MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

VI

DORIN LINȚ
MARIA ZAHARIA

MARANDA LINȚ
DAN ZAHARIA

MATEMATICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Dorin Linț
Maria Zaharia

Maranda Linț
Dan Zaharia

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU
CLASA A VI-A

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Școala	Anul școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.						
2.						
3.						
4.						

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.

Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
LINȚ, DORIN
Matematică: manual pentru clasa a VI-a / Dorin Linț, Maranda Linț, Maria Zaharia, Dan Zaharia - Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 2018
ISBN 978-606-31-0603-3

I. Linț, Dorin
II. Linț, Maranda
III. Zaharia, Maria
IV. Zaharia, Dan

51

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.
Str. Spiru Haret nr. 12, sector 1, cod 010176, Bucureşti
Tel.: 021.315.38.20
Tel./fax: 021.312.28.85
e-mail: office@edituradp.ro
www.edituradp.ro
Librăria E.D.P.: Str. Gen. Berthelot nr. 28-30

Comenzi pentru această lucrare se primesc:
• prin poștă, pe adresa editurii
• prin e-mail: comenzi@edituradp.ro
comercial@edituradp.ro
• prin telefon/fax: 021.315.73.98

Manualul digital
este realizat cu sprijinul
UNIVERSITĂȚII NAȚIONALE DE ARTĂ
TEATRALĂ ȘI CINEMATOGRAFICĂ
„I.L. CARAGIALE”

unatc
universitatea națională
de artă teatrală
și cinematografică
„I.L.Caragiale”

Redactor: **Claudia Viorelia Urs**
Tehnoredactori: **Gabriela Drăghia, Denisa Lorena Epure**
Coperta: **Alin Casapu**

Număr de plan: 63087/2018
Tipărit la Regia Autonomă Monitorul Oficial

CUPRINS

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

6 TRIUNGHIUL

Manualul se adresează, în special, elevilor claselor a VI-a și profesorilor care predau matematică la clase gimnaziale. Conținutul și structura manualului răspund cerințelor programei școlare și particularităților de vârstă ale elevilor.

Manualul este structurat în șase capitole, acestea fiind divizate în unități de învățare, formate din lecții, care se pot realiza într-un număr relativ flexibil de ore, ceea ce oferă posibilitatea de adaptare la particularitățile clasei de elevi. Conținutul manualului a fost gândit așa încât să poată fi parcurs integral în aproximativ 75% din numărul total de ore alocate disciplinei, pentru un an școlar.

În structura fiecărei lecții, s-a avut în vedere necesitatea folosirii unui suport intuitiv bine dozat, care să valorifice experiențele de învățare ale elevilor, să dezvolte deprinderi formate în anii anteriori, să stimuleze gândirea și imaginația, să îmbogățească bagajul de reprezentări matematice, să formeze și să dezvolte competențe de realizare a unor conexiuni intradisciplinare și interdisciplinare. Conținuturile cu caracter teoretic sunt prezentate într-o manieră atractivă, pornind de la exemple concrete, de la experiențe trăite de fiecare elev, fiind apoi „rezumate” într-o „fereastră” specială, parte componentă a fiecărei lecții.

Cele două teme de geometrie, Noțiuni geometrice fundamentale și Triunghiul, au fost concepute ca o continuare a activităților desfășurate în clasa a V-a. Raportarea la imagine, la viața cotidiană, exemplele și aplicațiile practice, observarea directă a configurațiilor geometrice, abordarea intuitivă a conceptelor geometrice sunt menite să ușureze trecerea spre model matematic, reprezentări matematice cu un anumit nivel de abstractizare, trecerea spre inițierea unui raționament matematic riguros.

Pe tot parcursul manualului, se folosește un limbaj accesibil, prin care sunt explicați termenii specifici matematicii. Notațiile sunt minimale, prin urmare, enunțurile sunt formulate așa încât, din context, să rezulte exact caracteristicile la care se referă acestea.

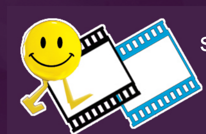
Activitățile de învățare prezentate în manual, ilustrează fiecare secvență de conținut din lecție, oferă modalități diverse de colaborare între elevi dar și de activitate independentă, asigură posibilitatea de folosire a softurilor educaționale specifice, stimulează creativitatea elevilor pasionați deja de matematică și avem speranța că va stimula și interesul celor care încă n-au „gustat” din frumusețea acesteia. Dorim ca exemplele și aplicațiile care fac referiri la alte domenii de studiu, precum: fizica, geografia, istoria, istoria matematicii, jocurile practice, activitățile în echipă, să atragă spre lecturarea, înțelegerea și învățarea matematicii, pe toți elevii.

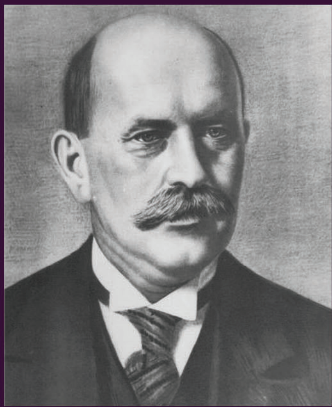
Pe lângă metodele tradiționale de evaluare, manualul prevede metode alternative, precum: investigația, proiectul, teste de evaluare sau autoevaluare, portofoliul. Posibilitatea de rezolvare, în format digital, a testelor de autoevaluare și a unor teme, vor asigura identificarea și înțelegerea proprietăților oferite de unele configurații geometrice și vor conduce la scurtarea duratei necesare realizării sarcinilor de lucru.

Pe întreg parcursul manualului sunt semnalizate cele trei tipuri de activități multimedia interactive de învățare (AMII):


elemente statice, de ascultare activă și observație dirijată


vizionare de filmuleț


scurtă animație



Gheorghe Ţiţeica (1873-1930) este primul matematician român care a fost recunoscut în lumea academică mondială, prin valoroase lucrări ştiinţifice.

A fost unul dintre cei mai mari geometri ai lumii și la diverse congrese de matematică a fost ales președintele secției de geometrie.

A fost invitat să ţină cursuri la universităţile din Roma, Bruxelles şi Paris, cursurile lui fiind de o desăvârşită artă a pedagogiei.

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situaţie dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii date
6. Modelarea matematică a unei situaţii date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

1

Mulțimi

1. Descriere. Notații. Reprezentări. Relaţia dintre un element și o mulțime
2. Relații între mulțimi
3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale
4. Operaţii cu mulţimi
5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime
6. Determinarea celui mai mare divizor comun şi a celui mai mic multiplu comun

1.1. Descriere. Notaţii. Reprezentări. Relaţia dintre un element şi o mulţime

Rezolvăm şi descoperim

1. Determinaţi numerele naturale x ştiind că $x+11 \leq 15$.

Rezolvare. Dacă x este un număr natural, atunci $x+11$ este de asemenea număr natural. Observând că $x+11 \geq 11$ şi ţinând cont de enunţ, rezultă că $x+11$ este egal cu unul dintre numerele: 11, 12, 13, 14 sau 15. Prin urmare $x+11=11$ sau $x+11=12$ sau $x+11=13$ sau $x+11=14$ sau $x+11=15$. Din aceste egalităţi deducem că x este egal cu unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3 sau 4.

Descoperim

Rezolvarea problemei arată că există mai multe numere naturale x care au proprietatea $x+11 \leq 15$. Ele sunt *distincte* şi *bine determinate* şi, împreună, formează o *colecţie*, o *grămadă* sau o *mulţime* de numere. Fiecare dintre aceste numere se numeşte *element al mulţimii.* Vom spune că *mulţimea numerelor naturale x care au proprietate* $x+11 \leq 15$ *este egală cu* $\{0,1,2,3,4\}$. Pentru a ne referi uşor la această mulţime, o putem nota cu o literă mare, de exemplu cu A şi vom scrie $A=\{0,1,2,3,4\}$. Se observă că mulţimea A, *este definită de elementele ei scrise între acolade*.

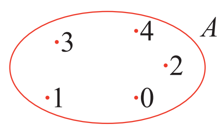
Este 3 element al mulţimii A? Da, pentru că este scris între acolade.

Este 7 element al mulţimii A? Nu, pentru că nu este scris între acolade.

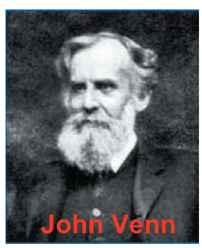
Expresia „*este element al mulţimii*” este înlocuită cu expresia sinonimă „*aparţine mulţimii*”, iar expresia „*nu este element al mulţimii*” este înlocuită cu expresia sinonimă „*nu aparţine mulţimii*”. Pentru „*aparţine*” se foloseşte simbolul $\in$, iar pentru „*nu aparţine*” se foloseşte simbolul $\notin$. Astfel, se scrie $3 \in A$ şi se citeşte „3 aparţine mulţimii A”; se scrie $5 \notin A$ şi se citeşte „5 nu aparţine mulţimii A”.

Putem defini mulţimea A enunţând *proprietatea caracteristică elementelor mulţimii* (pe care o are oricare element al mulţimii şi nu o are niciun alt element care nu este din mulţime): $A=\{x \mid x \text{ este număr natural şi } x+11 \leq 15\}$. În acest caz: $3 \in A$ pentru că 3 are *proprietatea caracteristică elementelor mulţimii*, adică *3 este număr natural şi* $3+11 \leq 15$. $5 \notin A$ pentru că 5 nu are *proprietatea caracteristică elementelor mulţimii* deoarece 5 este număr natural, dar $5+11 \geq 15$. Prin urmare: $A=\{0,1,2,3,4\}$ sau $A=\{x \mid x \text{ este număr natural şi } x+11 \leq 15\}$.

Mulţimea A poate fi ilustrată desenând o linie curbă închisă şi scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (*diagramă Venn-Euler*). Cele trei forme de definire a mulţimii A se numesc: *explicită*, *implicită*, cu *ajutorul diagramei Venn-Euler.*



Istorie Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulţimilor este foarte veche. Matematicianul Leonard Euler (1707 – 1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul John Venn (1834 – 1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătăţiri utile. Pentru aceasta, diagramele reprezentând mulţimi le numim diagrame *Venn-Euler*.



Rezumăm cunoştinţele

Mulţimea *este o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte numite* ***elementele mulţimii.***
Mulţimile se notează cu litere mari, iar elementele mulţimilor se notează cu litere mici.

Dacă A este o mulţime şi x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ şi vom citi „x aparţine lui A”. Dacă x nu este un element al mulţimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ şi vom citi „x nu aparţine lui A”.

O mulţime poate fi dată în trei moduri:

***1) explicit**, numind fiecare element al mulţimii; mulţimea se scrie punând între acolade elementele sale.*

***2) cu ajutorul diagramei Venn-Euler**; mulţimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă şi scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare.*

***3) implicit**, enunţând o proprietate caracteristică elementelor mulţimii (pe care o are oricare element al mulţimii şi nu o are niciun alt element care nu aparţine mulţimii).*

***O mulțime numerică** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.*

***O mulțime nenumerică** este o mulțime care nu este mulțime numerică.*

*Mulţimea care nu are niciun element se notează cu simbolul ∅ şi se numeşte **mulţimea vidă.***

Aplicăm cunoștințele

1.1. Fie M mulțimea cifrelor pare.

a) Completați propoziția care urmează: „*Cifrele pare sunt*: ... .”

b) Scrieți mulțimea M:

- numind fiecare element al mulțimii;
- cu ajutorul diagramei Venn-Euler.

c) Dacă $x \in M$, ce proprietate are x?

d) Scrieți mulțimea M enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii.

e) Copiați și înlocuți caseta alăturată cu (A) dacă afirmația este adevărată și cu (F) dacă afirmația este falsă:

$2 \in M$ ▭ $1 \notin M$ ▭ $4 \notin M$ ▭ $7 \in M$ ▭

2. La o oră de geografie profesorul explică: „*Vârful Moldoveanu este vârful muntos cel mai înalt din România, situat în Masivul Făgăraș, județul Argeș. Altitudinea sa este de două mii cinci sute și ceva metri*”. Mihai, un elev foarte bun la matematică, notează pe caietul său: „*altitudine Vârful Moldoveanu:* $\overline{25xy}$ m”. În pauză, Mihai află de la Alexandra, care este foarte bună la geografie, că altitudinea Vârfului Moldoveanu este de 2 544 m.

a) Scrieți mulțimea A ale cărei elemente sunt simbolurile numerice și literale folosite de Mihai pentru a scrie altitudinea Vârfului Moldoveanu.

b) Scrieți mulțimea B ale cărei elemente sunt cifrele folosite pentru a scrie numărul 2 544.

c) Una dintre mulțimile A și B este numerică, iar cealaltă este nenumerică. Precizați care este mulțimea numerică și care este mulțimea nenumerică.

3. O echipă de 15 copii este formată din fete și băieți. Știind că x este număr natural și $\frac{1}{x}$ din numărul de copii ai echipei sunt fete, iar echipa are cel puțin o fată și cel puțin un băiat:

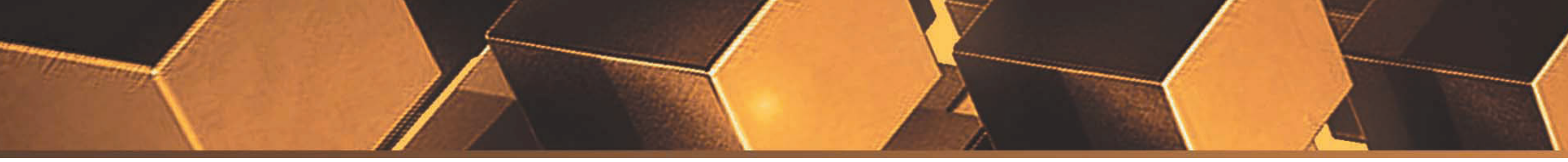
a) aflați numărul fetelor din echipă;

b) scrieți explicit mulțimea $M = \left\{ \frac{1}{x} \middle| \, x \text{ este numărul fetelor din echipă} \right\}$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x \text{ număr natural impar și } 5 < x < 7\}$.

