. a) Mărimile sunt invers proporționale deoarece $2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6=2,5\cdot 9,6=24$;
b) Mărimile sunt invers proporționale: $1,2\cdot 30=4\cdot 9=1,5\cdot 24=36$; **c)** Mărimile sunt invers proporționale: $5\cdot 27=15\cdot 9=3\cdot 45=135$. **5. a)** Mai mare este x; **b)** $x=250$, $y=100$.
7. $a=34$, $b=51$. **8.** $\frac{1}{2}$.

Cap2_l7. 1. c) 7; **d)** $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$. **2. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$. **3. a)** $\frac{2}{5}$; **b)** $\frac{3}{10}$; **c)** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{3}$ **5.** $\frac{9}{10}$. **6.** 9.
7. 49.

Portofoliu_Cap2 1. a) se mărește de 3 ori; **b)** se micșorează de 5 ori; **c)** se micșorează de 4 ori; **d)** se mărește de 10 ori; **e), f)** rămâne la fel. **2. a)** $CD=10,6$ cm – 3,4 cm – 4,4 cm = 2,8 cm = 0,28 dm; **b)** $\frac{17}{53}, \frac{17}{22}, \frac{17}{14}, \frac{22}{17}, \frac{11}{7}, \frac{22}{53}, \frac{14}{39}, \frac{14}{53}$. **3. a)** $\frac{a}{b}=\frac{7}{10} \Rightarrow$ Ana a economisit mai mult decât Radu; **b)** $\frac{a}{20}=\frac{7}{10} \Rightarrow a=14$ lei; **c)** $\frac{14}{b}=\frac{7}{10} \Rightarrow b=20$ lei. **4. a)** 125%; **b)** 80%; **c)** 75%;

d) 25%; **e)** 1250%; **f)** 12%; **g)** 35%; **h)** 90%. **5. a)** $\frac{3}{25}$; **b)** $\frac{1}{20}$; **c)** $\frac{1}{5}$; **d)** $\frac{3}{2}$; **e)** $\frac{3}{400}$ **f)** $\frac{1}{300}$; **g)** 2. **6. a)** 4,5; 16,2; 3,6; **b)** 18,6; 46,5; 7,44; **c)** 140; 490; 84. **7.** 55% engleză, 20% franceză, 17,5% spaniolă, 7,5% germană. **8. a)** 10%; **b)** 25%; **c)** 20%; **d)** 10%; **e)** 46,(6)%.

9. $\frac{2}{5}$. **10.** $\frac{3}{7}$. **11.** $\frac{9}{16}$. **12.** $\frac{27}{8}$. **13.** Voturi anulate 2,5% din 800, adică 20. **14.** 34,875 milioane de francezi merg în vacanță și 15,345 milioane merg la mare. **15.** $a = 99^2$ și $b = 99 \cdot 100$, deci $\frac{a}{b} = \frac{99}{100}$. **16.** 24%. **17.** 72 g. **18.** $\frac{1}{25}$. **19. a)** $\frac{750}{3}$ și $\frac{1000}{4}$; $\frac{750}{3} = \frac{1000}{4}$, deci formează o proporție; **b)** raportul suprafețelor $= \frac{3}{4}$, raportul numărului de locuitori $= \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}$.

20. $v = \frac{170}{2} = 85\,\text{km/h} \neq 65$ km/h. **21. a)** $d = \frac{1}{7}$; **b)** $c = \frac{5}{26}$; **c)** $x = 28$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = \frac{1}{140}$.
23. b) $b = 3$. **24.** 0. **25.** $x = 10$, $y = 9$, $c = 7$. **26.** $x = 3600$, $y = 4800$, $z = 6000$. **28. a)** MB; **b)** $AM = 11,(36)$ cm și $MB = 13,(36)$ cm. **29.** $a = 24$, $b = 32$, $c = 48$. **31. a)** Mai lung este AM **b)** $AM = 27$ cm și $MB = 18$ cm. **32.** 125%. **35. a)** mai puțin; **b)** 7 ore. **36. a)** timp mai lung; **b)** 51 h. **37. a)** timp mai lung; **b)** 28 zile. **38. a)** 20 km; **b)** 7 minute și 12 secunde. **39.** $\frac{1}{10}$.
40. b) 7,28.

Cap3_l1 1. a) (A); **b)** (A); **c)** (A); **d)** (A); **e)** (A); **f)** (F); **g)** (F); **h)** (F); **i)** (F); **j)** (A); **k)** (F); **l)** (F); **m)** (F); **n)** (A). **2. a)** – 8, – 6, – 4, – 2, 0, 2, 4; **b)** 15, 12, 9, 6, 3, 0, – 3; **c)** – 7, – 12, – 17, – 22, – 27 , – 32, – 37; **d)** 9, 5, 1, – 3, – 7, – 11, – 15. **3. a)** (A); **b)** (A); **c)** (F); **d)** (F); **e)** (F).
4. a) $-1 > -3$; **b)** $-6 < -5$; **c)** $-3 > -4$; **d)** $2 < 5$; **e)** $3 > 1$; **f)** $4 > 3$; **g)** $-1 < 4$; **h)** $-3 < 1$; **i)** $-2 < 0$; **j)** $0 < 3$. **5. a)** – 2; **b)** – 124; **c)** – 78; **d)** – 1; **e)** 0; **f)** 3; **g)** 128.
6. $-90 < -50 < -30 < 0 < 50 < 80$ **7.** $670 > 540 > 0 > -450 > -670 > -760$. **8. a)** $x \in \{-1, 1\}$; **b)** $x \in \{-29, 29\}$; **c)** $x \in \{0\}$; **d)** $x \in \varnothing$. **9. a)** 20; **b)** 30; **c)** 20; **d)** 10; **e)** 0; **f)** 0.
10. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $B = \{-1, 0, 1\}$; $C = \{0, 1, 2\}$; $D = \{0\}$; $E = \varnothing$; $F = \{-3, 3\}$; $G = \varnothing$.

Cap3_l2 1.
a)

a	15	- 4	- 9	- 19	0	9
$a + (+9)$	24	5	0	- 10	9	18

b)

a	9	7	0	- 6	- 9	20
$a + (-9)$	0	- 2	- 9	- 15	- 18	11

2. a) A indică +12ºC, B indică – 8ºC, C indică – 14ºC și D indică +42ºC; **b)** A indică -7ºC, B indică – 27ºC, C indică – 32ºC și D indică +23ºC. **3.** $A = +12$; $B = -15$; $C = -19$; $D = -33$; $E = +82$; $F = +150$; $G = -1000$; $H = +700$; $I = 0$; $J = 0$; $K = -1035$. **6.** $A = 7$; $B = 2$; $C = -12$; $D = -12$; $E = 22$; $F = -41$; $G = -35$. **7. a), d)** și **f)** sunt corecte;
b) $(-10) + (+24) = 14$; **c)** $(+9) + (-16) = -7$; **e)** $(-18) + (-16) = -34$.

8. $A=(-8)+(-13)+(+15)+(+25)=(-21)+(+40)=19$.

9. $D=(-36)+(-64)+(+38)+(+12)+(+40)=(-100)+(+50)+(+40)=(-100)+90=-10$.

Cap3_l3 1.

a)

a	13	7	9	- 9	0
$a-(+9)$	4	- 2	0	- 18	- 9

b)

a	7	- 6	10	- 9	9	0
$a-(-9)$	16	3	19	0	18	9

2. Temperatura a scăzut cu 5ºC. **3.** $A=-6$, $B=7$, $C=2$, $D=13$, $E=-7$, $F=-3$, $G=-9$, $H=-3$, $I=3$, $J=-3$. **5.** $A=-2-(-2)=0$ sau $A=-2-4+6=-6+6=0$, $B=6$, $C=-27$ $D=1$. **6.** $A=-11$, $B=-12$, $C=14$, $D=-16$, $E=-41$, $F=5$. **7. a)** 8; **b)** –10; **c)** 5; **d)** –1; **e)** –2. **8. a)** 8; **b)** 15; **c)** – 13; **d)** 2; **e)** –6. **9. a)** 6; **b)** 1; **c)** – 1; **d)** 16.

10. a) $AB=|8-5|=3$; **b)** $AB=|-5-(-2)|=3$; **c)** $AB=|+1-(-3)|=4$; **d)** $AB=|-4-3|=7$.

Cap3_l4 1. $A=63$; $B=78$; $C=-56$; $D=-63$; $E=-96$; $F=80$; $G=128$; $H=-16$; $I=16$; $J=169$; $K=169$. **2.** $A=15$; $B=44$; $C=35$; $D=-24$; $E=-60$; $F=-18$; $G=-84$, H = 24, $I=50$; $J=134$; $K=-325$; $L=0$; $M=0$. **3.** $-6\cdot 3=-18$, $-6\cdot(-4)=24$ $3\cdot(-4)=-12$, trei posibilități. **5.** $A=24$; $B=-42$;; $D=-1440$; E = 0. **6. a)** 15; **b)** 4; **c)** -12; **d)** -4; **e)** -200; **f)** 0. **7.** $A=4\cdot 16=64$ sau $A=4\cdot 11+4\cdot 5=44+20=64$; $B=-42$; $C=-12$; $D=-390$. **8.** $A=-14$; $B=32$. **9. a)** $C=480$ $(1;6)$, $(-1;-6)$, $(2;3)$, $(-2;-3)$; **b)** $(1,-12)$, $(-1;12)$, $(2,-6)$, $(-2,6)$, $(3,-4)$, $(-3;4)$. **10. a)** semnul „-”; **b)** semnul „-”; **c)** semnul „+”.

11. semnul „+”.

Cap3_l5 2. $A=3$; $B=-5$; $C=18$; $D=-36$; $E=4$; $F=0$; $G=0$; $H=347$; $I=-347$; $J=1$. **3.** $A=12$; $B=-18$; $C=-3$; $D=12$; $E=-15$; $F=-16$; $G=12$. **4. a)** $\frac{-56}{8}=-7$, $\frac{-28}{4}=-7$ și $\frac{-56}{8}=\frac{-28}{4}$; **b)** $\frac{68}{-17}=-4$, $\frac{68}{-34}=-2$ și $\frac{68}{-17}<\frac{68}{-34}$; **c)** $\frac{-100}{-20}=5$, $\frac{100}{20}=5$ și $\frac{-100}{-20}=\frac{100}{20}$; **d)** $\frac{51}{17}=3$, $\frac{51}{3}=17$ și $\frac{51}{17}<\frac{51}{3}$; **e)** $\frac{-45}{-15}=3$, $\frac{-15}{-3}=5$ și $\frac{-45}{-15}<\frac{-15}{-3}$; **f)** $\frac{-90}{15}=-6$ $\frac{-45}{15}=-3$ și $\frac{-90}{15}<\frac{-45}{15}$. **5. a)** $x=5$; **b)** $y=9$; **c)** $a=-28$; **d)** $u=18$. **6. a)** $x=27$ **b)** $y=-121$ **c)** $z=156$; **d)** $a=-187$; **e)** $m=34$; **f)** $n=54$; **g)** $u=-774$; **h)** $v=801$.

7. a) $x=-4$; **b)** $x=13$; **c)** $x=-11$. **8. a)** $\{1,2,7,14\}$, $\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$; **b)** $\{1,3,5,15\}$, $\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15\}$; **c)** $\{1,2,3,6,9,18\}$, $\{\pm1,\pm2;\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\}$; **d)** $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, $\{\pm1,\pm2;\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24\}$; **e)** $\{1,37\}$, $\{\pm1,\pm37\}$; **f)** $\{1,3,7,21\}$, $\{\pm1,\pm3,\pm7,\pm21\}$; **g)** $\{1\}$ $\{\pm1\}$; **h)** $\{1\}$, $\{\pm1\}$. **9. a)** $2\cdot 3^2$; **b)** -2^5; **c)** $-2^3\cdot 3$; **d)** $-2^4\cdot 3^2\cdot 5$; **e)** $2\cdot 3\cdot 5^2$.

Cap3_l6 1. a) 7^4, baza este 7 și exponentul este 4; **b)** $(-5)^3$, baza este -5 și exponentul este 3; **c)** 4^2; **d)** $(-6)^4$; **e)** 3^6. **2. a)** $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$; **b)** $9\cdot9\cdot9$; **c)** $(-12)\cdot(-12)$; **d)** $(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)$; **e)** $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$. **3. a)** 8; **b)** 9; **c)** 16; **d)** 9; **e)** –125 ; **f)** –1024; **g)** –343; **h)** 144; **i)** 121; **j)** 225; **k)** 169; **l)** 625; **m)** 0; **n)** 196; **o)** 1; **p)** 1. **4. a)** 9; **b)** 9; **c)** 3; **d)** 5; **e)** 5.
5. $A=64$; $B=64$; $C=243$; $D=-100000$; $E=-343$; $F=-1$; $G=-3125$; $H=-8$; $I=-27$ **6.** $A=81$; $B=25$; $C=-11$; $D=49$; $E=16$; $F=-8$; $G=-144$; $H=121$; $I=-1$
7. $A=(-3)^2=9$; $B=7^2=49$; $C=-2^2=-4$; $D=3^{10}$; $E=2^{34}$; $F=-5^8$.
8. a) $7<9\Rightarrow5^7<5^9$, **b)** $25>12\Rightarrow3^{25}>3^{12}$; **c)** $9>5\Rightarrow2^9>2^5\Rightarrow-2^9<-2^5\Rightarrow(-2)^9<(-2)^5$
d) $(-13)^3<0,\ (-13)^2>0\Rightarrow(-13)^3<(-13)^2$; **e)** $4<8\Rightarrow4^7<8^7$;
f) $(-4)^3<(-2)^3$;**g)** $(-3)^5>(-4)^5$;**h)** $(-2)^4=2^4$;**i)** $(-3)^5<3^5$; **j)** $(-3)^4=3^4>2^4$.
Cap3_l7 1. a) 0; **b)** – 20; **c)** – 25; **d)** 1. **2. a)** – 34; **b)** 10; **c)** 0; **d)** – 2. **3. a)** 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** – 2. **4. a)** 21; **b)** 0; **c)** 26; **d)** 0. **5. a)** 2; **b)** 2; **c)** – 9; **d)** 2. **6. a)** 0; **b)** – 20; **c)** 0; **d)** 1.
7. a) 26; **b)** 101; **c)** -22; **d)** – 1. **8. a)** – 167; **b)** 7; **c)** 57.
Cap3_l8 1. a), b) și **d)** sunt ecuații. **2. a)** NU; **b)** NU; **c)** DA; **d)** NU. **3. a), b)** și **d)** sunt ecuații echivalente, **c), e)** ecuațiile nu sunt echivalente. **4. a)** – 16; **b)** – 39; **c)** – 7; **d)** 13; **e)** 54; **f)** 7; **g)** 12; **h)** 0; **i)** 4; **j)** – 3; **k)** 5; **l)** 2. **5. a)** – 2; **b)** – 3; **c)** 9; **d)** – 28; **e)** 2; **f)** – 3; **g)** 2. **6. a)** 2; **b)** 2; **c)** nu are soluție în $\mathbb{Z}$; **d)** – 4; **e)** 1; **f)** nu are soluție în $\mathbb{Z}$; **g)** – 14. **7. a)** $S=\{-4,-3,-2,...\}$; **b)** $S=\{...,2,3,4\}$; **c)** $S=\{4,5,6,...\}$; **d)** $S=\{...,-6,-5,-4\}$; **e)** $S=\{-5,-4,-3,...\}$; **f)** $\{2,3,4,...\}$; **g)** $S=\{1,2,3,...\}$ **h)** $S=\{...,-2,-1,0\}$. **8. a)** $x\in\{-7,7\}$; **b)** $x\in\{-6,6\}$; **c)** $x\in\{14,-8\}$; **d)** $|x+2|=-6$ imposibil, deci ecuația nu are soluție; **e)** $x\in\{-1,-3\}$. **9. a)** 9; **b)** 10; **c)** orice $x\in\mathbb{Z}$ este soluție; **d)** 0.
Cap3_l9 1. $x+130=-15\Rightarrow x=-15-130=-145$. **2.** $59-x=19\Rightarrow x=59-19=40$.
3. $(-7)\cdot x=56\Rightarrow x=56:(-7)=-8$. **4.** $x:8=-3\Rightarrow x=8\cdot(-3)=-24$.
5. Inecuația este $x+3\geq-1\Rightarrow x\in\{-4,-3,-2,-1\}$. **6.** Inecuația este $x-5\leq2\Rightarrow x\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. **7.** $-5<2\cdot x+3<5\Rightarrow x\in\{-3,-2,-1,0\}$.
8. $|x|=13-5\Rightarrow|x|=8\Rightarrow x=8$ sau $x=-8$. **9.** $|x|=(-2)-(-5)\Rightarrow|x|=3\Rightarrow x=3$ sau $x=-3$.
10. $|x|=7+3\Rightarrow|x|=10\Rightarrow x=10$ sau $x=-10$. **12.** $(2+x-6+8):4=2\Rightarrow x=4$. **13.** 16.
14. Media aritmetică a celor trei numere este 18; apoi: $(15+21+18+x):4=18+2\Rightarrow x=26$.
15. Se notează cu *x* numărul băncilor; numărul elevilor este egal atât cu $2\cdot x+3$, cât și cu $(x-4)\cdot3$ și se obține ecuația $2\cdot x+3=(x-4)\cdot3$, cu $x=15$, deci în clasă sunt 15 bănci și 33 de elevi. **16.** $5\cdot8=45\cdot x\Rightarrow x=2$ bilete la teatru. **17.** Numerele întregi impare consecutive sunt de forma $2\cdot k+1,\ 2\cdot k+3,\ 2\cdot k+5$, iar suma lor este $6\cdot k+9=-33\Rightarrow k=-7$; numerele sunt: –13, –11, –9.
Portofoliu_Cap3 **1.** $B=\{-4;-5;-205\}$; $C=\{+2;+3;0;74\}$; $D=\{+2;+3;74\}$;