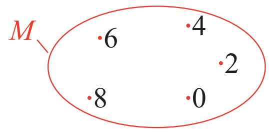
a) Câte elemente are mulțimea?

b) Mulțimea este denumită cu litera A. Folosiți în locul literei A simbolul potrivit și redenumiți mulțimea.



Ne verificăm

Diagrama Venn-Euler a lui M



1. a) Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8. b) $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

c) Dacă $x \in M$ atunci x are proprietatea x este cifră pară.

d) $M = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$

e) $2 \in M$ (A); $1 \notin M$ (A); $4 \notin M$ (F); $7 \in M$ (F).

2. a) $A = \{2, 5, x, y\}$; b) $A = \{2, 4, 5\}$; c) Mulțimea A este *mulțime nenumerică* (elementele ei sunt simboluri numerice și literale), iar mulțimea B este *mulțime numerică* (elementele ei sunt numere).

3. a) Cum $\frac{1}{x}$ din 15 este egal cu $\frac{15}{x}$, rezultă că numărul fetelor este $\frac{15}{x}$. Prin urmare 15 se împarte exact la natural nenul x. Altfel spus, 15 este divizibil cu x, deci x este egal cu unul dintre numerele 1, 3, 5 sau 15. Rezultă că numărul fetelor poate fi egal cu: $\frac{15}{1}$ sau $\frac{15}{3}$ sau $\frac{15}{5}$ sau $\frac{15}{15}$, adică 15, sau 5, sau 3, sau 1. b) $M = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right\}$.

4. a) Nu există niciun număr natural impar între 5 și 7, deci A este mulțimea vidă.

b) Se scrie $A = \{x \mid x \text{ număr natural impar și } 5 < x < 7\} = \emptyset$.

Activități de învățare

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din care sunt formate cuvintele:

a) număr; b) elev; c) profesor; d) vacanță.

Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul literelor scrise, pentru fiecare dintre cuvintele date.

2. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:

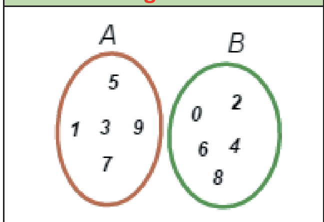
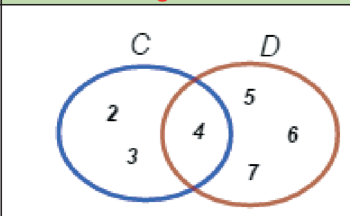
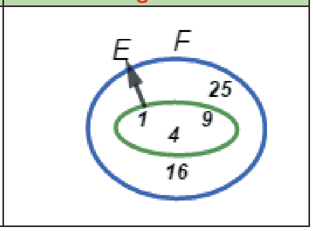
a) 2 018; b) 123 231; c) 17 382 731; d) 101 001 000.

Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul cifrelor scrise, pentru fiecare dintre numerele date.

3. Scrieți, cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor, următoarele mulțimi:

$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $S = \{1, 2, 4, 8, 16\}$; $T = \{10, 20, 30, \ldots, 90\}$.

4. Prin diagramele din *figura 1*, sunt reprezentate perechile de mulțimi $(A, B), (C, D), (E, F)$.

Fig. 1.1	Fig. 1.2	Fig. 1.3
		

a) Scrieți mulțimile date, pentru fiecare caz, prin enumerarea elementelor.

b) Scrieți mulțimile date, precizând proprietatea caracteristică a elementelor.

5. Se consideră mulțimea A, a tuturor râurilor care izvorăsc în România și mulțimea B, a formelor de relief existente în România.

a) Scrieți trei elemente ale mulțimii A; b) Scrieți patru elemente ale mulțimii B.

6. Scrieți mulțimea tuturor numerelor de cel mult trei cifre, care se pot forma doar cu cifrele 0 și 1.

7. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici decât 4:
a) prin enumerarea elementelor;
b) cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor mulțimii;
c) prin diagrama Venn-Euler.

8. Se consideră mulțimile $A=\{1,3,5,8\}$ și $B=\{2,3,5,6,9\}$. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevăratsau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $4\in A$;	☐	b) $5\in A$;	☐	c) $7\notin A$;	☐
d) $2\in B$;	☐	e) $3^2\in B$;	☐	f) $2^3\notin B$;	☐
g) $3\in A$ și $3\in B$;	☐	h) $1\in A$ sau $1\in B$;	☐	i) $4\in A$ sau $4\in B$;	☐
j) $1\in A$ sau $0\in\varnothing$	☐	k) $1\in A$ și $0\notin\emptyset$	☐	l) $9\in B$ și $9\notin A$.	☐

1.2. Relații între mulțimi

Aplicăm cunoștințele

1. Despre două mulțimi M și N se spune că sunt *mulțimi egale* dacă au aceleași elemente. Notăm $M=N$. Dacă mulțimile M și N nu sunt egale notăm $M\neq N$.
a) Scrieți mulțimile de mai jos și precizați mulțimile egale.
$A=\{x$ număr natural și $3<x<8\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$, $C=\{x$ număr par și $x<5\}$,
$D=\{x$ număr natural și $4\leq x\leq 7\}$, $E=\{x$ cifră și $x\geq 3\}$.
b) Mihai susține că „$A=B$ și $B=C$”. Sonia susține că „$A=B=D$, $B\neq C$ și $C=D$”. Cine are dreptate?
c) Corectați afirmațiile celor doi colegi, astfel încât, fiecare afirmație să fie adevărată.

2. Despre o mulțime A se spune că este *inclusă* într-o mulțime B dacă *toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B*. Se mai spune că A este o *parte* a lui B. Notăm $A\subset B$ (citim „A este *inclus* în B”) sau notăm $B\supset A$ (citim „*B include A*”).
Ana, Mihai și Sonia se joacă. Fiecare scrie pe tablă câte o mulțime:
$A=\{x$ număr natural și $3\cdot x\leq 10\}$, $M=\{x$ număr natural, $x\neq 0$ și $x+3<7\}$,
$S=\{1, 2, 3\}$.
a) Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
a_1) $M=A$; a_2) $M\subset A$; a_3) $A\subset M$; a_4) $S\subset A$; a_5) $A\subset S$.
b) Corectați relațiile de mai sus, scrise între două mulțimi, astfel încât, toate să fie adevărate.

Rezumăm cunoștințele

Două mulţimi sunt egale dacă au aceleaşi elemente. Dacă A şi B sunt două mulţimi egale, notăm $A=B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A\neq B$.

O mulţime este inclusă într-o altă mulţime, dacă elementele primei mulţimi sunt şi elemente ale celei de-a doua mulţimi.

Mulţimea A este inclusă în mulţimea B dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B.

Dacă *mulţimea A este inclusă în mulţimea B*, scriem $A\subset B$. Se mai spune că B include pe A şi scriem $B\supset A$. În acest caz se spune despre A că este o submulţimea lui B, sau că A este o parte a lui B.

Dacă *mulţimea A nu este inclusă în mulţimea B*, adică A nu este o submulţime a lui B, notăm $A\not\subset B$ (citim „A nu este inclus în B”), sau $B\not\supset A$, (citim „B nu include pe A”).

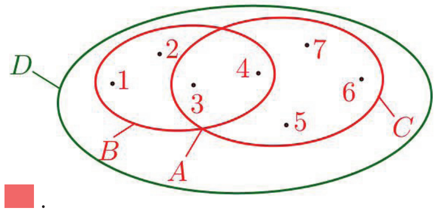
Mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi A şi notăm: $\emptyset\subset A$

Orice mulţime este inclusă în ea însăşi: $A\subset A$, oricare ar fi mulţimea A.

Două mulţimi sunt egale dacă şi numai dacă fiecare din ele este o submulţime a celeilalte mulţimi: $A=B \Leftrightarrow A\subset B$ şi $B\subset A$

Aplicăm cunoștințele

3. Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.



a) Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals
$B \subset C$ ■; $C \subset B$ ■; $B \subset D$ ■; $A \subset D$ ■.

b) Una dintre mulțimile date le conține pe celelalte trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

c) Una dintre mulțimi este conținută de celelalte trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$

a) Mulțimea M are o submulțime care nu are nici un element. Care este aceasta?

b) Mulțimea M are o submulțime care are trei element. Care este aceasta?

c) Scrieți toate submulțimile lui M care au: • un singur element; • două elemente;

d) Scrieți mulțimea ale cărei elemente sunt toate submulțimile (părțile) lui M.

Ne verificăm

1. a) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{0, 2, 4\}$; $D = \{4, 5, 6, 7\}$;
$E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deci: $A = B = D$.

b) Afirmația lui Mihai „$A = B$ și $B = C$” este falsă deoarece $B \neq C$. Afirmația Soniei „$A = B = D$, $B \neq C$ și $C = D$” nu este adevărată deoarece $C \neq D$. Nici Mihai și nici Sonia nu au dreptate.

c) Afirmațiile corecte sunt: „$A = B$ și $B \neq C$”; „$A = B = D$, $B \neq C$ și $C \neq D$”.

2. a) Pentru a stabili care dintre afirmații sunt adevărate scriem mulțimile numind elementele fiecăreia. Prin urmare: $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $M = \{1, 2, 3\}$; $S = \{1, 2, 3\}$. Rezultă: a_1) $M = A$ (F); a_2) $M \subset A$ (A); a_3) $A \subset M$ (F); a_4) $S \subset A$ (A); a_5) $A \subset S$ (F).

b) Relații corecte: b_1) $M \neq A$ (A); b_2) $M \subset A$ (A); b_3) $A \not\subset M$ (A); b_4) $S \subset A$ (A); b_5) $A \not\subset S$ (A).

3. a) $B \subset C$ (F); $C \subset B$ (F); $B \subset D$ (A); $A \subset D$ (A).

b) Mulțimea care le conține pe celelalte trei mulțimi este D: $A \subset D$; $B \subset D$ și $C \subset D$.

c) Mulțimea care este conținută de celelalte trei mulțimi este A: $A \subset B$; $A \subset C$ și $A \subset D$.

4. a) Submulțimea lui M care nu are nici un element este *mulțimea vidă*, adică $\emptyset$;

b) Submulțimea lui M care trei elemente este M, adică $M \subset M$.

c) Submulțimile lui M care au un singur element sunt: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$. Submulțimile lui M care au două elemente sunt: $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$;$\{2, 3\}$.

d) Toate submulțimile lui M sunt: $\emptyset$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\}$.

Activități de învățare

1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

a) $A = \{1, 2\}$; b) $B = \{2, 3, 5\}$; c) $C = \{a, b, c, d\}$.

2. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\{1, 2\} \subset M$; b) $M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\subset, =, \not\subset$ astfel încât afirmațiile să fie adevărate.

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

b) Dacă există cel puțin un element al mulțimii A care nu este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii Bși orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci $A \ldots B$.

4. Scrieți o mulțime M ale cărei elemente să fie 4 numere naturale, apoi scrieți toate submulțimile lui M cu câte 3 elemente.

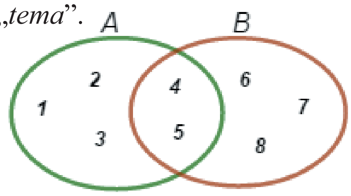
5. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M astfel încât fiecare submulțime să aibă 4 elemente.

6. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\{1,2\} \subset M$; b) $M \subset \{1,2,3,4,5\}$.

7. Scrieți submulțimile cu două elemente ale mulțimii literelor cuvântului „*tema*”.

8. În figura alăturată sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A și B.



a) Determinați mulțimea C, a elementele comune mulțimilor A și B.

b) Scrieți submulțimile mulțimii C.

9. Se consideră mulțimea

M = {*Arad, Brașov, București, Constanța, Craiova, Iași, Timișoara*}

a) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe din Transilvania.

b) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe din Moldova.

c) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe cu cel puțin 1 000 000 de locuitori.

10. La un magazin, s-au înregistrat într-o săptămână, din vânzarea unor mărfuri, sumele de bani înscrise în tabelul următor, în lei:

Marfa / Ziua	dulciuri	flori	jucării	cărți	total
luni	180	60	50	70	…lei
marți	170	30	45	75	…lei
miercuri	160	70	70	85	…lei
joi	170	70	80	70	…lei
vineri	170	60	90	90	…lei
sâmbătă	200	120	100	90	…lei
duminică	160	110	60	70	…lei

a) Efectuați calculele necesare și determinați sumele totale zilnice, obținute din vânzări.

b) Scrieți mulțimea zilelor în care au avut loc vânzări de cel puțin 400 de lei.

c) Scrieți mulțimea zilelor în care suma obținută din vânzarea dulciurilor este cel puțin jumătate din suma obținută în întreaga zi.

11. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $\{1,2,7\} \subset \{0,1,2,5,7,9\}$; ☐ b) $\{5\} \subset \{1,2,3,4,6,7,8\}$; ☐

c) $\{a,b,c,d\} \supset \{a,d\}$; ☐ d) $\varnothing \subset \{0\}$; ☐

12. Mulțimile $D = \{x;\ 2 \cdot x - 1;\ 3 \cdot x + 1\}$ și $E = \{3,5,10\}$ sunt egale. Aflați numărul x.

13. Se consideră mulțimea $M = \{12,22,32,42,...,92\}$.

a) Scrieți numărul elementelor mulțimii M.

b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din patru elemente.

c) Scrieți toate submulțimile formate din opt elemente.

14. Determinați elementul x, pentru fiecare din situațiile următoare; analizați toate cazurile posibile.

a) $\{x\} \subset \{1,5\}$;

b) $\{12,x,18\} \subset \{10,12,14,16,18\}$;

c) $\{a,b,x,d\} \subset \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului } \textit{abecedar}\}$.

15. Determinați numerele x și y pentru fiecare din situațiile:

a) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x;2\cdot x;\ 2\cdot x+1\}$ și $A=B$;

b) $C=\{y-2;\ y+3;\ 2y+1;\ 3y\}$, $D=\{3,8,11,15\}$ și $C=D$;

16. Aflați cardinalul mulțimii A, respectiv B știind că:

a) mulțimea A are exact 8 submulțimi; b) Mulțimea B are exact 16 submulțimi.

17. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$.

a) Determinați mulțimile $M\subset A$ astfel încât produsul elementelor mulțimii M să fie cel mult 17.

b) Determinați submulțimile $\{a,b\}$ ale mulțimii A, astfel încât $(a+b)\in A$.

1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Rezolvăm și descoperim

1. Dacă n este un număr natural oarecare, atunci natural $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5 deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea $A = \{x$ număr natural și $x < 8\}$ și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei același joc, dar în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea $B = \{x$ număr natural și $x \geq 8\}$.

a) Explicați de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.

b) Scrieți toate elementele mulțimii A.

c) Câte elemente are mulțimea A?

d) Explicați de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.

e) Puteți scrie toate elementele mulțimii B?

f) Câte elemente are mulțimea B?

Important

1) mulțimile care au un număr bine precizat de elemente, se numesc *mulțimi finite*.

2) mulțimile cărora nu le putem stabili numărul de elementele, se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Vom scrie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (între acolade scriem elementele mulțimii). Uneori este util să se folosească o scriere mai scurtă $A = \{0, 1, 2, ..., 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7.

În geometrie admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele dreptei d. Deoarece pe dreapta d sunt un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte.

În jocul lui Vlad cu Mircea nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente. Vom scrie $B = \{8, 9, 10, ...\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim *mulțimea numerelor naturale.* Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem o nouă mulțime infinită de numere numită *mulțimea numerelor naturale nenule*, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ... \}$.

2. a) Scrieți divizorii numărului 12. b) Scrieți multiplii numărului 3 mai mici decât 17.

3. Fie n un număr natural oarecare. Prin urmare $n \in \mathbb{N}$. Vom nota cu D_n, mulțimea tuturor divizorilor numărului natural n, iar cu M_n, mulțimea tuturor multiplilor lui n.

a) scrieți explicit mulțimea D_{12};

b) scrieți explicit mulțimea M_3;

c) Care dintre mulțimile D_{12} și M_3 este finită și care este infinită?

d) Dacă $p \in \mathbb{N}$ scrieți explicit mulțimea M_p.

Rezumăm cunoștințele

- O *mulțime finită* este o mulțime care are un număr finit de elemente.
- O *mulțime infinită* este o mulțime care un număr infinit de elemente.
- *Mulțimea* $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ *a numerelor naturale* și $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,6...\}$ *mulțimea numerelor naturale nenule* sunt mulțimi infinite
- mulțimea tuturor divizorilor numărului natural p se notează cu D_p.
- mulțimea tuturor multiplilor numărului natural p se notează cu M_p.

Aplicăm cunoștințele

4. Scrieți explicit mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathrm{N}^*,\ x \in M_2,\ x \in M_7 \text{ și } x \le 50\}$.

Ne verificăm

1. a) 3 are proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii A, adică „3 este număr natural și 3 < 8”, deci $3 \in A$. La fel, 8 este număr natural și $8 \not< 8 \Rightarrow 8 \notin B$. b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. c) Mulțimea A are opt elemente. d) 8 număr natural și $8 \ge 8 \Rightarrow 8 \in B$; 3 este număr natural și $3 \not\ge 8 \Rightarrow 3 \notin B$. e) Este evident, nu pot fi scrise toate elementele lui B. f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

2. a) Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12; b) Multiplii lui 3 sunt: $3\cdot 0, 3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 3, 3\cdot 4, 3\cdot 5, 3\cdot 6, 3\cdot 7, \ldots$. Prin urmare multipli lui 3 mai mici decât 17 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15.

3. a) $D_{12} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$; b) $M_3 = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ ...\}$; c) Mulțimea D_{12} este finită (are 6 elemente) și M_3 este infinită. c) $M_p = \{0,\ p,\ 2p,\ 3p,\ 4p,\ 5p,\ ...\ \}$.

4. Orice element x din mulțimea A are următoarele proprietăți: $x \in \mathbb{N}^*$, $x \in M_2, x \in M_7$ și $x \le 50$. Pe de altă parte: (1) $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \ne 0$; (2) $x \in M_2 \Rightarrow x \in \{0,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...\}$; (3) $x \in M_7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ ...\}$. Dar din (1), (2), (3) și $x \le 50$ rezultă $x \in \{\ 14,\ 28,\ 42\}$. Deci $A = \{\ 14,\ 28,\ 42\}$.

Activități de învățare

1. Mulțimea D_n reprezintă mulțimea tuturor divizorilor numărului n. Scrieți, enumerând elementele, mulțimile: $D_2, D_3, D_{14}, D_{30}, D_{47}$.

2. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $D_4 \subset D_{20}$; ☐ b) $D_3 \subset D_{13}$; ☐

c) $D_9 \subset D_6$; ☐ e) $D_{10} \subset \mathbb{N}$; ☐

3. Determinați mulțimile:

a) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N} \text{ și } x\in D_{12}\}$; b) $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}^* \text{ și } (x+1)\in D_{15}\}$.

4. Mulțimea M_n reprezintă mulțimea multiplilor numărului n. Scrieți mulțimile următoare, enumerând elementele acestora.

a) $A=\{x \mid x\in M_{10} \text{ și } x<50\}$; b) $B=\{x \mid x\in M_5 \text{ și } 8<x<25\}$;

c) $C=\{x \mid x\in M_2 \text{ și } x \text{ este număr impar}\}$; d) $D=\{x \mid x\in M_3,\, x \text{ este număr par și } x<23\}$.

5. Se consideră mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 3 \mid x \text{ și } x \mid 45\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid x\in D_6 \text{ sau } x\in D_8\}$, $C=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\in M_4$ și $(x+3) \mid 36\}$.

a) Scrieți elementele mulțimilor A, B, C.

b) Determinați numărul elementelor fiecărei mulțimi.

6. Fie mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{N} \mid \overline{1x4}\,\vdots\,3\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid (x+8)\,\vdots\,x\}$ și $C=\{x\in\mathbb{N}^* \mid (x+1)\,\vdots\,x\}$.

Scrieți elementele mulțimilor A, B, C, apoi alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

Mulțimea elementelor comune celor trei mulțimi conține:

a) două elemente; b) 3 elemente; c) o infinitate de elemente; d) 0 elemente.

1.4. Operaţii cu mulţimi

Rezolvăm și descoperim

1. Cu ajutorul mulţimilor $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ şi $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Alexandra defineşte mulţimile R, I şi D astfel:

– mulţimea R este mulţimea ale cărei elemente sunt acelea care aparţin cel puţin uneia dintre mulţimile A şi B;

– mulţimea I este mulţimea ale cărei elemente sunt elementele comune celor două mulţimi A şi B;

– mulţimea D este mulţimea ale cărei elemente sunt acelea care aparţin mulţimii A, dar nu aparţin mulţimii B.

a) Scrieţi mulţimile R, I şi D, punând pentru fiecare mulțime elementele ei între acolade.

b) Referindu-se la mulţimile propuse de Alexandra, Sonia scrie trei mulţimi enunţând o proprietate caracteristică fiecăreia dintre mulţimile R, I şi D. Cele trei mulţimi scrise de Sonia sunt: $\{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; $\{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; $\{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$.

Identificaţi care dintre cele trei mulţimi scrise de Sonia este R, care este I şi care este D.

c) Mihai defineşte cele trei mulţimi, la fel ca Alexandra, dar înlocuieşte elementele mulţimilor A şi B cu alte elemente. El află mulţimile R, I şi D, apoi desenează diagrama din figura 1.

d) Folosindu-vă de diagrama desenată de Mihai, aflaţi mulţimile A, B, R, I şi D.

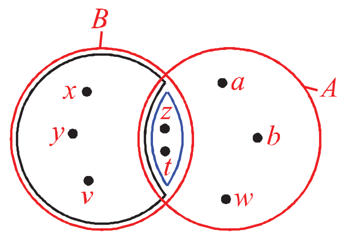


Fig. 1

Reținem

Mulţimea R se numeşte *reuniunea mulţimii A cu mulţimea B*. Se notează $R = A \cup B$ şi se citeşte „mulţimea A reunită cu mulţimea B”.

Mulţimea I se numeşte *intersecţia mulţimii A cu mulţimea B*. Se notează $I = A \cap B$ şi se citeşte „mulţimea A intersectată cu mulţimea B”.

Mulţimea D se numeşte *diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B*. Se notează $A - B$ şi se citeşte „A minus B”.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$, calculaţi: $A \cup \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{N}$, $A - \mathbb{N}$, $\mathbb{N} - A$.

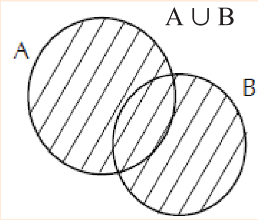
Rezumăm cunoştinţele

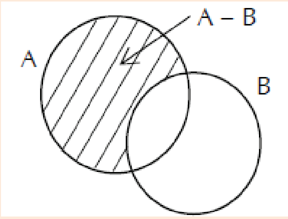
Reuniunea mulţimilor A şi *B* este mulţimea formată din elementele care aparţin cel puţin uneia dintre mulţimile A şi B: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

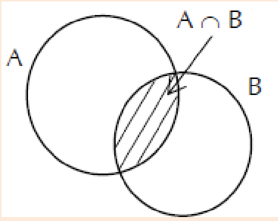
Intersecţia mulţimilor A şi *B* este mulţimea formată din elementele comune celor două mulţimi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.

Despre două mulţimi a căror intersecţie este mulţimea vidă, se spune că sunt *mulţimi disjuncte.*

Diferenţa mulţimilor A şi *B* este mulţimea formată din elementele care aparţin lui A şi nu aparţin lui B: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$.







Aplicăm cunoştinţele

3. Fie mulţimile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$ şi $B = \{2, 3, 5\}$.
Aflaţi: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ şi $B - A$.

4. Fie mulţimile A, B şi C reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 2.
a) Aflaţi mulţimile A, B şi C.
b) Calculaţi: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $A - C$; $B - C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

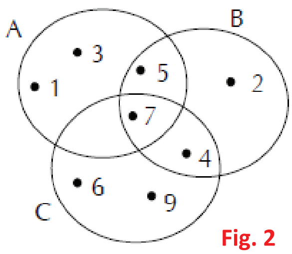


Fig. 2

Ne verificăm

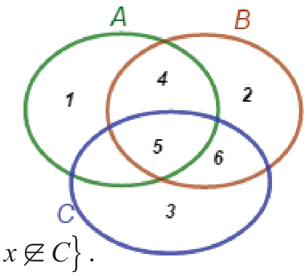
1. a) $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $I = \{5, 6, 7\}$ şi $D = \{1, 2, 3, 4\}$
b) Cele trei mulţimi scrise de Sonia sunt: $D = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$, $R = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ şi $I = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$. c) Cele trei mulţimi definite de Mihai sunt: $R = \{a, b, x, y, z, t, v, w\}$, $I = \{t, z\}$ şi $D = \{a, b, w\}$. d) Mulţimile sunt: $A = \{a, b, t, w, z\}$, $B = \{x, y, z, t, v\}$, $I = \{t, z\}$, $D = \{a, b, w\}$ şi $R = \{a, b, x, y, z, t, v, w\}$

2. Se obţine: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{N} = A$, $A - \mathbb{N} = \varnothing$, $\mathbb{N} - A = \{5, 6, 7, 8, ...\}$.

3. Se obţine: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A - B = \{1, 6\}$ şi $B - A = \{3\}$.

4. a) Mulţimile sunt: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ şi $C = \{4, 6, 7, 9\}$.
b) Se obţine: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cup C = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A - B = \{1, 3\}$, $A - C = \{1, 3, 5\}$, $B - C = \{2, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A \cap B \cap C = \{7\}$, $(A \cup C) - B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} - \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3, 6, 9\}$.

Activități de învățare



1. Mulțimile A, B, C sunt reprezentate prin diagrame în figura alăturată.
a) Scrieți mulțimile $A, B, C,$ enumerând elementele acestora.
b) Determinați mulțimile: $F = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
$G = \{x | x \in B \text{ și } x \in C\}$; $H = \{x | x \in B \text{ sau } x \in C\}$;
$I = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$; $J = \{x | x \in A \text{ și } x \in C\}$; $K = \{x | x \in B \text{ și } x \notin C\}$.

2. Pentru mulțimile $A = \{1, 2, 5, 7\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$, calculați:
a) $A \cup B$; b) $B \cup A$; c) $A \cap B$;
d) $B \cap A$; e) $A - B$; f) $B - A$.

3. Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c\}$.
a) Determinați mulțimile M și P, astfel încât $M \cup P = A$ și $M \cap P = \{b\}$.
b) Determinați mulțimile C și D, astfel încât $C \cup D = A$ și $C \cap D = \{b, c\}$.

4. Determinați mulțimile M, respectiv P pentru care:
a) $M \cup \{10\} = \{5, 10, 15\}$. b) $P \subset \{1, 3, 7, 9\}$ și $P \cap \{2, 3, 5, 8, 9\} = \{3, 9\}$.

5. Pentru mulțimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ și $C = \{1, 4, 5, 6\}$, determinați:
a) $A \cup B$; b) $B \cap C$; c) $A - C$;
d) $A \cup (C - B)$; e) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; f) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$;
g) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; h) $A \cap (B \cup C)$; i) $A - A$;
j) $(A - B) \cup (B - A)$; k) $(A \cup B) - (A \cap B)$; l) $A \cap B \cap C$.

6. Se consideră mulțimile
$$M = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 5\},\ P = \{x \in \mathbb{N} | 3 \le x < 6\} \text{ și } T = \{x \in \mathbb{N} | 2 \cdot x + 3 < 9\}.$$
a) Determinați elementele mulțimilor M, P, T.
b) Demonstrați că $M \cap P = M - T$.

7. Determinați mulțimea M știind că $M \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $M \cap \{2, 3\} = \varnothing$.