$E=\left\{+2;+3;\frac{2}{3};74;0,37\right\}$. **3.** Opusul lui 9 e – 9 și modulul este 9; opusul lui – 13 este 13 și modulul egal cu 13. **4. a)** 42 > 24; **b)** – 13 > – 31 ; **c)** – 1 > – 2; **d)** – 5 < 0; **e)** – 34 > – 43; **f)** 3 > – 1; **g)** – 3 < 1; **h)** 0 < 5 **i)** 42 > 41. **5. a)** – 24; 23; **b)** – 22 și 22, – 23 și 23;
c) $-24<-23<-22<21<22<23$; **d)** 21. **6.** heliu; hidrogen; neon; azot; argon; oxigen. **7.** $A=7$ $B=2$; $C=-12$; $D=-12$; $E=22$; $F=-41$; $G=-35$; $H=-14$.
8. $a+(b+c)=(a+b)+c=-23+(-9)=-32$. **9.a)** 1, -1, 5; **b)** 4, - 4. **10.** – 265.
11.a) $10-15+1=-4$; **b)** $-5+10-8=-3$; **c)** $7+11-20=-2$; **d)** $10-25-3=-18$;
e) $5-(+13+9)=17$ **13. a)** – 18; **b)** 20; **c)** 196; **d)** 0; **e)** -138; **f)** 459; **g)** 0. **15. a)** $x=-84$;
b) $y=-17$; **c)** $z=18$; **d)** $a=28$; **e)** $x=2$; **f)** $u\in\mathbb{Z}$; **g)** v = -1. **16.** $-7,13,-23,31$ numerele prime, $9,-15,18$ numerele compuse. **17.** $A=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$; $B=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$; $C=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. **18.** $A=-2$; $B=3$; $C=-2$; $D=-5$; $E=-4$; $F=1$; $G=3$.
19. I. $A=64$; $B=9$; $C=1000000$; $D=-1$; $E=0$; $F=1$; $G=4096$. **II.** $A=-216$; $B=225$; $C=-13824$; $D=17424$; $F=0$; **III.** $A=2$; $B=18$; $C=1$; $D=43$; **IV.** $A=-360$ $B=-10800$; $C=9800$; $D=72$; **V. a)** -1; **b)** 1; **c)** 500. **20. a)** 5; **b)** -14; **c)** -4; **d)** 0; **e)** -23; **f)** 4; **g)** -1; **h)** 4; **i)** -2; **j)** 2; **k)** 1; **l)** $x\in\mathbb{Z}$; **m)** -5; **n)** -6. **21. a)** $m=18$; **b)** $m=-1$; **c)** $m=1$; **d)** $m=2$
22. a) $S=\{...,-1,0,1\}$; **b)** $S=\{-1,0,1,...\}$; **c)** $S=\{...,0,1,2\}$; **d)** $S=\{1,2,3,...\}$;
e) $S=\{...,1,2,3\}$; **f)** $S=\{3,4,5,...\}$; **g)** $S=\{-7,-6,-5,...\}$; **h)** $S=\{6,7,8,...\}$;
i) $S=\{...,-4,-3,-2\}$; **j)** $S=\{...-1,0,1\}$; **k)** $S=\{...7,8,9\}$; **l)** $S=\{7,8,9,...\}$;
m) $S=\{...,0,1,2\}$; **n)** $S=\{...,-1,0,1\}$. **24.** Numerele sunt –5 și 7. **25.** Numărul mai mic se notează cu b, iar cel mai mare cu a și $a=4\cdot b+1$, iar ecuația va fi $4\cdot b+1-b=40$, $b=13$ și $a=53$. **28.** Inecuația este $a+2\cdot a\leq 15\Rightarrow a\leq 5$. Numerele sunt 0 și 0, 1 și 2, 2 și 4, 3 și 6, 4 și 8, 5 și10. **29.** Inecuația este $a+4\cdot a\geq -15\Rightarrow a\geq -3$, iar cele două numere sunt: –-3 și –12, –2 și –8, –-1 și –4.

Cap4_l1 4. $C=\left\{\pm\frac{3}{10},\pm\frac{5}{10},\pm\frac{7}{10},\pm\frac{3}{1},\pm\frac{5}{1},\pm\frac{7}{1}\right\}$. **6. a)** $x\in\{1,2,3\}$; **b)** $x=4$; **c)** $x\in\{5,6\}$.
7. $\frac{13}{5};-\frac{37}{7};-\frac{16}{9};\frac{57}{4};\frac{131}{6}$. **8.** $1\frac{1}{2};2\frac{3}{4};-2\frac{3}{5};2\frac{5}{11};-3;-4;3\frac{10}{23};2\frac{5}{100}$. **9.** $\frac{22}{15};\frac{23}{15};\frac{26}{15};\frac{28}{15};\frac{29}{15}$.
10. Suprafețele sunt echivalente.

Cap4_l2 1. a) F; **b)** A; **c)** A; **d)** A; **e)** F; **f)** A. **2. a)** $\frac{7}{5}$; **b)** -3; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{1}{5}$; **e)** $-\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{1}{8}$; **g)** $\frac{1}{4}$
h) 0; **i)** $-0,25$. **3.** $A=0,1$; $B=4,47$; $C=0,215$; $D=0$; E = -0,8(2).
4. $A=\frac{11}{12};B=\frac{13}{12};C=0;D=\frac{4}{5}$. **5. a)** $12\frac{2}{3}<12\frac{5}{6}$; **b)** $\frac{1}{6}$. **6. b)** $AB=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right|=\frac{2}{3};BC=\frac{2}{3}$.
7. $9<9,81<10$.

Cap4_l3 1. $\frac{4}{7}$; $-\frac{1}{15}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{10}$; $-\frac{4}{5}$; 1; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{4}{45}$; $-\frac{4}{15}$; 0. **2. a)** 762,5; **b)** – 5367;

c) –134,6; **d)** 50,76; **e)** 235,91; **f)** 6,48; **g)** –95,76; **h)** –56,088; **i)** 2,48; **j)** 0,824. **3. a)** 3,83(7); **b)** –3,7(3); **c)** 2,5(6); **d)** –4,6(185). **4.** Produsul celor două numere din fiecare pereche este egal cu 1. **5.** $A=\frac{3}{7}$; $B=-21$; $C=\frac{7}{9}$; $D=-\frac{17}{24}$; $E=-\frac{4}{3}$; $F=\frac{147}{50}$.

6. $A=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)=1\cdot1=1$; $B=-4$; $C=3$. **7. a)** $\frac{10}{7}$; **b)** $-\frac{1}{4}=-0,25$;

c) $(-5\cdot a):\frac{b}{2}=-5\cdot a\cdot\frac{2}{b}=-10\cdot\frac{a}{b}=-10\cdot1,25=-12,5$; **d)** -1.

Cap4_l4 **1.** $A=3^5$; $B=4^4$; $C=10^6$; $D=\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $E=\left(\frac{4}{5}\right)^3$; $F=\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; $G=(1,5)^4$;

$H=(0,2)^4$. **2. a)** $500<2^9=512<1000$; **b)** $700<3^6=729<1000$. **3. a)** 2^8; **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$;

c) $(-3,5)^3$; **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{24}$; **e)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-35}$. **4. a)** $3^{72}<3^{74}=\left(3^2\right)^{37}=9^{37}$; **b)** $4^{16}>8^9$; **c)** $3^{12}<9^7$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3<\left(\frac{2}{3}\right)^2$; **e)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}>\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; **f)** $\left[0,(3)\right]^2>\left[0,(3)\right]^3$; **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{14}>\left(\frac{1}{4}\right)^8$; **h)** $\left(\frac{4}{9}\right)^3<\left(\frac{3}{2}\right)^2$;

i) $\left(\frac{5}{2}\right)^3<\left(\frac{25}{4}\right)^2$; **j)** $\left(0,(6)\right)^{-3}>\left(0,(6)\right)^{-2}$. **5. a)** $n\in\{0,1,2\}$; **b)** $n\in\{0,1,2,3\}$; **c)** $n\in\{0,1,2,3\}$;

d) $n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$; **e)** $n\in\{0,1,2\}$. **6.** $A=42$; $B=15$; $C=11$.

Cap4_l5 1. a) $\frac{37}{12}$; **b)** $\frac{25}{16}$; **c)** $\frac{13}{24}$; **d)** $\frac{4}{3}$; **e)** $\frac{373}{9}$; **f)** 12. **2. a)** 200; **b)** 1; **c)** $\frac{13}{30}$; **d)** $\frac{5}{12}$; **e)** $\frac{31}{2}$

f) $\frac{26}{55}$. **3. a)** 0; **b)** 1; **c)** 1; **d)** 34.

4.

$$\left[\left(\frac{7}{9}+{}^{(11}\frac{77}{99}+{}^{(111}\frac{777}{999}\right):\frac{7}{9}-\frac{111}{700}:\left({}^{100)}\frac{1}{7}+{}^{10}\frac{1}{70}+\frac{1}{700}\right)\right]^n=8$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{9}{7}-\frac{111}{700}\cdot\frac{700}{100+10+1}\right]^n=8\quad\Leftrightarrow\left(\frac{21}{9}\cdot\frac{9}{7}-\frac{111}{700}\cdot\frac{700}{111}\right)^n=8\Leftrightarrow(3-1)^n=2^3\Leftrightarrow2^n=2^3\Leftrightarrow n=3\cdot$$

Cap4_l6 1. a) Da; **b)** Da; **c)** Da; **d)** Da; **e)** Da; **f)** Da. **2. a)** $x=-9$; **b)** $y=\frac{1}{4}$; **c)** $z=\frac{1}{3}$; **d)** $y=\frac{4}{3}$

e) $x=-\frac{1}{7}$; **f)** $a=\frac{1}{2}$. **3. a)** $x=15$; **b)** $y=-\frac{1}{10}$; **c)** $z=-\frac{5}{2}$; **d)** $u=\frac{2}{3}$; **e)** $x=-3,3$ **f)** $x=-\frac{13}{7}$

g) $x=-2$; **h)** $y=8,5$. **4.** $A=\{2\}$; $B=\varnothing$; $C=\varnothing$; $D=\left\{\frac{3}{4}\right\}$; $E=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

5. a) $x=2$; **b)** $x=1$; **c)** $x=3$; **d)** $x=\frac{4}{3}$; **e)** $x=\frac{3}{2}$; **f)** $x=-3$.

Cap4_l7 1. 6. **2.** 27, 28, 29. **6.** 15 lei. **7.** 32 l. **8.** l = 3 cm, L = 6 cm. **9. a)** 27, 28; **b)** 18, 19;

c) nu, suma dintre un număr par și un număr impar este un număr impar. **10.** 65 lei. **11.** 38,(7). **13.** 216. **14.** 19. **15.** 29 și 116. **16.** $2(80+x)<240; x<40 \Rightarrow x \in \{1,2,...,39\}$.

Portofoliu_Cap4 1. cu 2: $\frac{2}{6};-\frac{4}{10};-\frac{6}{8};\frac{22}{26};\frac{46}{34};\frac{74}{86};-\frac{190}{202};\frac{0}{38};$
cu 5: $\frac{5}{15};-\frac{10}{25};-\frac{15}{20};\frac{55}{65};\frac{115}{85};\frac{185}{215};-\frac{475}{505};\frac{0}{95};$ cu 7: $\frac{7}{21};-\frac{14}{35};-\frac{21}{28};\frac{77}{91};\frac{161}{119};\frac{259}{301};-\frac{665}{707};\frac{0}{133}$.
2. $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$; $-\frac{3}{7}$; $\frac{3}{2}$; 4; 2. **3.** Prima, a doua și a cincea egalitate sunt adevărate.

4. Distanțele sunt echivalente. **5.** $A=2$; $B=2$; $C=1$; $D=4$. **6.** $A=\frac{11}{8}$; $B=-\frac{46}{25}$; $C=\frac{10}{21}$; $E=\frac{23}{5}$; $F=\frac{176}{15}$; $H=\frac{1}{10}$; $I=\frac{47}{42}$; $J=-\frac{17}{45}$; $K=1$; $M=\frac{8}{15}$. **7.** $A=1,08(3)$; $B=1,75$;
9. $A=1$; $B=\frac{11}{5}$; $C=1$; $D=0$; $E=2$. **10.** $A=\frac{121}{100}$; $B=-\frac{78}{25}$; $C=-\frac{11}{50}$; $D=\frac{53}{12}$ $E=-\frac{17}{5}$; $F=-\frac{2}{5}$. **11. a)** $\frac{9}{10}:\frac{3}{5}=\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3}{2}$ și proba: $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot3}{5\cdot2}=\frac{9}{10}$ sau $\frac{9}{10}:\frac{3}{2}=\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{1}{5}$; **c)** $-\frac{8}{11}$; **d)** $\frac{7}{81}$; **e)** $\frac{1}{13}$; **f)** 15; **g)** -27; **h)** 8; **i)** $-\frac{24}{7}$; **j)** $-\frac{35}{24}$. **12.** $A=\frac{1}{5}$; $B=-\frac{1}{2}$; $C=2$; $D=-1$. **13.** $A=(0,5\cdot2)\cdot3,27=1\cdot3,27=3,27$; $B=-37,89$; $C=5863,5$; $D=-112$.
14. $A=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$ sau $A=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $B=\frac{5}{2}$, $C=-\frac{15}{8}$, $D=-\frac{1}{5}$, $E=-\frac{17}{10}$. **15. I. a)** 230,3; **b)** 230; **II.** 1,37 și 1,07. **17.** $A=5$; $B=-\frac{10}{3}$; $C=\frac{5}{7}$; $D=-3$; $E=\frac{28}{75}$. **18. a)** 2^2; **b)** 5^2; **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$; **d)** $\frac{5}{4}$ **e)** $(-3,5)^3$; **f)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$; **g)** $\frac{5}{7}$.

19. a) $2^{13} < 3^{13}$; **b)** $3^{14} > 4^7$; **c)** $9^{16} > 2^{32}$; **d)** $\left(-\frac{5}{6}\right)^4 > \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; **e)** $\left(\frac{4}{9}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; **f)** $(0,(3))^{-2} > (0,(6))^{-2}$. **20 .a)** $\frac{310}{3}$; **b)** $\frac{6}{11}$; **c)** 3; **d)** 1. **21. a)** $x=\frac{1}{8}$; **b)** $y=8$; **c)** $a=\frac{1}{2}$; **d)** $x=1,2$;
e) $x=6$; **f)** $x=-\frac{1}{20}$; **g)** $x=\frac{3}{2}$; **h)** $x=2$; **i)** $x=\frac{7}{4}$; **j)** $x=\frac{8}{3}$; **k)** $x=-\frac{5}{8}$; **l)** $x\in\mathbb{Q}$; **m)** $x=0$.
23. 20 l=$\frac{5}{8}$ din rezervor; capacitatea rezervorului = 32 l. **24.** Ambii au părție egale, $\frac{1}{6}$ din pepene. **25.** $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot200=120$ admiși.

Cap5_l1 1. $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle F$, $\sphericalangle G$ și $\sphericalangle H$. **2.** $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle F$. **3.** $\sphericalangle P=30^\circ$, $\sphericalangle Q=48^\circ$, $\sphericalangle R=52^\circ17'$. **4.** $\sphericalangle U=60^\circ$, $\sphericalangle V=30^\circ$, $\sphericalangle W=14^\circ26'$.

5. $x = 45^\circ$ **6.** $y = 90^\circ$. **7.** 52°. **8.** $62^\circ 25'$. **9.** $A = 67^\circ 30'$, $B = 112^\circ 30'$. **10.** $P = 36^\circ$, $Q = 54^\circ$.
11. a) $\sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle BAD$; **b)** $\sphericalangle PQR$ și $\sphericalangle STU$; **d)** $\sphericalangle XOY$ și $\sphericalangle PQR$. **12. a)** $\sphericalangle YOZ$ și $\sphericalangle XOZ$ **b)** $\sphericalangle EFG$ și $\sphericalangle IJK$. **13.** $\sphericalangle M = 180^\circ - \sphericalangle A = 180^\circ - x$ și $\sphericalangle N = 180^\circ - \sphericalangle B = 180^\circ - x$.
15. $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle A \le 90^\circ$ și $\sphericalangle B \le 90^\circ$.

Cap5_l2 1. a) $\sphericalangle MAD$ și $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle CAN$, $\sphericalangle MAD$ și $\sphericalangle DAN$, $\sphericalangle MAC$ și $\sphericalangle CAN$, $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle CBA$; **b)** $\sphericalangle AIB$ și $\sphericalangle BIC$, $\sphericalangle IJD$ și $\sphericalangle DJC$. **6.** Sunt coliniare. **9. a)** fals; **b)** adevărat; **c)** adevărat; **d)** adevărat.

Cap5_l3 1. a) adevărat; **b)** fals; **c)** fals; **d)** adevărat. **2. a)** adevărat; **b)** adevărat; **c)** adevărat; **d)** adevărat; **e)** fals. **3. b)** $\sphericalangle BOD$; **c)** $\sphericalangle COE = 180^\circ - \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOE = 20^\circ$; $\sphericalangle COE$ și $\sphericalangle DOF$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle DOF = 20^\circ$; $\sphericalangle COF = 70^\circ + 90^\circ = 160^\circ$ și $\sphericalangle AOD = 20^\circ + 90^\circ = 110^\circ$. **4.** $\sphericalangle XOU = 65^\circ$, $\sphericalangle XOV = 115^\circ$. **5.** 90°. **6.** 135°. **7.** 40°. **8.** Se arată că sunt bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare. **9.** 84°, 132°, 144°.

Cap5_l4 1. $AB \perp CD$, $AC \perp CB$; AC și AB, CB și AB, CD și AC, CD și CB oblice.
3. Diagonalele sunt perepndiculare; **c)** $AB, A'A, CD$; **d)** $QP, M'Q', QM$; **e)** VB și BC oblice, VA și VD oblice, $AB \perp AD$. **4. d)** $d(A,a) = AB < AC$. **5. c)** Oblica și perpendiculara duse prin O sunt oblice una față de alta; **d)** dreptele sunt paralele. **6. a)** distanța este DE; **b)** DF; **c)** CG; **d)** AH. **7.** a mediatoarea segmentului AB. **10. a)** B; **b)** d_2; **c)** D; **d)** D; **e)** O; **f)** G.

Cap5_l5 1. $a \parallel b$, $c \parallel e$, $c \perp a$, $c \perp b$, $e \perp a$, $e \perp b$, $d \perp f$. **2. a)** $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$; **b)** $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, $AA' \equiv BB' \equiv CC'$, $CB \not\equiv A'C'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $\sphericalangle A \not\equiv \sphericalangle C'$. **3.** $b \perp a$; **a)** paralele; **b)** perpendiculară. **4.** $d \perp b$. **5. a)** $AB \parallel DE$; **b)** $AD \parallel EF$; **c)** $BC \nparallel FG$; **d)** $DF \nparallel AB$.
6. a) BB', CC', DD'; **b)** $AD, B'C', A'D'$; **c)** $A'B', DC, AB$. **7.** Adevărat.
8. Se poate construi câte o unică dreaptă prin fiecare punct, în baza axiomei paralelelor.

Cap5_l6 1. a) $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle FCB$, $\sphericalangle GCB$ și $\sphericalangle DBC$; **b)** $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle HCG$, $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle FCH$ **c)** $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle BCG$, $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle GCH$, $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle BCF$, $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle FCH$; **d)** $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle GCB$, $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle FCB$; **e)** $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle FCH$, $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle GCH$. **2.** $d \nparallel d'$ deoarece unghiurile alterne interne nu sunt congruente. **3. a)** $a \parallel b$, deoarece se formează unghiuri corespondente congruente; **b)** $a \nparallel b$ - unghiurile alterne interne nu sunt congruente; **c)** $a \parallel b$ - unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare; **d)** $a \parallel b$ - unghiuri alterne externe congruente; **e)** $a \nparallel b$ - unghiurile externe de aceeași parte a secantei nu sunt suplementare.
4. a) corespondente, dreptele AD și CB, cu secanta AB; **b)** alterne interne, dreptele DC și AB, cu secanta AD; **c)** corespondente, dreptele AD și CB, cu secanta CD; **d)** corespondente, dreptele AB și CD cu secanta BC; **e)** alterne externe, dreptele AD și CB, cu secanta AB; **f)** interne de aceeași parte a secantei, dreptele AB și CD cu secanta AD; **g)** externe de aceeași parte a secantei, dreptele AD și CB, cu secanta AB. **5.** $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle B_5 = \sphericalangle B_7 = 37^\circ$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_3 = \sphericalangle B_6 = \sphericalangle B_8 = 143^\circ$.