8. Se dau mulțimile $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{b | b = a - 1, a \in A\}$ și $C = \{c | c = a + b, a \in A, b \in B\}$.
a) Scrieți mulțimile B și C, enumerând elementele lor.
b) Calculați $A \cap B$, $B \cup C$, $C - A$.
c) Calculați $(A \cup B) \cap C$ și $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, apoi comparați rezultatele găsite.

9. Determinați mulțimile A și B care verifică, simultan, condițiile:
a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cap B = \{c, d, e\}$.

10. Despre mulțimile A și B se știe că $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{1, 6\}$ și $A - B = \{3, 5\}$. Determinați mulțimile A, B și $B - A$.

11. Se consideră mulțimile $C = \{x \in \mathbb{N} | x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$ și $D = \{y \in \mathbb{N} | y = 4 \cdot p + 3, p \in \mathbb{N}\}$.
a) Aflați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii C.
b) Aflați cele mai mici trei elemente ale mulțimii D.
c) Demonstrați că mulțimile C și D sunt disjuncte.

12. Dacă $A = \{x | x = 5 \cdot k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y | y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$:
a) Determinați mulțimea $C = \{x | x \in A, x < 50\}$.
b) Determinați mulțimea D, formată din numerele de două cifre, ale mulțimii B.
c) Demonstrați că A și B sunt disjuncte.

13. Determinați mulțimile A, B, C care satisfac, simultan, condițiile:

a) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$; b) $A \cap B \cap C = \{3\}$; c) $A - B = \{1,2,4\}$;

d) $A - C = \{1,4\}$; e) $5 \notin A \cup B$.

14. Determinați numărul natural x, pentru care mulțimile $A = \{2 \cdot x, 6 \cdot x + 2\}$ și $B = \{2 \cdot x - 1; 2 \cdot x + 1; 5 \cdot x + 4\}$ au exact un element comun.

15. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{100} < x \le 2^{102}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 3^{98} \le y < 3^{100}\}$.

a) Scrieți cel mai mic element al mulțimii A și cel mai mare element al mulțimii B.

b) Determinați numărul elementelor fiecăreia dintre mulțimile A și B.

c) Comparați rezultatele obținute la subpunctul b) și decideți care dintre cele două mulțimi are mai multe elemente.

16. Se consideră mulțimea $M = \{1,2,3,...,11\}$. Determinați numărul submulțimilor de forma $\{a,b,c,d\}$, ale mulțimii M, cu proprietatea $a + b = c + d$.

1.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Ne amintim

1. a) Pentru fiecare dintre numerele 6, 11 și 12 scrieți câte doi divizori și doi multipli.

b) Scrieți mulțimea divizorilor numărului 30 și mulțimea divizorilor numărului 42. Care sunt divizorii comuni ai numerelor 30 și 42?

c) Scrieți mulțimea multiplilor lui 4, mulțimea multiplilor lui 6 și deduceți trei multipli comuni ai numerelor 4 și 6.

d) Scrieți opt numere prime și trei numere compuse.

e) Enunțați criteriile de divizibilitate cu 2, cu 3, cu 5, cu 9 și cu 10.

f) Dintre numerele 2, 3, 5, 9 și 10 scrieți-le pe acelea care sunt divizori ai numărului 1 260. Justificați că numărul 1 260 este divizibil cu 14.

Observăm și demonstrăm

2. Demonstrați că numărul 120 se scrie ca un produs de puteri de numere prime. Mai jos este prezentată demonstrația Mădălinei (fig. 1).

$120 : 2 = 60$;	$120 = 2 \cdot 60$	Fig. 1
$60 : 2 = 30$;	$60 = 2 \cdot 30$	
	$\boxed{120 = 2 \cdot 2 \cdot 30}$	
$30 : 2 = 15$;	$30 = 2 \cdot 15$	
	$\boxed{120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15}$	
$15 : 3 = 5$;	$15 = 3 \cdot 5$	
	$\boxed{120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$	
adică, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.		

a) Studiați atent demonstrația.

b) Ionuț observă că, de fapt, Mădălina a aplicat criteriile de divizibilitate cu 2, cu 3, cu 5 și a efectuat împărțiri succesive: întâi a împărțit 120 la 2 $120 = 2 \cdot 60$; câtul l-a împărțit la următorul număr prim și așa mai departe, până când câtul împățirii devine 1. Cum împărțirile cu numere prime 2, 3, 5 sunt ușoare, Ionuț propune mai jos o schemă de aranjare a calculelor. De asemenea, el descompune în factori primi și alte două numere: 7 800 și 242 000.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2\cdot 5 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7\,800 & 2^2\cdot 5^2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 242\,000 & 2^3\cdot 5^3 \\ 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $7\,800 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$ $\qquad$ $242\,000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 11^2$

Rezumăm cunoștințele

• *Orice număr natural nenul diferit de 1 și care nu este număr prim se poate scrie ca un produs de numere prime.*

• *Descompunerea în factori primi a unui număr natural înseamnă scrierea numărului ca un produs de numere prime.*

Aplicăm cunoștințele

3. Descompuneți în factori primi numerele: 126, 324, 378 și 1 452.

Ne verificăm

1. a) Numerele 2 și 3 sunt divizori ai lui 6 pentru că 6 se împarte exact la 2 și 6 se împarte exact la 3. Numerele 6 și 12 sunt multipli ai lui 6 pentru că $6 = 6 \cdot 1$ și $12 = 6 \cdot 2$. Divizorii lui 11 sunt 1 și 11 (divizori improprii). Multipli ai lui 11 sunt, de exemplu, 11 și 22, pentru că $11 = 11 \cdot 1$ și $22 = 11 \cdot 2$. Divizori ai lui 12 sunt, de exemplu, 3 și 6, pentru că $12 = 3 \cdot 4$ și $12 = 6 \cdot 2$. Multipli ai lui 12 sunt, de exemplu, 36 și 60 pentru că $36 = 12 \cdot 3$ și $60 = 12 \cdot 5$.

b) $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Divizorii comuni ai numerelor 30 și 42 sunt 1, 2, 3 și 6. c) $M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$; $M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$. Se observă că $4 \cdot 6 \cdot p$, unde $p \in \mathbb{N}$ este un multiplu a lui 4, dar și a lui 6. Pentru $p = 1$, $p = 2$, respectiv $p = 3$, rezultă numerele $4 \cdot 6 \cdot 1 = 24$, $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ și $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$ care sunt trei multipli comuni ai numerelor 4 și 6. d) Opt numere prime sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 și trei numere compuse sunt: 12, 15 și 21. e) Un număr natural este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară. Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 3. Un număr natural este divizibil cu 5 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5. Un număr natural este divizibil cu 9 dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 9. Un număr natural este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0. f) Conform criteriilor de divizibilitate, numărul 1 260:
- este divizibil cu 2 (are ultima cifră pară);
- este divizibil cu 3 (are suma cifrelor numărului $1 + 2 + 6 + 0 = 9$ și 9 este divizibil cu 3);
- este divizibil cu 5 (are ultima cifră 0);
- este divizibil cu 9 (are suma cifrelor numărului $1 + 2 + 6 + 0 = 9$ și 9 este divizibil cu 9);
- este divizibil cu 10 (are ultima cifră 0). Numărul 1 260 este divizibil cu 14 deoarece se împarte exact la 14, adică $1\,260 : 14 = 90$.

2. Numerele descompuse sunt: $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $324 = 2^2 \cdot 3^4$; $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ și $1\,452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$.

Activități de învățare

1. Scrieți numerele $6, 10, 18, 21, 45$ ca produs de doi factori diferiți de 1.

2. Scrieți fiecare dintre numerele 24 , 36 și 60 ca:
a) produs de doi factori, diferiți de 1;
b) produs de trei factori, diferiți de 1;
c) produs de cât mai mulți factori, diferiți de 1.
Folosind rezultatele de la subpunctele anterioare, completați tabelul următor, după modelul prezentat pentru numărul 24.

Numărul factorilor / *Numărul descompus*	*Doi factori*	*Trei factori*	*Număr maxim de factori*
24	$24=2\cdot12$; $24=3\cdot8$; $24=4\cdot6$.	$24=2\cdot2\cdot6$; $24=2\cdot3\cdot4$.	$24=2\cdot2\cdot2\cdot3$.
36			
60			

3. Folosind rezultatele exercițiului 2, scrieți numerele $24, 36, 60$ ca produs de factori primi.

4. Descompuneți numerele următoare în produs de factori primi:
a) 36 și 60; b) 57 și 72; c) 105 și 70;
d) 120 și 77; e) 50 și 100; f) 33 și 99;
g) 45; 54 și 63; h) 120; 225 și 90; i) 69; 529 și 60;

5. Completați tabelul următor, conform modelului prezentat pentru numărul 12:

n	Divizorii numărului n	Numărul divizorilor numărului n	Descompunerea în factori primi, a numărului n
12	$1,2,3,4,6,12$	6	$12=2^2\cdot3$
18			
32			
56			
144			
200			
729			

6. Se consideră produsul $p=x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$, $x\in\mathbb{N}^*$. Determinați cea mai mica valoare a lui x, pentru care p este divizibil cu 204.

7. Alegeți litera care numește răspunsul corect; numai unul dintre răspunsuri este corect.
1) Numărul natural 7^3 are:
a) 2 divizori; b) 3 divizori; c) 4 divizori; d) 5 divizori.
2) Numărul natural $2^3\cdot5^2$ are:
a) 5 divizori; b) 6 divizori; c) 12 divizori; d) 9 divizori
3) Numărul natural 84 se scrie ca produs de factori primi, astfel:
a) $2\cdot3^3$; b) $2^2\cdot3^2\cdot7$; c) $2^2\cdot3\cdot7^2$; d) $2^2\cdot3\cdot7$

8. Determinați numerele naturale a și b, pentru fiecare din situațiile următoare:
a) $a\cdot b=101$ și $a<b$; b) $a\cdot b=36$ și $a>b$; c) $a\cdot(b+1)=17$;
d) $a\cdot(b^2+1)=30$; e) $a^3\cdot(b^2+1)=135$; f) $a^2\cdot b+a^2=198$.

9. Determinați cel mai mic număr natural, care poate fi scris ca produs de trei factori primi diferiți.

10. Se consideră $A = 36 \cdot x$, unde x este număr prim.

a) Determinați numărul divizorilor numărului A; analizați toate cazurile posibile.

b) Pentru $x < 10$, scrieți descompunerea în factori primi a numărului A, ținând cont de cazurile întâlnite le subpunctul a).

1.6. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun

Rezolvăm

1. Se notează cu *d* cel mai mare divizor comun al numerelor 1 260, 3 024 și 5 544.

a) Dacă descompunem în factori primi cele două numere, găsim: $1\,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$ și $5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Scrieți toate numerele prime care pot să apară în descompunerea numărului *d*.

b) În descompunerea numărului *d* poate să apară 2^4? Dar 3^3? Dar 7^2?

c) Demonstrați că $d = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ este c.m.m.d.c. al numerelor 1 260, 3 024 și 5 544. Observați că este produsul factorilor primi, comuni, la puterea cea mai mică din descompunerea numerelor.

1	2	6	0	=	2^2	·	3^2	·	5	·	7		
3	0	2	4	=	2^4	·	3^2	·	7				
5	5	4	4	=	2^3	·	3^2	·	7	·	1	1	
c.m.m.d.c.				=	2^2	·	3^2	·	7	=	2	5	2

Reținem

Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale, se descompun numerele în factori primi, se iau toți factorii primi comuni, o singură dată, la puterea cea mai mică și se înmulțesc între ei.

2. Aflați c.m.m.d.c al numerelor 4 200 și 5 040.

3. Se notează cu *m* cel mai mic multiplu comun al numerelor 126 și 240.

a) Descompuneți în factori primi numerele 126 și 240.

b) Demonstrați că descompunerea lui *m* în factori primi conține în mod obligatoriu factorii primi comuni și necomuni din descompunerea lui 126 și 240, la puterea cea mai mare.

		1	2	6	=	2	·	3^2	·	7							
		2	4	0	=	2^4	·	3	·	5							
c.m.m.m.c.					=	2^4	·	3^2	·	7	·	5	=	5	0	4	0

c) Aflați *m*. Justificați răspunsul!

Reținem

Pentru a afla cel mai mic multiplu comun a două sau mai multe numere naturale se descompun numerele naturale în factori primi, se iau factorii primi, comuni și necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare și se înmulțesc între ei.

4. Aflați c.m.m.m.c. al numerelor 24, 48 și 36.

Rezumăm cunoștințele

Cel mai mare divizor comunal numerelor naturale a și b se prescurtează c.m.m.d.c. și se notează cu (a, b).
Regulă: Pentru a afla c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale:
- Se descompun numerele în factori primi;
- Se iau toți factorii primi comuni, o singură dată, la puterea cea mai mică și se înmulțesc între ei.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b se prescurtează c.m.m.m.c și se notează cu $[a, b]$.
Regulă: Pentru a afla c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale:
- Se descompun numerele în factori primi;
- Se iau toți factorii primi comuni și necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare și se înmulțesc între ei.

Proprietate. Oricare ar fi a și b două numere naturale, este adevărată relația:
$$a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b]$$
Două numere naturale sunt prime între ele dacă c.m.m.d.c. al lor este 1, adică:
$$a \text{ și } b \text{ sunt prime între ele} \Leftrightarrow (a,b) = 1.$$

5. Arătați că 84 și 605 sunt numere prime între ele.

6. Verificați egalitatea $a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b]$ pentru $a = 40$ și $b = 36$.

Ne verificăm

1. a) $d \mid 3\,024$, deci $3\,024 = d \cdot p$, $p \in \mathbb{N}$. Rezultă $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = d \cdot p$. Atunci, în descompunerea lui *d,* pot să apară numerele 2, 3 și 7. Deoarece $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = d \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$, în descompunerea lui *d,* pot să apară numerele prime 2, 3 și 7. Deoarece *d* este divizor comun, remarcăm că în descompunerea lui *d*, nu poate să apară numărul prim 11. În caz contrar, din $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = d \cdot p$, rezultă că $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 11 \cdot r \cdot q$, $r \in \mathbb{N}$, de unde $11 \mid 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, ceea ce este absurd. Prin urmare, numerele prime care pot să apară în descompunerea lui *d* sunt 2, 3 și 7. b) Presupunem că în descompunerea lui *d* apare 2^4. Atunci, din $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = d \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$, rezultă $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^4 \cdot s \cdot q$, $s \in \mathbb{N}$, de unde $2^4 \mid 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ceea ce este absurd. La fel se arată că în descompunerea lui *d* nu poate să apară 3^3 și 7^2. c) Arătăm că $d = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ este divizor comun al numerelor 3 024 și 5 544. Într-adevăr, $3\,024 : d = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 7) : (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) = 2$, deci $d \mid 3\,024$. La fel se arată că $d \mid 5\,544$.
Subpunctul a) arată că în descompunerea lui d pot să apară 2, 3 și 7, iar punctul b) arată că nu pot să apară 2^4 și nici 7^2. Prin urmare d este cel mai mare divizor comun al numerelor date.