Cap5_l7 2. Extremitățile coardei de 8 cm sunt diametral opuse și coliniare cu centrul cercului.

Nu se poate construi o coardă de 9 cm, pentru că cea mai lungă coardă este egală cu diametrul care are 8 cm. **3.** Primul este în interiorul cercului, al doilea în exteriorul cercului și al treilea pe cerc. **4.** Coarda cu lungimea cea mai mică este cea care subântinde arcul de 25° , iar cea cu lungimea cea mai mare este cea care corespunde arcului de 114° . **5.** 10° . **6. a)** 10 cm; **b)** 12 cm; **c)** 3,2 dm.

Cap5_l8 1. d_1 este exterioară, d_2 secantă și d_3 tangentă cercului. **2.** d_1 este exterioară, d_2 tangentă și d_3 secantă cercului. **3.** $2r$. **4.** Propoziția este falsă. Dreapta este exterioară cercului numai dacă distanța de la centru la dreaptă este mai mare decât raza. **5.** C_1 este tangent cu C_3 și exterior lui C_2 , și C_4; C_2 este tangent lui C_3 , secant lui C_4 și exterior lui C_1; C_3 este tangent lui C_1 și C_2 și exterior lui C_4 ; C_4 este secant lui C_2 și exterior lui C_1 și C_3 .
6. a) exterioare; **b)** secante; **c)** tangente exterioare; **d)** cerculC (O',r') este interior cercului C (O,r) **e)** tangente interioare; **f)** concentrice. **7.** Raza este de 2 cm.

Portofoliu_Cap5 1. a) 108° și 72°; **b)** 54° și 36°**. 2.** OM bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și ON bisectoarea $\sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON = \frac{1}{2}\cdot(\sphericalangle AOB) + \frac{1}{2}\cdot(\sphericalangle BOC) = \frac{1}{2}\cdot(\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$. **3.** $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = 180^\circ \Rightarrow$ semidreptele OA și OC sunt prelungire. **4.** $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ adiacente $\Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC$ și OA și OC sunt în prelungire $\Rightarrow \sphericalangle AOC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180^\circ$ și $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ sunt suplementare.
5. Unghiurile au măsura de 60°. **6.** 43° și 137°. **9.** Suma celor două unghiuri se calculează cu ajutorul unghiurilor în jurul unui punct și este $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$. **10.** 150°.
11. $\sphericalangle XOY = 90^\circ$ dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ sunt ambele ascuțite sau obtuze și $\sphericalangle XOY = 180^\circ$ dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ sunt suplementare. **12.** $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BA'C$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AB'C'$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B'$. **13.** $\sphericalangle C = 57^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 123^\circ$; două unghiuri consecutive sunt suplementare, iar cele opuse sunt congruente. **14.** $MN \parallel BC$, deoarece $\sphericalangle BCA, \sphericalangle MNA = 43^\circ$ sunt unghiuri corespondente congruente. **15.** $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow AM \parallel BC$ și $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle ABC \Rightarrow NA \parallel BC$, deci $MA \parallel NA$ și au punctul A în comun; așadar, dreptele AM și AN se confundă și punctele M, A, N sunt coliniare. **16.** Toate unghiurile sunt drepte.
17. Notăm cu x și y măsurile celor două tipuri de unghiuri care se formează și considerăm $x > y$. Evident, $x + y = 180^\circ$ și avem două cazuri: I. $3x = 276^\circ \Rightarrow x = 92^\circ$ și $y = 88^\circ$; II. $2x + y = 276^\circ$ și cum $x + y = 180^\circ$, deducem că $x = 96^\circ$ și $y = 84^\circ$. **18.** Cel cu raza proporțională cu 5. **19.** Cel cu diametrul invers proporțional cu 8. **20.** $45^\circ, 135^\circ, 45^\circ$ și 135° .
21. $\sphericalangle AOG = \sphericalangle COE = 60^\circ$ și $\sphericalangle AOC = \sphericalangle EOG = 120^\circ$. **22. a)** 180°; **b)** 90°; **c)** 30°; **d)** 150°. **23.** 3 cm. **24.** Diametrele sunt perpendiculare, întrucât fomează unghiuri drepte. **25.** $\overset{\frown}{AD} = 40^\circ$, $\overset{\frown}{DE} = 60^\circ$ și $\overset{\frown}{EB} = 80^\circ$. **26.** AB secantă, BC și AD tangente și CD exterioară. **27.** $0 < r' < 3$.
28. Perpendiculara prin B este secantă, cea prin C este tangentă și cea prin D exterioară.
29. $2r_1 = 3r_2$ și $r_1 + r_2 = 10$, deci $r_1 = 6$ cm și $r_2 = 4$ cm.

Cap6_l1 1. a) $\triangle ADB$ dreptunghic, $\triangle ABE$ isoscel, $\triangle DBC$ echilateral; **b)** AD, AB catete și BD ipotanuza; **c)** EB baza și vârful A. **2. a)** $\triangle AEB$ și $\triangle DEC$; **b)** $\triangle ADE$; **c)** $\triangle BEC$ și $\triangle BED$ **3. a)** $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle CBA$ sunt alăturate laturii BC; **b)** $\sphericalangle ACB$ este opus laturii AB; **c)** AB este latura alăturată unghiurilor A și B. **6. a)** adevărat; **b)** fals; **c)** fals; **d)** adevărat; **e)** fals. **7. a)** 14,5 cm; **b)** 13,2 cm; **c)** 18,9 cm; **d)** 12 cm; **e)** 10 cm; **f)** 6 cm. **8. a)** 5,5 cm; **b)** 7,5 cm; **c)** $2 \cdot 6 - 7 = 5$ cm. **9. a)** 10m, 25m, 30m; **b)** 67,5 mm, 90 mm, 112,5 mm. **10.** Perimetrul este egal cu 11 cm. Sunt două posibilități: dacă laturile congruente au suma lungimilor de 7 cm, atunci fiecare are 3,5 cm și baza 4 cm; dacă suma dintre lungimea unei laturi congruente și lungimea bazei este de 7 cm, atunci laturile congruente au 4 cm și baza are 3 cm.

Cap6_l2 1. a) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 22^\circ$; **b)** $\sphericalangle B = 100^\circ$;
c) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$; **d)** $\sphericalangle C = 35^\circ$ și $\sphericalangle B = 110^\circ$; **e)** $\sphericalangle A = 90^\circ$.
2. În cazul **b)** nu se poate, deoarece suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC nu este de 180°. **3.** $\sphericalangle ADB = 180^\circ - 75^\circ - 65^\circ = 40^\circ$, $\sphericalangle BDC = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ = 40^\circ$. **4.** 45°. **5.** $\sphericalangle A = 50^\circ$ $\sphericalangle C = 60^\circ$ și $x = 70^\circ$. **6.** $\sphericalangle CAB = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$ și $x = \sphericalangle CAB - \sphericalangle DAB = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$. **7. a)** $\sphericalangle IAB$, $\sphericalangle HAC$, $\sphericalangle DBA$, $\sphericalangle EBC$, $\sphericalangle FCB$, $\sphericalangle GCA$ **b)** $\sphericalangle IAB = \sphericalangle HAC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, $\sphericalangle DBA = \sphericalangle EBC = 100^\circ$, $\sphericalangle FCB = \sphericalangle GCA = 145^\circ$;
c) $\sphericalangle BAI = 115^\circ$ și $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle BAC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ = \sphericalangle BAI$; **d)** unghiuri obtuze congruente. **8. a)** $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$; **b)** $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$.
9. $\sphericalangle ABM = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 50^\circ$. **10.** $\sphericalangle A = 90^\circ : 3 = 30^\circ$, $\sphericalangle B = (\sphericalangle A) : 3 = 10^\circ$ și $\sphericalangle C = 180^\circ - 30^\circ - 10^\circ = 140^\circ$. **11.** $\sphericalangle C = 180^\circ - 3 \cdot (\sphericalangle A)$. **12.** $22^\circ 30'$ și $67^\circ 30'$.
13. $\sphericalangle B = 3 \cdot (\sphericalangle A) \Rightarrow \sphericalangle C = 2 \cdot (\sphericalangle B) = 6 \cdot (\sphericalangle A)$; $\sphericalangle A + 3 \cdot (\sphericalangle A) + 6 \cdot (\sphericalangle A) = 180^\circ \Rightarrow$ $10 \cdot (\sphericalangle A) = 180^\circ$. **14.** Unghiurile triunghiului au măsurile $30^\circ, 60^\circ$ și 90°.

Cap6_l3 1. Se folosește metoda de construcție pentru cazul L.U.L. **2.** Nu se poate construi triunghiul de la punctul **d)**, deoarece suma măsurilor celor două unghiuri date depășește 180º. La celelalte subpuncte, se utilizează metoda de construcție pentru cazul U.L.U.
3. b) $AB + AC < BC$, deci nu se poate construi triunghiul; **c)** $BC + AC < AB$, deci nu se poate construi triunghiul. La celelalte subpuncte, se utilizează metoda de construcție pentru cazul L.L.L. **4. a), b)** se folosește metoda de construcție pentru cazul L.U.L.; **c), d)** se folosește metoda de construcție pentru cazul U.L.U. **5. a)** $AC = 4$ cm și se utilizează cazul L.U.L.;
b) $AB = 3,5$ cm și se utilizează cazul L.U.L.; **c)** $AC = 3$ cm și se utilizează cazul L.U.L.;
d) $AB = 5$ cm și se utilizează cazul L.L.L. **6.** Se folosește metoda de construcție din cazul L.L.L.
7. a) și **b)** se pot construi triunghiurile; **c)** și **d)** nu se pot construi triunghiurile, pentru că suma a două din lungimile laturilor este mai mică decât lungimea celei de-a treia. **8.** Nu se poate construi triunghiul de la punctul **e)**, deoarece $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 190^\circ > 180^\circ$. **9.** Problema are două soluții.

Cap6_l4 3.a) $\sphericalangle C = 120^\circ$; **b)** punctul de intersecție este exterior triunghiului. **4. a)** $\sphericalangle A = 75^\circ$; **b)** punctul de intersecție este interior triunghiului. **7. a)** AI este bisectoarea unghiului A, deci $\sphericalangle BAI = 45^\circ$; **b)** $\sphericalangle CBI + \sphericalangle BCI = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 45^\circ$.

Cap6_l5 1. a) adevărat (cazul L.U.L.), **b)** și **c)** sunt false, **d)** adevărat (cazul U.L.U.), **e)** adevărat (cazul L.L.L.). **3. a)** $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$, cazul L.U.L.; **b)** $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$, cazul U.L.U.; **c)** $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$, cazul L.L.L.; **d)** $\triangle ADE \equiv \triangle CBF$, cazul L.U.L. **4.** Se folosește cazul de congruență L.L.L. **5.** Se utilizează cazul de congruență L.U.L. **6.** $OA \equiv OB$, fiind razele cercului de centru O, $PA \equiv PB$, fiind razele cercului de centru P, iar OP este latură comună; din cazul de congruență L.L.L., deducem că $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$. **7.** $\triangle DAB \equiv \triangle EAC \Rightarrow DA \equiv EA$, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle EAC \Rightarrow \sphericalangle DAC \equiv EAB$, deci $\triangle DAC \equiv \triangle EAB$, din cazul de congruență L.U.L., cu $DA \equiv EA$, $\sphericalangle DAC \equiv EAB$ și $AB \equiv AC$.

Cap6_l6 1. a) $AC \equiv FD$ sau $BC \equiv EF$ sau $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ sau $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$. **2. a)** $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$, cazul I.C.; **b)** $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$, cazul C.U.; **c)** $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$, cazul C.C.; **d)** $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$, cazul I.U. **3.** Congruența rezultă din cazul C.C., având $AC \equiv AC'$ și AB latură comună. **4.** Se folosește cazul I.U., cu unghiul A comun și $AB \equiv AC$. **5. a)** Aplicăm cazul de congruență C.U.; **b)** $\triangle ADB \equiv \triangle ADC \Rightarrow AB = AC = 8$ cm și $BD = DC = 6$ cm, adică $BC = 12$ cm, iar $P_{\triangle ABC} = 8 + 8 + 12 = 28$ cm.

Cap6_l7 1. $\triangle ABC \equiv \triangle MNP \Rightarrow MN = AB = 6$ cm, $NP = BC = 9$ cm și $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABC = 75^\circ$. **2.** Prin cazul L.U.L. se arată că $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$, de unde se obțin congruențele cerute. **3.** Din cazul de congruență U.L.U. se obține $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, de unde rezultă congruențele cerute. **4.** Din cazul de congruență L.L.L. se obține $\triangle DEA \equiv \triangle DCB$, de unde rezultă congruențele cerute. **5. a)** Din cazul de congruență L.U.L. se obține $\triangle DIA \equiv \triangle CIB$, de unde rezultă congruențele cerute; **b)** Se demonstrează că $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, de unde se obțin congruențele cerute. **6. a)** Din cazul de congruență L.U.L. se obține $\triangle AMB \equiv \triangle ANC$, de unde rezultă congruențele cerute; **b)** Din punctul **a)** se deduce că $BN \equiv MC$ și se folosește cazul de congruență L.L.L. pentru ΔBCN și ΔCBM.

Cap6_l8 1. a) Dacă se consideră $\triangle ABC$, cu $AB \equiv AC$ și medianele CM și BN, avem: $BM \equiv CN$, $BC \equiv BC$ și $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NCB \Rightarrow \triangle MBC \equiv \triangle NCB \overset{L.U.L.}{\Rightarrow} CM \equiv BN$; **b)** analog punctului **a),** se folosește în această situație cazul de congruență U.L.U.; **c)** pentru congruența înălțimilor se folosește cazul C.U. **2.** Dacă am considera un unghi de la bază drept sau obtuz și celălalt unghi de la bază ar avea aceeași măsură și suma măsurilor celor trei unghiuri ale triunghiului ar fi mai mare de 180º, ceea ce este fals. **3.** Deoarece $\sphericalangle NMD \equiv \sphericalangle PMD$, înseamnă că MD este bisectoarea unghiului din vârful triunghiului isoscel MNP, deci va fi și înălțime și mediană. **4.** $\sphericalangle JIM \equiv \sphericalangle KIM \Rightarrow IM$ este bisectoarea unghiului I, $IM \perp JK \Rightarrow IM$ este înălțimea din I a triunghiului; IM este înălțime și bisectoare, deci $\triangle IJK$ este isoscel. **5.** QI este mediană și înălțime a triunghiului PQR, deci acesta este isoscel. **6.** BD este bisectoare și mediană, deci $\triangle ABC$ este isoscel, cu vârful B. **7.** $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C = 55^\circ$; AD bisectoare, deci este și înălțime și în $\triangle ABD$ avem $\sphericalangle BAD = 180^\circ - 55^\circ - 90^\circ = 35^\circ$. **8.** AD înălțimea triunghiului isoscel este și mediană, deci D este mijlocul lui BC și $BD = BC : 2 = 3$ cm. **9.** AD înălțimea triunghiului isoscel este și bisectoare, deci $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle A)$, iar $\sphericalangle A = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$, deci $\sphericalangle BAD = 42^\circ$.

Cap6_l9 1. a) triunghiul cu toate laturile congruente este echilateral; **b)** triunghiul cu toate unghiurile congruente este echilateral; **c)** $AB = AC = BC = 4$ cm; **d)** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$; **e)** $AB = AC = BC = 6$ cm. **2.** $P = 3 \cdot 8 = 24$ cm. **3.** $l = P : 3 = 33 : 3 = 11$ cm. **4. a)** 2 cm; **b)** 6 cm; **c)** 8 cm; **d)** 90º; **e)** 90º. **5.** Deoarece $\triangle IJK$ este echilateral, are toate laturile congruente și, alegând $IJ \equiv IK$, îl putem considera triunghi isoscel, cu baza JK. Cum în orice triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la vârf este și înălțime și mediană, deducem că IL este înălțimea și mediana din I. **6.** Se consideră $\triangle MNP$ isoscel cu baza NP, iar mediana MI corespunzătoare bazei este bisectoarea $\sphericalangle NMP$ și înălțimea din M. **7.** $MA \perp LN$ și $\sphericalangle LMA \equiv \sphericalangle NMA \Rightarrow MA$ este înălțime și bisectoare, deci triunghiul LMN este isoscel, cu $ML \equiv MN$; $LB \perp MN$ și $\sphericalangle MLB \equiv \sphericalangle NLB \Rightarrow LB$ este înălțime și bisectoare, deci triunghiul LMN este isoscel, cu $LM \equiv LN$; astfel, $LN \equiv ML \equiv MN$, deci triunghiul LMN este echilateral. **8.** $PI \perp QR$ și $QI \equiv RI \Rightarrow PI$ înălțime și mediană, deci $\triangle PQR$ este isoscel, cu $PQ \equiv PR$; $QJ \perp PR$ și $PJ \equiv RJ \Rightarrow QJ$ înălțime și mediană, deci $\triangle PQR$ este isoscel, cu $QP \equiv QR$; astfel, $PQ \equiv QR \equiv RP$, deci $\triangle PQR$ este echilateral. **9.** QM este mediană și bisectoare, deci $\triangle QRS$ este isoscel, cu $QR \equiv QS$; RN este mediană și bisectoare, deci $\triangle QRS$ este isoscel, cu $RQ \equiv RS$ astfel, $QR \equiv RS \equiv SQ$, deci $\triangle QRS$ este echilateral.