2.

	4	2	0	0	=	2^3	·	3	·	5^2	·	7				
	5	0	4	0	=	2^4	·	3^2	·	5	·	7				
c.m.m.d.c.					=	2^3	·	3	·	5	·	7	=	8	4	0

3. a) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ și $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. b) Dacă *u* este un multiplu a lui 126, rezultă $u = 126 \cdot p$, adică $u = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot p$, $p \in \mathbb{N}$. Dacă *v* este un multiplu a lui 240, deci $v = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$. Dacă din descompunerile lui 126 și 240 luăm factorii primi comuni și necomuni la puterea cea mai mare, rezultă numărul $m = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Acesta este multiplu al lui 126 deoarece $m = (2 \cdot 3^2 \cdot 7) \cdot 2^2 \cdot 5 = 126 \cdot 20$,

$m=\left(2\cdot3^2\cdot7\right)\cdot2^3\cdot5=126\cdot40$, dar este și un multiplu a lui 240 deoarece $m=\left(2^4\cdot3\cdot5\right)\cdot3\cdot7=240\cdot21$. Deci m este multiplu comun al numerelor 126 și 240. Se poate arăta că m este și cel mai mic multiplu comun.

4. $24=2^3\cdot3,\ 36=2^2\cdot3^2,\ 48=2^4\cdot3\Rightarrow\left[24,48,36\right]=144$.

5. $84=2^2\cdot3\cdot7,\ 605=5\cdot11^2\Rightarrow\left(84,605\right)=1$, numerele 84 și 605 sunt numere prime între ele.

6. $a=40=2^3\cdot5$ și $b=36=2^2\cdot3^2 \Rightarrow \left(a,b\right)=4$ și $\left[a,b\right]=360$, deci $a\cdot b=\left(a,b\right)\cdot\left[a,b\right]$ pentru că $40\cdot36=4\cdot360$.

Activități de învățare

1. Se consideră a, b numere naturale, D_a, D_b mulțimile divizorilor acestora, iar (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

a) Pentru $a=12, b=18$, determinați D_a și D_a.

b) Determinați cel mai mare dintre divizorii comuni ai numerelor 12 și 18.

c) Folosind rezultatele obținute la subpunctul a) și repetând procedeul pentru valorile înscrise în tabelul următor, completați căsuțele libere:

a	b	D_a	D_b	$D_a \cap D_b$	(a, b)
12	18				
12	36				
15	24				
28	21				
16	27				

2. Pentru fiecare din perechile de numere naturale următoare, scrieți descompunerea în factori primi a numerelor și determinați, folosind algoritmul învățat (regula învățată), cel mai mare divizor comun al acestor numere.

a) 36 și 60; b) 57 și 72; c) 105 și 70;
d) 120 și 77; e) 50 și 100; f) 33 și 99;
g) 45; 54 și 63; h) 120; 225 și 90; i) 69; 529 și 60;
j) $2^2\cdot3$ și $2^3\cdot3^4$; k) $2^2\cdot5^5\cdot11$ și $3^2\cdot7^3\cdot13$; l) $2\cdot2^2\cdot2^3\cdot2^4$ și 729.

3. Scrieți câte o pereche de numere naturale pentru care:

a) cel mai mare divizor comun al lor este 4;
b) cel mai mare divizor comun al lor este 12;
c) cel mai mare divizor comun al lor este 25;
d) cel mai mare divizor comun al lor este 37;

4. Demonstrați că următoarele perechi de numere naturale sunt formate cu numere prime între ele (cel mai mare divizor comun al lor este 1):

a) 6 și 7; b) 25 și 26; c) 7 și 11;
d) 13 și 23; e) 72 și 49; f) 2^{10} și 3^{20}.

5. Determinați toate numerele naturale x, pentru care:

a) $x<30$ și $\left(x,28\right)=7$; b) $15<x<80$ și $\left(36,x\right)=9$; c) $\left(x,x+1\right)=1$.

6. Se consideră a,b numere naturale, M_a, M_b mulțimile multiplilor acestora, iar $\left[a,b\right]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

a) Pentru $a = 12$, $b = 18$, determinați M_a și M_b.

b) Determinați cel mai mic dintre multiplii comuni nenuli ai numerelor 12 și 18.

c) Copiați și completați căsuțele libere ale tabelului de mai jos:

a	b	M_a	M_b	$M_a \cap M_b$	$[a,b]$
12	18				
15	20				
6	8				
27	36				
16	27				

7. Pentru fiecare din perechile de numere naturale următoare scrieți descompunerea în factori primi a numerelor și determinați, folosind algoritmul învățat (regula învățată), cel mai mic multiplu comun al acestor numere.

a) 8 și 12; b) 10 și 15; c) 24 și 20;
d) 25 și 75; e) 35 și 28; f) 108 și 36;
g) 125 și 100; h) 18; 24 și 36; i) 16; 32 și 64;
j) $2^2 \cdot 3^3$ și $2^3 \cdot 3^2$; k) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ și $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$; l) 128 și 243.

8. Scrieți câte o pereche de numere naturale pentru care:
a) cel mai mic multiplu comun al lor este 20;
b) cel mai mic multiplu comun al lor este 18;
c) cel mai mic multiplu comun al lor este 25;
d) cel mai mic multiplu comun al lor este 100.

9. Determinați toate numerele naturale *x*, pentru care:
a) $[x,12]=24$; b) $[24,x]=96$; c) $[x;2\cdot x;3\cdot x]=138$.

10. Folosind notațiile (a,b) pentru cel mai mare divizor comun și $[a,b]$ pentru cel mai mic multiplu comun al numerelor *a* și *b*, probați relația $a\cdot b=(a,b)\cdot[a,b]$, pentru fiecare dintre perechile de numere naturale, următoare:
a) 15 și 20; b) 27 și 36; c) 54 și 72.

11. Determinați numerele naturale mai mici decât 300, care se împart exact la numerele $5;6$ și 9.

12. Un număr de cel mult 30 de sportivi, se pot organiza în grupe de câte 3, de câte 4, sau de câte 6 persoane. Determinați numărul sportivilor.

13. Sandu are mai multe plăcuțe dreptunghiulare, cu dimensiunile 6 cm, respectiv 9 cm.
Care este numărul minim de plăcuțe, de acest fel, din care Sandu poate forma un pătrat?

14. Determinați numărul natural a, $a\leq 100$, știind că prin împărțire la fiecare din numerele $8,9,12$ dă restul 1.

15. Barbu și colegii de la cercul de matematică aranjează cărțile din cabinetul de matematică. El observă că, dacă le aranjează câte 6 sau câte 7 sau câte 8 sau câte 9 pe fiecare raft, de fiecare dată, rămân nearanjate, același număr de cărți. Aflați numărul total al cărților știind că acesta are trei cifre și este divizibil cu 11.

16. Împărțind numerele $563, 761$ și 441 la același număr natural, obținem resturile $11,17$, respectiv 9. Determinați împărțitorul.

17. Determinați cel mai mic număr natural care, împărțit la 10, dă restul 9 și împărțit la 9, dă restul 8.

18. Determinați numerele naturale a și b, cu $a<b$, pentru fiecare din situațiile:
a) $(a,b)=14$ și $a+b=112$; b) $(a,b)=18$ și $a\cdot b=1620$;
c) $[a,b]=120$ și $a\cdot b=960$; d) $(a,b)\cdot[a,b]=864$;
e) $(a,b)=11$ și $a+b+[a,b]=121$; f) $[\overline{ab},\overline{ba}]=162$.

1.7. Proprietăţi ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

Ne amintim

1. Oricare ar fi a și b, două numere naturale, atunci a divide pe b, dacă și numai dacă există un număr natural c astfel încât $b = a \cdot c$. Reformulăm afirmația folosind notațiile specifice:

$$\left.\begin{array}{l} a,b,c \in \mathbb{N} \\ a \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow b = a \cdot c$$

$$\text{Reciproc: } \left.\begin{array}{l} a,b,c \in \mathbb{N} \\ b = a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b$$

Rezolvăm

2. Sonia face următoarele două afirmații:
a) „Numărul natural 1 divide orice număr natural a.”
b) „Orice număr natural care divide pe 1 este egal cu 1”.
Reformulați și demonstrați afirmațiile Soniei.

3. Reformulați și demonstrați următoarele proprietăți ale relației de divizibilitate:
a) Orice număr natural se divide cu el însuși.
b) Dacă un număr natural divide două numere naturale, atunci acel număr divide suma celor două numere naturale.

4. Ionuț face următoarea afirmație: „Dacă un număr divide produsul altor două numere naturale, atunci numărul respectiv divide cel puțin un număr dintre cele două numere.” Este adevărată afirmația lui Ionuț? Justificați!

5. Demonstrați că:

a) $\left.\begin{array}{l} a,b,c \in \mathbb{N} \\ a \mid b \text{ şi } b \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid c$

b) $\left.\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N} \\ a \mid b \text{ şi } b \mid a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

6. Se poate demonstra că: $\left.\begin{array}{l} a,b,c \in \mathbb{N} \\ a \mid b \cdot c \text{ şi } (a,b) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid c$

Verificați această proprietate a divizibilității pentru:
a) $a = 4$, $b = 3$ și $c = 24$; b) $a = 3$, $b = 8$ și $c = 96$

Rezumăm cunoştinţele

Definiția divizibilității: $a,b,c \in \mathbb{N}$ *și* $a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot c$

Proprietățile divizibilității:

1) *reflexivitate* $a \mid a$;
2) *tranzitivitate* $a \mid b$ şi $b \mid c \Rightarrow a \mid c$;
3) *antisimetrie* $a \mid b$ şi $b \mid a \Rightarrow a = b$;
4) $a \mid b$ şi $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$;
5) $a \mid b$ şi $a \mid c \Rightarrow a \mid (b - c)$; $b > c$;
6) $a \mid b \cdot c$ şi $(a,b) = 1 \Rightarrow a \mid c$,

unde a, b, c sunt numere naturale.

Aplicăm cunoștințele

7. Fie x un număr natural. Demonstrați că dacă $x\in\mathbb{N}$ atunci $15|x \Leftrightarrow 3|x$ și $5|x$.

Ne verificăm

2. a) Reformulare: $a\in\mathbb{N}\Rightarrow 1|a$ Demonstrație: $a\in\mathbb{N}$ și $a=1\cdot a\Rightarrow 1|a$

b) Reformulare: $a\in\mathbb{N},\ a|1\Rightarrow a=1$ Demonstrație: $a|1\Rightarrow 1=a\cdot c,\ c\in\mathbb{N}$.

Din $1=a\cdot c$ rezultă $c=1$ și $a=1$.

3. a) Reformulare: $a\in\mathbb{N}\Rightarrow a|a$ Demonstrație: $a=a\cdot 1\Rightarrow a|a$

b) Reformulare: $a,b,c\in\mathbb{N},\ a|b$ și $a|c\Rightarrow a|(b+c)$

Demonstrație: $\left.\begin{array}{l} a|b\Rightarrow b=a\cdot p,\ p\in\mathbb{N} \\ a|c\Rightarrow c=a\cdot q,\ q\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow b+c=a\cdot p+a\cdot q$

Rezultă $b+c=a\cdot(p+q)\Rightarrow a|(b+c)$

4. Afirmația lui Ionuț nu este adevărată. Justificarea este următoarea: $12\,|\,120$ rezultă $12\,|\,6\cdot 20$. Dar $2\nmid 6$ și $12\nmid 20$. Se spune că am infirmat afirmația lui Ionuț printr-un *contraexemplu*.

5. a) $a|b\Rightarrow b=a\cdot p;\ b|c\Rightarrow c=b\cdot q,\ (p,q\in\mathbb{N})$. Din $b=a\cdot p$ și $c=b\cdot q$ rezultă $c=(a\cdot p)\cdot q=a\cdot(p\cdot q)$, deci $a\,|\,c$. b) $a|b\Rightarrow b=a\cdot p$ *și* $b|a\Rightarrow a=b\cdot q\ (p,q\in\mathbb{N})$. Din $b=a\cdot p$ și $a=b\cdot q$ rezultă $a=(a\cdot p)\cdot q=$ $=a\cdot(p\cdot q)$, de unde $p\cdot q=1$. Rezultă $p=1$ și $q=1$, deci $a=b\cdot 1$, adică $a=b$. **6.** a) Pentru $a=4$, $b=3$ și $c=24$ avem $4|3\cdot 24$ pentru că $4|72$. Cum $(4,3)=1$ rezultă $4|24$. b) Pentru $a=3$, $b=8$ și $c=96$ avem $3|8\cdot 96$ pentru că $3|768$. Cum $(3,8)=1$ rezultă $3|96$. **7.** $15|x\Rightarrow x=15\cdot p,\ p\in\mathbb{N}\Rightarrow x=3\cdot(5\cdot p)\Rightarrow 3|x$. De asemenea, din $x=15\cdot p$ rezultă $x=5\cdot(3\cdot p)\Rightarrow 5|x$. *Reciproc,* dacă $x|3$ și $x|5$ rezultă $x=3\cdot m$ și $x=5\cdot n,\ (m,n\in\mathbb{N})$. Cum $3\cdot m=5\cdot n$, rezultă $5|5\cdot n$ și $5|3\cdot m$. Conform proprietății 6, din $5|3\cdot m$ și $(5,3)=1$ rezultă: $5|m$, de unde $m=5\cdot l,\ l\in\mathbb{N}$. Atunci, din $x=3\cdot m$ rezultă $x=3\cdot(5\cdot l)$, adică $x=5\cdot l,\ l\in\mathbb{N}$. Deci $15|x$.