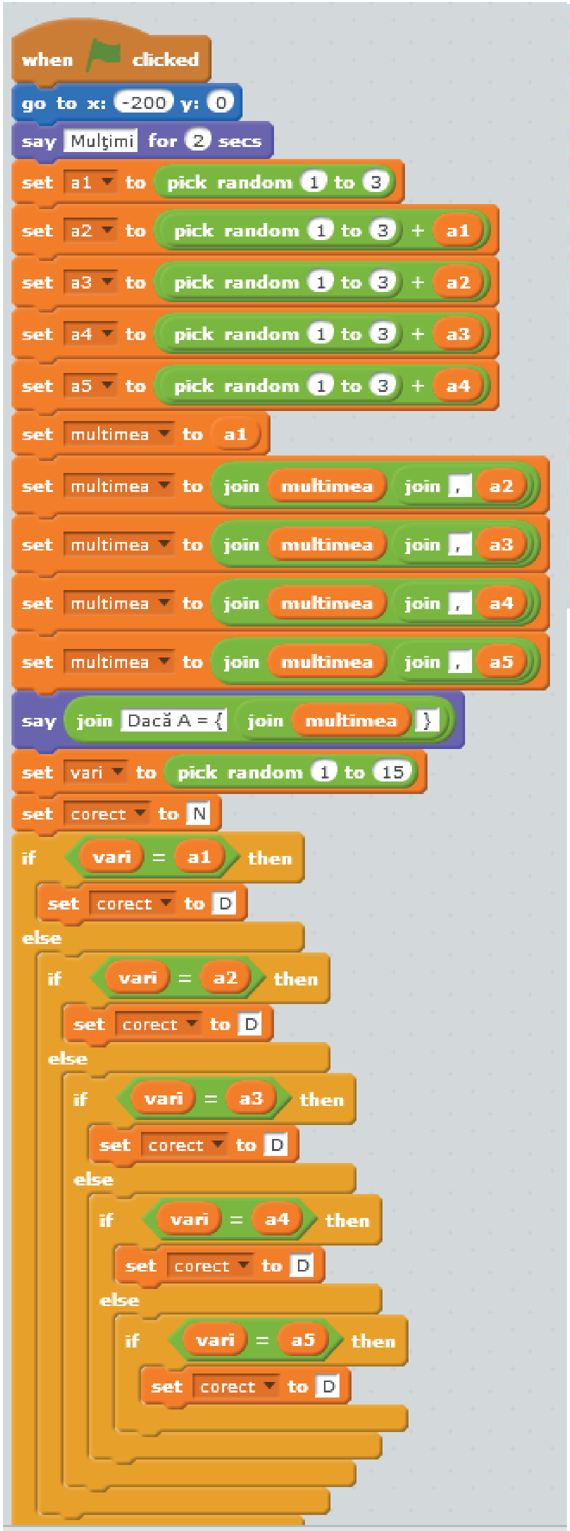
Cap6_l10 1. $DF = 2 \cdot DE = 10$ cm. **2.** $DE = FE : 2 = 3,5$ cm. **3.** ND se opune unui unghi de 30º, în triunghiul dreptunghic MDN, de unde $MN = 2 \cdot ND = 8$ cm. **4.** $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = BC : 2 \Rightarrow \sphericalangle C = 30^\circ$ și $\sphericalangle B = 60^\circ$. **5.** Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei, adică 7,5 cm. **6.** Lungimea ipotenuzei este dublul lungimii medianei corespunzătoare, adică 12,6 cm. **7.** Mediana AD are lungimea jumătate din lungimea laturii corespunzătoare BC, deci $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\triangle ABC$ este dreptunghic. **8. a)** $BC = 10$ cm; **b)** $AB = 5$ cm; **c)** $AC = 20$ cm. **9.** $26^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A. **10.** N și P sunt simetrice față de MQ deci Q este mijlocul lui NP. Astfel, MQ este mediana din unghiul drept al MNP, deci $NP = 2 \cdot MQ = 10$ cm.

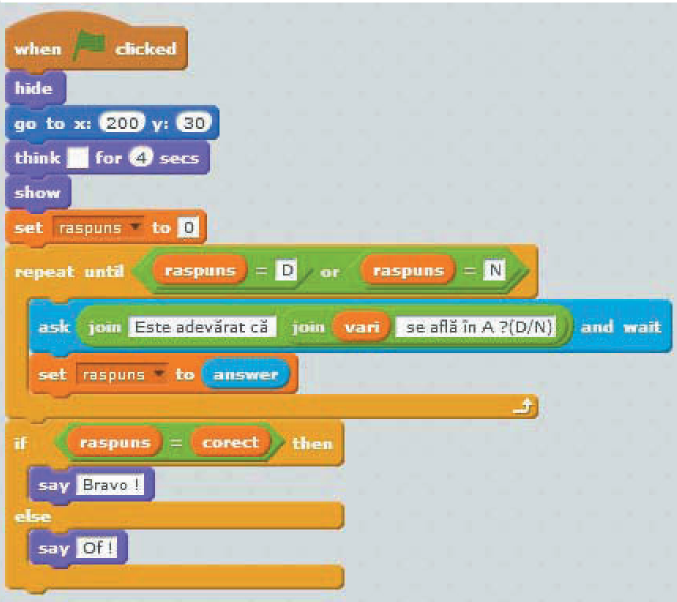
Portofoliu_Cap6 1. a) $EF = 8$ cm, $DE = 4$ cm, $P = 18$ cm; **b)** $DF = 10$ cm, $EF = 7,5$ cm, $P = 22,5$ cm; **c)** $EF = 28$ mm, $DF = 32$ mm, $P = 96$ mm. **2.** $a =$ lungimea uneia din laturile congruente, $b =$ lungimea bazei, $a = b + 12$ și $\dfrac{a}{b} = 1,(3) \Rightarrow b = 36$ cm și $a = 48$ cm, iar P=132 cm. **3.** $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. **5.** NB și PA sunt mediane ale triunghiului, iar G este centrul de greutate; deci MG este a treia mediană a triunghiului și MG conține mijlocul lui NP. **6.** Se construiește $\triangle ADM$ dreptunghic și apoi latura BC, unde B și C sunt pe dreapta DM, astfel încât M este mijlocul lui BC.

7. $AD = AC + CD = 4$ cm; $\triangle EAD \equiv \triangle CAB$ prin cazul C.C., de unde se obțin congruențele cerute. **8.** Dacă $MA \equiv MB$, atunci M aparține mediatoarei segmentului AB, iar M este situat la intersecția dreptei d cu mediatoarea segmentului AB. La punctul **c)**, dacă $AB \perp d$, punctul M nu există. **9.** Punctele de pe mediatoare sunt egal depărtate de capetele segmentului. Deoarece IM și IN sunt raze, avem $IM = IN$, deci I aparține mediatoarei. Aceasta se va construi ducând perpendiculara din I pe MN. **10.** Punctele D și A pot fi de aceeași parte a dreptei BC, D situat în interiorul sau exteriorul $\triangle ABC$ sau de o parte și de alta a dreptei BC.

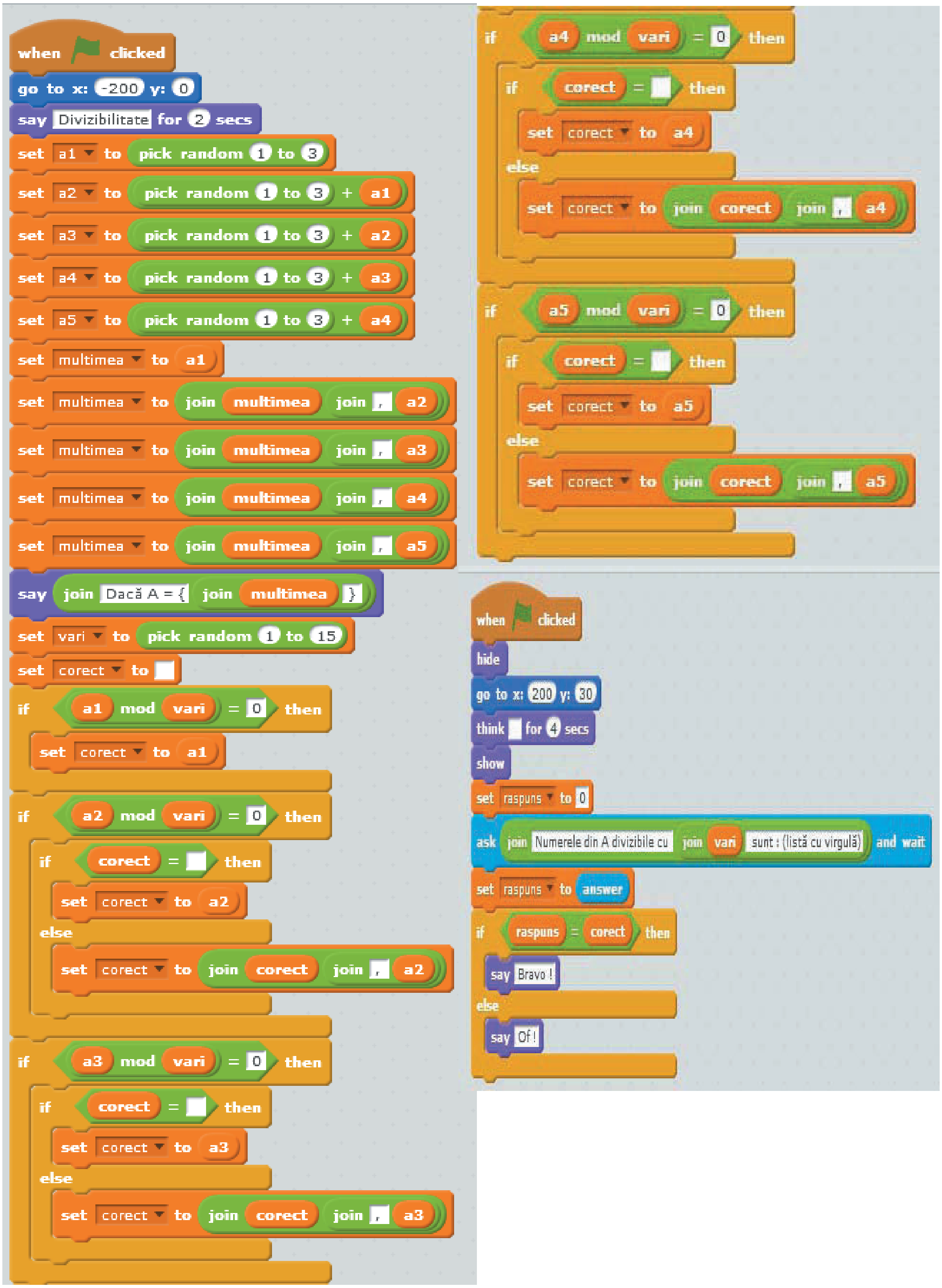
În toate cazurile, D și A sunt egal depărtate de B și C, deci se află pe mediatoarea lui BC care conține și mijlocul acestui segment. **11.** Cazul I: dacă $A, B \in d$, atunci $A = A'$ și $B = B'$; Cazul II: dacă $A \in d$ și $B \not\in d$, $A = A'$ și se arată că $\triangle ABO \equiv \triangle AB'O$, unde $BB' \cap d = \{O\}$, de unde $AB \equiv AB'$; Cazul III: dacă $A, B \not\in d$ și sunt de aceeași parte a dreptei d; Cazul IV: dacă $A, B \not\in d$ și sunt de o parte și de alta a dreptei d. **12. b)** P este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$; **c)** G este intersecția dintre mediatoarea segmentului AB și dreapta d. **13.** AD înălțimea triunghiului isoscel este și mediană, deci D este mijlocul laturii BC. Atunci, $BC = 2 \cdot BD = 5,6$ cm; $AB = AC = 5,6$ cm. Perimetrul este $AB + AC + BC = 16,8$ cm.
14. $\triangle ABO \equiv \triangle AB'O$, unde $BB' \cap a = \{O\}$, de unde $AB \equiv AB'$. **15.** Două soluții: 70º, 70º, 40º sau 55º, 55º, 70º. **16.** $\sphericalangle ONP \equiv \sphericalangle OPN$ ca suplemente de unghiuri congruente, deci $\triangle ONP$ are două unghiuri congruente și este isocel. **17.** Unghiurile exterioare din I au măsura egală cu semisuma măsurilor unghiurilor B și C, adică 40°. Atunci $\sphericalangle PBC = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ = \sphericalangle PCB$, de unde $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$. $\triangle ABC$ este deci isoscel cu vârful în A. **18. a)** $DC = BC : 2$, iar pentru că BE este înălțime într-un triunghi echilateral, avem BE mediană și $EC = AC : 2$; deci $DC \equiv EC$ și $\sphericalangle C = 60^\circ \Rightarrow \triangle CED$ echilateral; **b)** $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAB = 60^\circ$ corespondente, de aceeași parte a secantei, deci $DE \parallel AB$. **19. a)** CE mediană în $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow CE$ înălțime, deci $\triangle BEC$ este dreptunghic. **20. b)** Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, BE și AD sunt și mediatoare, iar O este punctul lor de concurență, deci și CO este mediatoare.
21. Înălțimile unui triunghi echilateral sunt și mediatoare și bisectoare, deci O este atât centrul cercului circumscris triunghiului ABC și este egal depărtat de vârfurile acestuia, cât și centrul cercului înscris în triunghi și este egal depărtat de laturile sale. **22. a)** O este mijlocul laturii AC, iar $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$ sunt echilaterale, deci $BO \perp AC$ și $DO \perp AC \Rightarrow \sphericalangle BOD = 180^\circ \Rightarrow$ B, O și D coliniare; **b)** $BO \equiv DO$ fiind înălțimi în două triunghiuri echilaterale congruente.
23. Se arată că $\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$, deci $DE \equiv EF \equiv FD$. **24.** $\triangle ABO \equiv \triangle AB'O$, unde $BB' \cap a = \{O\}$, de unde $AB \equiv AB'$ și $\sphericalangle BAB' = 60^\circ$. **25.** $BC = 8$ cm (dublul medianei din A) și $AC = 4$ cm (se opune unghiului de 30º). **26.** $AD = BD = AB = 3$ cm, iar perimetrul este de 9 cm.
27. $\triangle ABC$ este echilateral, cu perimetrul de 24 cm. **28.** IE și IF sunt medianele din unghiul drept ale triunghiurilor BEC și, respectiv BFC, deci $IE = IF = BC : 2 = 4$ cm. **29.** În $\triangle ADB$ dreptunghic, BD se opune unui unghi de 30º, deci $BD = AB : 2 = 2$ cm; $BC = 2 \cdot AB = 8$ cm și $DC = BC - BD = 6$ cm. **30.** Cum $\triangle AMD$ este dreptunghic în D și $AD = AM : 2$, măsura unghiului $\sphericalangle AMC = 30^\circ$. $\triangle BMC$ isoscel cu vârful în M, deci $\sphericalangle B = \sphericalangle AMC : 2 = 15^\circ$. Din $MA = MB = MC \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic în A și apoi $\sphericalangle C = 75^\circ$. **31.** $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle DAC$ (au același suplement). Fie E punctul comun celor două bisectoare. $\sphericalangle ABE + \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}\sphericalangle B + \sphericalangle BAD + \frac{1}{2}\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD = 90^\circ$, deci $\sphericalangle AEB = 90^\circ$. **32.** Traseul este A-B-C-D.

Sugestii pentru Proiecte Scratch
Proiect Mulțimi

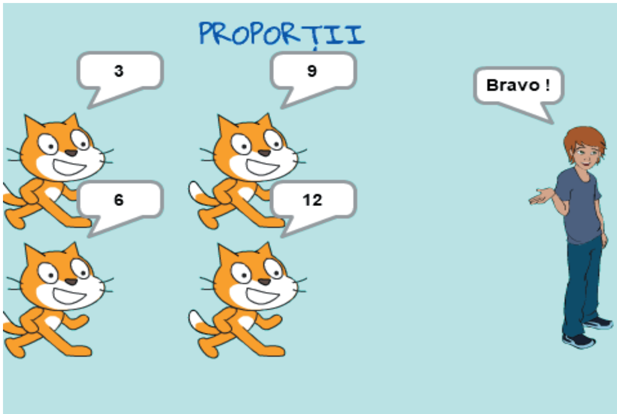


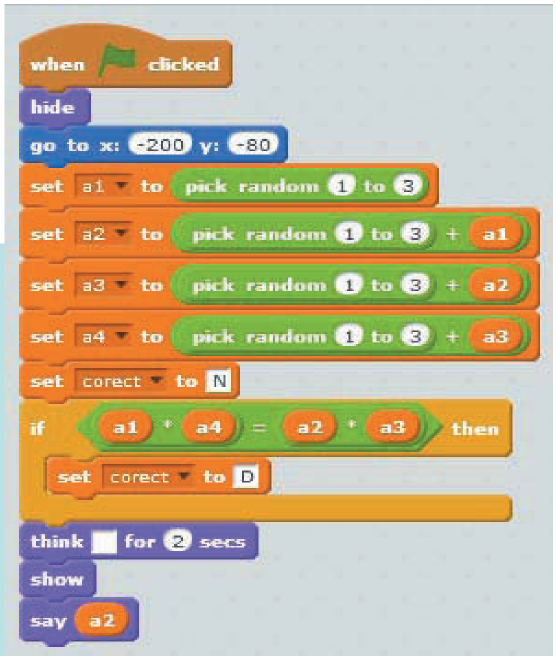


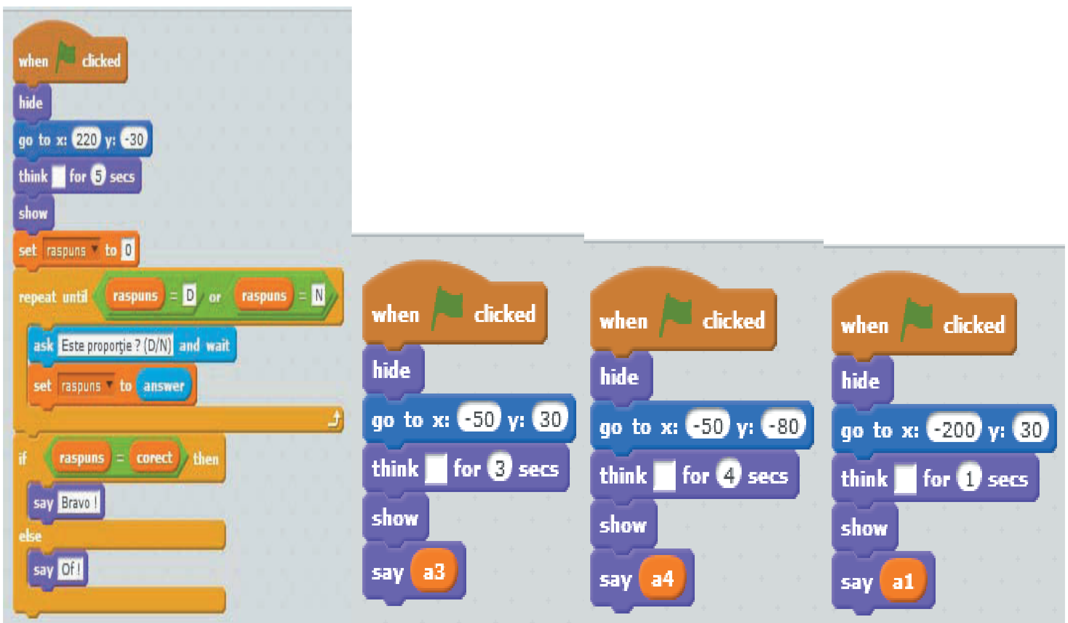
Proiect Divizibilitate



Proiect Proporții







Proiect Mărimi