Activități de învățare

1. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{xyx}$, divizibile cu 15.
2. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{1xy}$, divizibile cu 18.
3. Se consideră numărul $A=2^{n+1}+3\cdot 2^n+2^{n+3},\ n\in\mathbb{N}$.
   a) Determinați valorile lui A, pentru $n\in\{2,3\}$.
   b) Determinați numărul n, știind că $A\,\vdots\,4$ și $A\,\not\vdots\,16$.
4. Demonstrați că numărul $B=6\cdot a+3^{b+1}$ este divizibil cu 3, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{N}$.
5. Numerele naturale a și b satisfac relația $a\geq b$.
   a) Arătați că, dacă $a+b$ este număr par, atunci și $a-b$ este număr par.
   b) Arătați că, dacă $a-b$ este divizibil cu 4, atunci $a+b$ este număr par.
   c) Arătați că, dacă $a-b$ este număr impar, atunci $a+b$ este număr impar.
6. Determinați numerele prime a,b,c pentru fiecare din situațiile:
   a) $a+10\cdot b+12\cdot c=82$; b) $a+b+c=82$ și $3\cdot b+c=144$;
   c) $a^5+3\cdot b+15\cdot c=\overline{xxx}$ și $x<4$; d) $7^a+84\cdot b+11\cdot c=1512$.

7. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat sau cu (F), dacă enunțul este fals.

p_1 : Dacă a și b sunt două numere prime, atunci ele formează o pereche de numere prime între ele. $\square$

p_2 : Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, atunci d divide orice divizor comun al celor două numere. $\square$

p_3 : Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, atunci d este divizibil cu fiecare divizor comun al celor două numere. $\square$

p_4 : Oricare două numere naturale nenule și consecutive sunt prime între ele. $\square$

8. Se consideră numerele natural $A = 2 \cdot n + 11$ și $B = n + 5, n \in \mathbb{N}$.

a) Pentru $n \in \{0,1,2\}$, determinați A, B și cel mai mare divizor comun al acestora.

b) Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numerele A și B sunt prime între ele.

9. Determinați toate numerele naturale, mai mici decât 150, care împărțite, pe rând, la 9; 7, respectiv 21, dau restul 5.

10. Determinați cel mai mic număr natural, mai mare decât 2 018, divizibil cu fiecare din numerele: 100, 125, 150, 200.

11. Determinați:

a) numerele naturale de forma $\overline{8x1y5}$, divizibile cu 3 și cu 25.

b) numerele naturale de forma $\overline{14xxy}$, divizibile cu 3 și cu 10.

12. Se consideră numerele naturale $a = 2 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 5$, $c = 3 \cdot 4 \cdot 5$, $d = 3 \cdot 5 \cdot 6$.

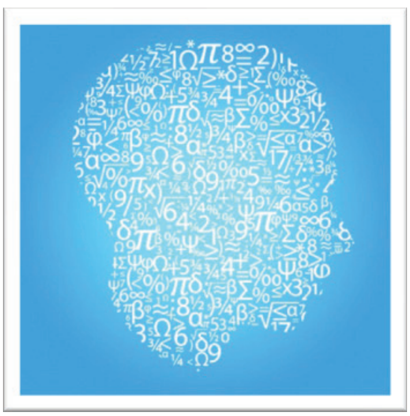
a) Scrieți perechile de numere, din cele patru, astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 2.
b) Scrieți perechile de numere, din cele patru, astfel încât diferența lor să fie divizibilă cu 3.
c) Comparați-vă rezultatele cu cele ale colegului/colegei de bancă și explicați-vă reciproc.

13. a) Arătați că numărul 257 este un divizor al numărului 890 505.
b) Determinați un număr natural n, de cinci cifre, pentru care $n + 890\,505$ este divizibil cu 257.

14. Demonstrați că dacă numărul natural a dă restul 18, prin împărțire la 27, atunci a este divizibil cu 9.

15. Demonstrați că nu există niciun număr natural, care împărțit la 18 să dea restul 11, iar împărțit la alt număr natural, să dea câtul 27 și restul 6.

16. Demonstrați că, dacă numărul $\overline{xy}$ este divizibil cu 7, atunci numărul $2 \cdot x + 3 \cdot y$ este, de asemenea, divizibil cu 7. Probați afirmația prin trei exemple. Colaborează cu colega/colegul de bancă pentru a identifica și alte exemple.



Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

$5p$	**1.** Suma elementelor mulțimii $\{x \mid x \text{ este cifră impară în baza } 10\}$ este 25.	☐
$5p$	**2.** Mulțimea $\{a, b, c, d\}$ are 12 submulțimi cu 2 elemente.	☐
$5p$	**3.** Mulțimea $\{x \in \mathbb{N} \mid 127 \leq 2 \cdot x + 1 \leq 721\}$ conține 301 elemente.	☐
$5p$	**4.** Numărul $2 \cdot \left(2^2 - 2\right)^3$ este element al mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq 2 \cdot x \leq 21\}$.	☐
$5p$	**5.** Dacă $\{x, y, 9\} = \left\{3^0, 3^1, 3^2\right\}$, atunci $x + y = 5$.	☐
$5p$	**6.** Scrisă prin enumerarea elementelor mulțimea $\{\overline{xy} \mid x = 4 \cdot y\}$ este $\{14, 28\}$.	☐

II. Uniți, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana B.

	A	B
$5p$	**1.** $A = \left\{\dfrac{n+3}{n+1}, \dfrac{2n+5}{3n+4}, \dfrac{6}{2}\right\}$ conține doar numere naturale. Atunci $A =$	**a.** $\{0, 1, 2, 3\}$ **;**
$5p$	**2.** Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \cdot n - 5, 7 < 4 \cdot n + 7\}$ este egală cu	**b.** $\{1, 2, 3\}$;
$5p$	**3.** $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{6}{n+1} \in \mathbb{N}\right\}$ și $B = \{m \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot m + 1 \leq 7\}$. $A \cap B =$	**c.** $\{0, 1, 2\}$;
$5p$	**4.** Dacă $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $A - B = \{2, 8\}$, atunci $A =$	**d.** $\{1, 3, 5\}$.

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 4\}$ și $B = \{b \mid b = a^2, a \in A\}$.

$10p$ **1.** Mulțimea B este egală cu:

A. $\{1, 2, 16\}$; B. $\{1, 4, 16\}$; C. $\{1, 2, 8\}$; D. $\{1, 2, 16\}$.

$10p$ **2.** Numărul submulțimilor mulțimii A este :

A. 8; B. 7; C. 6; D. 5.

$10p$ **3.** Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

A. $\{1, 2\}$; B. $\{1, 2, 4, 16\}$; C. $\{1, 4\}$; D. $\varnothing$.

$10p$ **4.** Numărul x pentru care $B \subset A \cup \{x\}$ este:

A. 1; B. 2; C. 4; D. 16.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Test de evaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 p	**1.** Oricare două numere prime sunt prime între ele.	☐
5 p	**2.** Dacă un număr natural este divizibil cu 2, atunci el este divizibil cu 4.	☐
5 p	**3.** Dacă un număr natural este divizibil cu 9, atunci el este divizibil cu 3.	☐
5 p	**4.** Numărul 101 nu are divizori improprii.	☐
5 p	**5.** Dacă fiecare dintre cei cinci termeni ai unei sume este divizibil cu 2, atunci suma este divizibilă cu 2^5.	☐
5 p	**6.** Dacă un număr este divizibil cu două numere prime, atunci el este divizibil cu produsul lor.	☐

II. Uniți, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana B.

	A	**B**
5 p	**1.** $(24; 60) =$	**a.** 3;
5 p	**2.** $\left[2\cdot 3^2; 2^2\cdot 3; 2\cdot 3^3\right] =$	**b.** 12;
5 p	**3.** Pentru $x\in\mathbb{N}$, $(x+1; x+2) =$	**c.** 108;
5 p	**4.** Exponentul lui 5 în descompunerea în factori primi a numărului $15 \cdot 25$ este:	**d.** 1.

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 p **1.** Numărul $30\cdot a+55$, $a\in\mathbb{N}$, este divizibil cu:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

10 p **2.** Numărul $36 \cdot 37$ este multiplul numărului:

A. 5; B. 4; C. 7; D. 10.

10 p **3.** Produsul $(15; 20)\cdot[15; 20]$ este egal cu:

A. 30; B. 300; C. 600; D. 240.

10 p **4.** Un multiplu comun al numerelor 14 și 49 este:

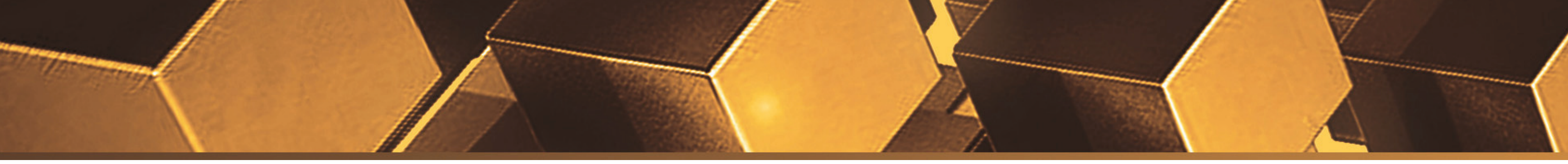
A. 49; B. 98; C. 149; D. 7.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

2

Rapoarte

1. Rapoarte
2. Proporții
3. Șir de rapoarte egale. Mărimi proporționale
4. Regula de trei simplă
5. Elemente de organizare a datelor
6. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice
7. Probabilități
8. Raportul și proporția în viața cotidiană



2.1. Rapoarte

Rezolvăm

1. a) In figura 1.1. sunt desenate două segmente AB și CD. Știind că AB = 1,5 cm și CD = 6 cm, stabiliți de câte ori este mai mare lungimea segmentului CD decât lungimea segmentului AB.

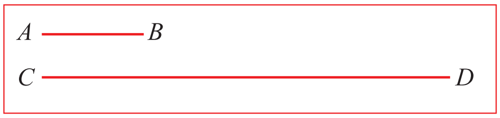


Fig. 1.1.

Fig. 1.2.

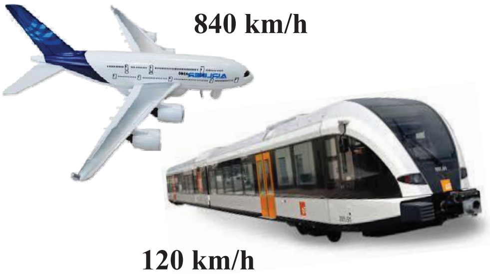
b) În figura 1.2. sunt reprezentate două găleți. Găleata roșie are capacitatea de 9 l, iar cea albastră are capacitatea de 1,5 l. De câte ori este mai mare capacitatea găleții roșii decât capacitatea găleții albastre?

2. Raportul a două mărimi fizice este câtul măsurilor acestor mărimi. Un avion zboară cu o viteză de 840 km/h, iar un tren merge cu o viteză de 120 km/h.

a) Calculați raportul dintre viteza avionului și viteza trenului.

b) Calculați raportul dintre viteza trenului și viteza avionului.

c) De câte ori este mai rapid avionul decât trenul?



Important

În științe, dar și în practică, se formează și se folosesc *rapoarte cu mărimi fizice diferite*. În acest caz, formarea raportului conduce la o nouă mărime fizică și la definirea măsurii mărimii fizice respective.

Exemple:

a) ***Viteza***. Distanța și timpul sunt mărimi fizice fundamentale, notate cu d, respectiv v. Unitatea de măsură fundamentală pentru *distanță* este *metrul*, iar pentru *timp* este *secunda*. Prin raportul $\frac{d}{t}$ se definește o nouă mărime fizică denumită *viteză*, notată cu v. Deci, $v = \frac{d}{t}$. Concret, o persoană a parcurs o distanță de 8 km în 2 ore. Se formează raportul $\frac{8\text{ km}}{2\text{ h}} = \frac{8}{2}$ km/h și se spune că persoana s-a deplasat cu viteza de $\frac{8}{2} = 4$ (km pe oră). În fizică, se folosește notația $\langle v \rangle$ care se citește „unitate de măsură pentru viteză". Așadar: $v = \frac{d}{t}$ și $\langle v \rangle = 1\, m/s$.

b) ***Densitatea*** (densitatea de masă sau masa specifică), se notează cu litera grecească ρ (ro): $\rho = \frac{m}{V}$ și <ρ> = 1 kg/m^3, unde m este masa corpului, exprimară în kg și V este volumul corpului, exprimat în m^3 (metri cubi).

3. Densitatea apei distilate este de 1000 kg/m^3, iar densitatea apei de mare este de 1026 kg/m^3 .

a) Calculați raportul dintre densitatea apei de mare și densitatea apei distilate.

b) De câte ori este mai mare densitatea apei de mare decât densitatea apei distilate?

Important

În știință și în practică. se formează și se folosesc rapoarte ale mărimilor fizice de același fel.

Exemple:

a) ***Concentrația unei soluții*** este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

Dicționar
soluție = amestec omogen de două sau mai multe substanțe chimice, din care una este de obicei lichidă.

4. Într-un vas se află o soluție de apă cu sare. Masa soluției este de 240 g, iar cea a sării este de 40 g. Care este concentrația soluției?

b) ***Scara unei hărți*** este raportul dintre distanța măsurată pe hartă (desen) și distanța măsurată în teren (în realitate).

5. Profesorul de matematică prezintă pe tablă, curtea școlii care are forma unui dreptunghi. Dimensiunile terenului sunt: lungimea $L = 30$ m și lățimea $l = 18$ m, iar dimensiunile dreptunghiului desenat sunt de 100 de ori mai mici decât în realitate. Calculați dimensiunile dreptunghiului de pe tablă.

c) În matematică, ***raportul dintre numărul a și numărul b***, $b \neq 0$ este *câtul* $a:b$, adică $\frac{a}{b} = a:b$.

Valoarea câtului $a:b$ se numește ***valoarea raportului***.

6. Dacă $a = 2,25$ și $b = 0,75$ calculați:

a) De câte ori este mai mare a decât b;

b) Valoarea raportului $\frac{b}{a}$.

Rezumăm cunoștințele

- ***Raportul a două mărimi fizice*** *este câtul măsurilor acestor mărimi.*
- ***Termenii raportului*** *sunt măsurile celor două mărimi fizice.*
- *Se pot formula:*
  - ***Rapoarte în care termenii sunt două mărimi fizice distincte****. Un raport care are ca termeni două mărimi fizice distincte conduce la definirea unei noi mărimi fizice* ***(Viteza, densitatea...)***
  - ***Rapoarte în care termenii sunt două măsuri ale aceleeași mărimi fizice.*** *Câtul măsurilor celor doi termeni ai raportului este un număr care permite compararea celor două măsuri de mărimi fizice.*
  - ***Rapoarte numerice cu termeni două numere,*** *de forma* $\frac{a}{b}$*, cu* $b \neq 0$
- *Raportul de forma* $\frac{p}{100}$ *se numește* ***raport procentual****, se notează cu p% și se citește „p la sută” sau „p procente”.*

Aplicăm cunoștințele

7. Pe eticheta unei cutii de smântână scrie „conține 12% grăsime”. Calculați cantitatea de grasime conținută în 500 g de smântână.

8. Un teren este prezentat într-o schiță sub forma unui dreptunghi, cu lungimea $L = 4$ cm.

a) Dacă scara hărții este 1:2000, de câte ori lățimea terenului din schiță este mai mică decât lățimea reală a terenului?

b) Dacă raportul $\frac{l}{L} = 0,25$, cât este lățimea reală a terenului?

Ne verificăm

1. a) 6 cm : 1,5 cm = 4, deci segmentul *CD* este mai mare de 4 ori decât segmentul *AB*.

b) 9 l : 1,5 l = 6, deci capacitatea găleții roșii este de 6 ori mai mare decât capacitatea găleții albastre.

2. a) Calculăm: $\dfrac{840 \text{ km/h}}{120 \text{ km/h}} = 7$, deci raportul dintre viteza avionului și viteza trenului este 7.

b) Calculăm: $\dfrac{120 \text{ km/h}}{840 \text{ km/h}} = \dfrac{1}{7}$, deci raportul dintre viteza trenului și viteza avionului este $\dfrac{1}{7}$

c) Avionul este de 7 ori mai rapid decât trenul.

3. a) Calculăm raportul dintre densitatea apei de mare și densitatea apei distilate, $R = \dfrac{1026 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = 1,026$, deci raportul este 1,026.

b) Densitatea apei de mare este de 1,026 ori mai mare decât densitatea apei distilate.

4. Calculăm concentrația soluției, $C = \dfrac{\text{masa sării}}{\text{masa soluției}} = \dfrac{40\text{g}}{240\text{g}} = \dfrac{1}{6}$, deci concentrația soluției de apă cu sare este $\dfrac{1}{6} = 0,1(6)$.

5. Notăm cu L' lungimea dreptunghiului desenat pe tablă și $L = 100 \cdot L'$, deci $30 \text{ m} = 100 \times \text{L}'$, de unde $L' = 0,3 \text{ m}$, adică $L' = 30 \text{ cm}$.Notăm cu l' lățimea dreptunghiului desenat pe tablă și $l = 100 \cdot l'$, deci $18\ m = 100 \cdot l'$, de unde $l' = 0,18 \text{ m}$, adică $l' = 18 \text{ cm}$.

6. a) Calculăm raportul $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2,25}{0,75} = 3$, deci *a* este de 3 ori mai mare decât *b*.

b) Raportul este $\dfrac{b}{a} = \dfrac{0,75}{2,25} = \dfrac{1}{3}$, iar valoarea raportului este $\dfrac{1}{3}$.

7. *Metoda 1:* Notăm cu *x* cantitatea de grăsime din 500 g de smântână. Rezultă $\dfrac{12}{100} = \dfrac{x}{500\ g}$, de unde $x = 60\ g$. Deci, cantitatea de grăsime conținută în 500 g de smântână este egală cu 60 *g*.

Metoda a 2-a: Textul„*Conține* 12% *grăsime*”ne spune că 100 g de smântână conține 12 g de grăsime. Ca urmare, 500 g smântână vor conține de 5 ori mai multă grăsime, adică 5 ·12 = 60 g smântână.

8. a) Notăm cu l' lățimea reală și cu l lățimea din schiță. Conform definiției scara, $S = \dfrac{l}{l'}$. Rezultă $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{1}{2000}$. Deci, lățimea terenului din schiță este de 2000 de ori mai mică decât lățimea reală a terenului.

b) Din $\dfrac{l}{L} = 0,25$ rezultă $\dfrac{l}{4 \text{ cm}} = 0,25$, deci $l = 0,25 \cdot 4 = 1$ cm. Dar scara, $S = \dfrac{l}{l'} = \dfrac{1}{2000}$, rezultă $\dfrac{1 \text{ cm}}{l'} = \dfrac{1}{2000}$, adică $l' = 2000$ cm, deci $l' = 20$ m.

Activități de învățare

1. Scrieți raportul numerelor a și b, apoi calculați valoarea acestuia, pentru fiecare din situațiile:

a) $a = 160$ și $b = 80$; b) $a = 16$ și $b = 48$; c) $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{8}{7}$.

2. Alin și tatăl lui au venit de la cumpărături. Sacoșa lui Alin cântărește 2 kg, iar sacoșa tatălui cântărește 10 kg. Calculați:

a) de câte ori este mai grea sacoșa tatălui decât sacoșa lui Alin.

b) cu câte kg este mai ușoară sacoșa lui Alin decât sacoșa tatălui său.

3. În tabelul următor, a și b reprezintă valoarea a două mărimi de același fel, exprimate în aceeași unitate de măsură. Completați căsuțele libere astfel încât raportul dintre a și b să fie 3.

a	12			12,6
b		5	3	

4. Completați termenul care lipsește, respectiv valoarea raportului, astfel încât să aibă loc egalitățile:

a) $\frac{\dots}{4,5} = 2$; b) $\frac{20}{\dots} = 5$; c) $\frac{42}{6} = \dots$; d) $\frac{31}{248} = \dots$.

5. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Dacă $\frac{11 \cdot a}{b} = 22$, atunci valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este ....

b) Dacă $\frac{6 \cdot a}{5 \cdot b} = 1$, atunci valoarea raportului $\frac{b}{a}$ este ....

6. Suma vârstelor a doi frați, David și Corina, este 9 ani. Vârsta Corinei este de două ori mai mică decât vârsta fratelui ei.

a) Scrieți raportul dintre vârsta Corinei și vârsta lui David;

b) Scrieți raportul dintre vârsta lui David și vârsta Corinei;

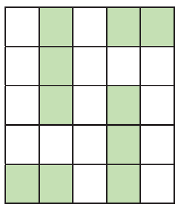
c) Calculați vârsta fiecăruia dintre cei doi frați.

7. Știind că $AB = 25$ cm, $CD = 2$ cm, iar M este mijlocul segmentului CD, aflați:

a) Raportul dintre lungimea segmentului AB și lungimea segmentului CD;

b) Raportul dintre lungimea segmentului CM și lungimea segmentului AB.

8. Observați figura alăturată și calculați:



a) Numărul pătrățelelor colorate și numărul pătrățelelor necolorate;

b) Raportul dintre numărul pătrățelelor colorate și numărul total al pătrățelelor care alcătuiesc pătratul mare;

c) Raportul dintre numărul pătrățelelor colorate și numărul pătrățelelor necolorate.

9. Într-o cutie sunt 16 bile colorate în roșu, galben sau albastru. Bilele roșii sunt cu două mai multe decât cele galbene și cu 6 mai puține decât cele albastre. Calculați:

a) Raportul dintre numărul bilelor galbene și numărul bilelor roșii;

b) Raportul dintre numărul bilelor albastre și numărul bilelor care nu sunt albastre.

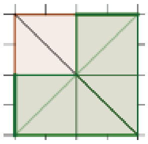
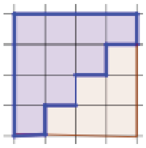
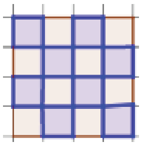
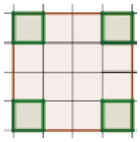
10. Raportul numerelor a și b este $\frac{1}{2}$, iar raportul numerelor b și c este $\frac{2}{3}$. Aflați raportul dintre numerele a și c.

11. Calculați raportul dintre numerele $a = 1,(1) + 2,(2)$ și $b = 5,(5)$.

12. Dacă valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este $1,5$, calculați:

a) $\frac{y}{x}$; b) $\frac{3\cdot x}{5\cdot y}$; c) $\frac{2\cdot x}{3\cdot y}$; d) $\frac{2\cdot y}{3\cdot x}$; e) $\frac{x+y}{x-y}$.

13. Exprimați, folosind rapoarte procentuale, suprafața hașurată din fiecare imagine:

a)  b)  c)  d) 

14. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) 50% din $0,02$ ha reprezintă … m^2; b) 35% din 40% din 1600 kg reprezintă … kg;

c) 120% din 400 l reprezintă … l.

15. Calculați:

a) Numărul cu 20% mai mare decât 160; b) Numărul cu 32% mai mic decât 150.

16. Filip a realizat 6 din cele 8 machete, pe care le avea în lucru, pentru o expoziție. Exprimați, în raport procentual, partea realizată din proiect, apoi partea pe care o mai are de realizat, pentru a termina proiectul.

17. Sorin a rezolvat într-o zi 4 probleme de matematică, care reprezintă 20% din munca independentă pe care a primit-o pentru o perioadă data.

a) Determinați numărul de probleme pe care le mai are de rezolvat.

b) Aflați numărul total de probleme pe care le-a avut de rezolvat.

18. Fabrica de Automobile Dacia-Renault a executat într-un an, în trei etape, 315 000 de automobile. În prima etapă, a executat 30% din numărul total de automobile, iar în a doua etapă, încă 100250 de automobile.

a) Exprimați, în procente, numărul de autoturisme executate în a doua etapă.

b) Determinați numărul autoturismelor executate în a treia etapă.

19. O bancă oferă dobândă anuală de 4% la depozite. Aflați suma pe care a depus-o Xenia la această bancă, dacă după doi ani, urmează să aibă în cont 8 112 lei.

20. Ana, Barbu, Călin și Doru merg împreună la cumpărături. Aceștia aveau, în total, 23 000 lei. Aceștia au cheltuit, după cum urmează: Ana – 20% din banii pe care îi avea, Barbu – 40% din banii săi, Călin – 28% din suma cu care plecase la cumpărături, iar Doru – 52% din banii lui. La final, cei patru prieteni au constatat că au rămas cu sume de bani egale. Aflați cu câți bani a plecat la cumpărături fiecare dintre ei.

21. O hartă are scara de $1/500000$. Aflați distanța, pe hartă, între două obiective turistice, știind că, în realitate, distanța dintre ele este de 200 km.

22. Se dizolvă sare în apă și se obține o soluție cu concentrația de 8%. Aflați cantitatea de sare dizolvată, pentru obținerea a 500 g soluție.

23. Calculați titlul unui aliaj care conține 50 g de aur și 250 g de cupru.

24. Un aliaj aur-cupru are titlul $0,825$ și cântărește 400 g. Determinați cantitatea de aur pe care trebuie să o adăugăm, pentru a obține un aliaj cu titlul $0,875$.

25. Scara unei hărți este $1/400000$. Calculați distanța, pe teren, între două localități, știind că, pe hartă, aceasta este de 16 cm.

26. Peretele Vulturilor este situat în Munții Bucegi, la o altitudine de 1 750 m, are o înălțime de aproximativ 300 m și este foarte căutat de alpiniști pentru escalade.

Doi alpiniști, Alin și Bogdan, pornesc spre vârful crestei, pe trasee diferite din punctele A respectiv B, la aceeași oră; ascensiunea este urmărită video, pe un ecran, imaginea fiind la scara 1:800. Lungimile traseelor pe ecran sunt, pentru traseul din A, 61 cm, iar pentru traseul din B, 52 cm.

a) Calculați lungimile pe teren ale celor două trasee.

b) Alin ajunge în vârf după 5 ore, iar Bogdan care are un traseu de dificultate mai mare decât Alin, ajunge mai târziu cu 90 de minute. Aflați vitezele medii de deplasare ale celor doi alpiniști.

27. În laboratorul de chimie, Ana și Maria folosesc o soluție de apă cu sare, care are concentrația 10% și masa egală cu 800 g.

a) Calculați cantitatea de sare dizolvată pentru obținerea soluției.

b) Dacă, în această soluție, se adaugă 100 g de apă, aflați concentrația noii soluții.

2.2. Proporții

Rezolvăm și descoperim

1. În piață, Mihai observă o bucată dintr-un afiș,pe care sunt scrise prețurile pentru diferite cantități de mere (fig. 1).

Cantitate	Preț
4 kg	8 lei
5 kg	10 lei
6 kg	12 lei

Fig. 1.

La scurt timp, el se adresează Soniei, colega lui de clasă: „Valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este aceeași.”

a) Stabiliți dacă afirmația lui Mihai este adevărată.

b) Folosind afirmația lui Mihai, calculați cât se plătește pentru 1,5 kg de mere.

c) Sonia afirmă: „Valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este egală cu valoarea prețului pentru 1 kg de mere”. Stabiliți dacă afirmația Soniei este adevărată.

2. Despre două rapoarte, care au aceeași valoare, se spune că sunt egale, iar egalitatea între cele două rapoarte se numește *proporție*.

a) Arătați că rapoartele $\frac{2,4}{3}$ și $\frac{7,2}{6}$ formează o proporție;

b) Scrieți proporția formată de cele două rapoarte.

3. Considerăm o proporție oarecare $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Numerele *a, b, c* și *d* se numesc ***termenii proporției***; *a* și *d* se numesc extremi, iar *c* și *b* sunt mezi pentru proporția dată. (fig. 2). Termenii unei proporții trebuie să fie numere diferite de zero.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

a și *d* sunt extremi

b și *c* sunt mezi

Fig. 2.

a) Numiți mezii și extremii proporției: $\dfrac{\frac{1}{2}}{0,75}=\dfrac{2}{3}$;

b) În proporția de mai sus, observați că produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

4. Dintr-un raport, se poate obține o proporție, prin amplificarea sau simplificarea raportului cu un număr.

a) Amplificați raportul $\frac{2}{3}$ cu 0,25. Ce proporție obțineți?

b) Simplificați raportul cu 0,25. Ce proporție obțineți?

5. a) Stabiliți dacă $5\cdot10,50 = 7,50\cdot7$;

b) Verificați dacă rapoartele $\frac{5}{7,50}$ și $\frac{7}{10,50}$ au aceeași valoare;

c) Formează rapoartele $\frac{5}{7,50}$ și $\frac{7}{10,50}$ o proporție? Justificați răspunsul!

Rezumăm cunoștințele

- ***Proporția reprezintă egalitatea a două rapoarte.***
- ***Termenii proporției*** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$ *sunt a, b, c și d. Extremii proporției sunt a și d, mezii sunt b și c.*
- ***Proprietate fundamentală a proporției****: într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor, adică* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$. ***Reciproc,*** *din egalitatea* $a \cdot d = b \cdot c$ *rezultă proporția* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. *Prin urmare****:*** $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
- *Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție:*

$$\boxed{\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}} \qquad \boxed{\text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}}$$

- *Prin amplificarea sau simplificarea unui raport cu un număr, diferit de zero, se obținem o proporție*
- *Proporții* ***derivate cu aceeași termeni se obțin prin:***
  1) schimbarea extremilor între ei;
  2) schimbarea mezilor între ei;
  3) inversarea rapoartelor.
- ***Proporții derivate cu termeni schimbați*** *se obțin prin egalarea fiecărui raport cu*
  1) raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor rapoartelor proporției.
  2) raportul dintre diferența numărătorilor și diferența numitorilor rapoartelor proporției.

Aplicăm cunoștințele

1. Știind că $\frac{x}{y}=\frac{2}{0,5}$, să se calculeze $\frac{3x+2y}{4x+3y}$.

Ne verificăm

1. a) Notăm cu C valoarea cantității de mere cumpărate și cu P prețul pentru cantitatea respectivă. Atunci $\frac{P_1}{C_1}=\frac{8}{4}$ sau $\frac{P_2}{C_2}=\frac{10}{5}$ sau $\frac{P_3}{C_3}=\frac{12}{6}$. În toate cazurile, valoarea raportului este egală cu 2, adică este aceeași. Prin urmare, afirmația lui Mihai este adevărată;

b) Pentru 1,5 kg de mere cumpărate, se plătește suma de x lei. Conform afirmației lui Mihai, $\frac{x}{1,5}=2$, de unde $x=2\cdot 1,5$, adică $x=3$, deci pentru 1,5 kg de mere se plătesc 3 lei;

c) Pentru 1 kg de mere se plătește suma de y lei. Conform afirmației lui Mihai, $\frac{y}{1}=2$, deci $y=2$ și pentru 1 kg de mere, se plătesc 2 lei. Deducem că valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este egală cu prețul pentru 1 kg de mere.

2. a) Valoarea raportului $\frac{2,4}{2}$ este 1,2 și valoarea raportului $\frac{7,2}{6}$ este tot 1,2, adică $\frac{2,4}{2}=\frac{7,2}{6}$;

b) Proporția este $\frac{2,4}{3}=\frac{4,8}{6}$.

3. a) Mezii proporției sunt 0,75 și 2; extremii proporției sunt $\frac{1}{2}$ și 3;

b) Produsul extremilor este $\frac{1}{2}\cdot 3=0,5\cdot 3=1,5$, iar produsul mezilor este $0,75\cdot 2=1,5$. Rezultă că produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

4. a) ${}^{0,25)}\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 0,25}{3\cdot 0,25}=\frac{0,5}{0,75}$, deci prin amplificarea raportului $\frac{2}{3}$ cu 0,25 rezultă proporția $\frac{2}{3}=\frac{0,5}{0,75}$;

b) $\frac{2}{3}^{(0,25}=\frac{2:0,25}{3:0,25}=\frac{8}{12}$, deci prin simplificarea raportului $\frac{2}{3}$ cu 0,25 rezultă proporția $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$.

5. a) $5\cdot 10,5=52,50$ şi $7,50\cdot 7=52,50$, deci $5\cdot 10,5=7,50\cdot 7$; b) $\frac{5}{7,50}=0,(6)$ și $\frac{7}{10,50}=0,(6)$, deci rapoartele au aceeași valoare; c) Rapoartele $\frac{5}{7,50}$ şi $\frac{7}{10,50}$ formează o proporţie deoarece, din b), au aceeaşi valoare. Proporţia este $\frac{5}{7,50}=\frac{7}{10,50}$.

6. Din $\frac{x}{y}=\frac{2}{0,5}=4$, rezultă $\frac{x}{y}=4$, adică $x=4\cdot y$. Înlocuim pe x cu $4\cdot y$ obținem $\frac{3x+2y}{4x+3y}=$ $=\frac{3\cdot(4y)+2y}{4\cdot(4y)+3y}=\frac{12y+2y}{16y+3y}=\frac{14y}{19y}$. Simplificând cu y rezultă $\frac{3x+2y}{4x+3y}=\frac{14}{19}$.

Activități de învățare

1. Scrieți toate proporțiile care se pot forma, folosind câte două dintre rapoartele:.
$\frac{5}{6}, \frac{14}{21}, \frac{2}{3}, \frac{35}{42}, \frac{65}{78}$.

2. Scrieți o proporție ai cărei termeni să fie numerele:
a) $3;9;10;30$; b) $2,5;\ 3;\ 1,5;\ 5$.

3. Dintre numerele $1;2;3;4;5;6$ alegeți patru numere care să poată forma o proporție. Explicați colegului/colegei de bancă alegerea făcută.

4. Completați spațiile libere cu numere raționale așa încât să obțineți proporții:
a) $\frac{5}{2}=\frac{...}{4}$; b) $\frac{...}{0,5}=\frac{3}{0,1}$; c) $\frac{8}{...}=\frac{...}{3}$.

5. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ știind că 4; 12; 13 și $\overline{ab}$ sunt termenii unei proporții.

6. Aflați numărul natural a din proporțiile:
a) $\frac{3}{7}=\frac{a}{28}$; b) $\frac{a}{2}=\frac{7}{3,5}$; c) $\frac{4}{a}=\frac{a}{9}$; d) $\frac{0,6}{2\cdot a}=\frac{0,9}{21}$.

7. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Dacă $\frac{a}{3}=\frac{5}{b}$, atunci $a\cdot b=.....$ și $30-\frac{150}{a\cdot b}=...$

b) Dacă $\frac{a}{4}=\frac{8}{b}$ și $\frac{2}{c}=\frac{d}{16}$, atunci $a\cdot b-c\cdot d=...$

8. Raportul dintre prețul unui creion și prețul unui caiet este $\frac{2}{3}$. Dacă prețul caietului este de $4,5$ lei, calculați prețul creionului.

9. Raportul a două numere este $\frac{3}{7}$.

a) Aflați suma acestor numere, știind că numărul mai mic este 6;
b) Aflați produsul acestor numere, știind că numărul mai mare este 35.

10. Calculați numărul natural nenul x, din proporțiile:

a) $\frac{x}{12}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{7}$;

b) $\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}:5}{4}=\frac{x}{75}$;

c) $\frac{3}{8}=\frac{0,75+\frac{27}{4}}{x+1}$;

d) $\frac{0,2+0,(2)}{2\cdot x+1}=\frac{1}{45}$;

e) $\frac{2^{51}-2^{50}-2^{49}}{8^{16}}=\frac{31\cdot x}{992}$;

f) $\frac{x}{14+2^2}=\frac{8}{x}$.

11. Se consideră proporția $\frac{4}{11}=\frac{2}{5,5}$. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți:

a) Proporții derivate, cu aceiași termeni:

$\frac{...}{11}=\frac{2}{...}$; $\frac{4}{...}=\frac{...}{5,5}$; $\frac{11}{...}=\frac{5,5}{...}$.

b) Proporții derivate, cu alți termeni:

$\frac{4}{...}=\frac{2}{...}$; $\frac{...}{11}=\frac{...}{5,5}$; $\frac{4}{11}=\frac{...}{...}$; $\frac{20}{11}=\frac{...}{5,5}$; $\frac{4}{11}=\frac{12}{...}$.

12. Se știe că $\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$. Calculați:

a) $\frac{x+y}{y}$; b) $\frac{x}{y-x}$; c) $\frac{x}{3\cdot y}$; d) $\frac{8\cdot x+3\cdot y}{9\cdot y}$.

13. Raportul a două numere este $\frac{3}{7}$.

a) Determinați numerele știind că suma lor este 30.
b) Determinați numerele știind că diferența lor este 12.

14. Să se afle x, folosind proporții derivate:

a) $\frac{x+4}{x}=\frac{5}{3}$; b) $\frac{1}{x-1}=\frac{10}{3}$; c) $\frac{x+2}{x}=0,25$;

d) $\frac{7,5}{4}=\frac{\frac{x}{2}}{8}$ e) $\frac{11,5}{2,5}=\frac{x+4,5}{x-4,5}$; f) $\frac{\frac{1}{3}}{1\frac{2}{3}}=\frac{2-x}{x}$.

15. Costin a economisit în două luni suma de 56 lei. Raportul dintre suma economisită în prima lună și suma economisită în a doua lună este $\frac{3}{4}$.

a) Precizați în care lună a economisit mai mulți bani.
b) Aflați, folosind proporții derivate, diferența sumelor economisite în cele două luni.
c) Compuneți o problemă asemănătoare știind că, peste două luni, Costin trebuie să cumpere un obiect care costă 63 lei. Rezolvați problema, folosind proporții derivate.

16. Se consideră triunghiul ABC și $D \in AB$, $E \in AC$ (fig. 1). Să se arate că dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, atunci au loc și relațiile:

a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

b) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$

c) $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

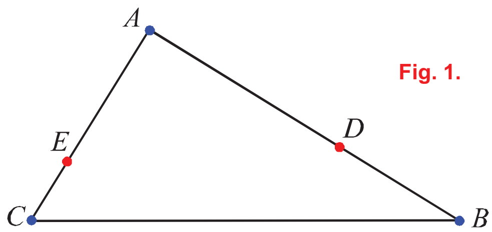


Fig. 1.

2.3. Șir de rapoarte egale. Mărimi proporționale

Rezolvăm și descoperim

1. a) Ioana cumpără pixuri de același fel. Pentru 4 pixuri, ea plătește 8 lei.

a_1) Cât plătește Ioana pentru un pix?
a_2) Copiați și completați tabelul următor:

n	1	3	4	6	5
p					

unde n reprezintă numărul de pixuri, iar p reprezintă prețul (în lei) al celor n pixuri.

a_3) Care este valoarea raportului $\frac{p}{n}$, dacă $p = 8$ și $n = 4$? Ce reprezintă această valoare?

b) Sabina realizează un tabel cu prețurile corespunzătoare numărului de pixuri:

n	4	5	7	6	3
p	8	10	14	12	6

b_1) Este corect tabelul Sabinei?

b_2) Sabina scrie toate rapoartele de forma $\frac{p}{n}$, rezultate din tabelul ei, spunând că a obținut un șir de rapoarte. Care este șirul de rapoarte scris de Sabina?

b_3) Radu afirmă: „Sabina a obținut un șir de rapoarte egale”. Este adevărată afirmația lui Radu? Justificați!
b_4) Alexandra afirmă: „Fiecare raport din șir este egal cu raportul care are la numărător *suma numărătorilor rapoartelor* din șir, iar la numitor *suma numitorilor rapoartelor* din șir. Este adevărată afirmația Alexandrei?

2. Pentru prepararea hranei, administratorul unei cantine a cumpărat în prima zi, 6 litri de lapte, pentru care a plătit 15 lei. A doua zi, a cumpărat de două ori mai mult lapte decât în prima zi, iar în ziua a treia, administratorul a cumpărat de trei ori mai puțin lapte decât în prima zi.
a) Calculați cât lapte a cumpărat administratorul în a doua zi și în ziua a treia;

b) Calculați cât a plătit în ziua a doua și cât a plătit a treia zi pentru lapte;
c) Stabiliți de câte ori s-a plătit mai mult în a doua zi, decât în prima zi și de câte ori s-a plătit mai puțin, în a treia zi decât în prima zi;
d) Sonia observă: „S-a cumpărat de două ori mai mult lapte și s-a plătit de două ori mai mult. Când s-a cumpărat de trei ori mai puțin lapte, s-a plătit de trei ori mai puțin”. Este adevărată afirmația Soniei? Justificați!

3. Patru robinete, de același tip, umplu un rezervor în 4 ore.

Reținem

a) În cât timp este umplut rezervorul de două robinete de același tip? Dar de p robinete de același tip?
b) Mihai observă: „Dacă se micșorează de două ori numărul robinetelor, atunci se mărește de două ori timpul de umplere. Dacă se micșorează de două ori timpul de umplere, atunci, crește de două ori numărul robinetelor”. Este adevărată afirmația lui Mihai? Șirul de rapoarte $\frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{7}{14}, \frac{6}{12}, \frac{2}{4}$, formează un șir de rapoarte *egale*, deoarece fiecare raport din șir are aceeași valoare: $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

Fiecare raport dintr-un șir de rapoarte egale este egal cu raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor rapoartelor din șir: $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{4+5+7+6+2}{8+10+14+12+4} = \frac{24}{48}$

Cantitatea (exprimată în kilograme, litri, bucăți...) și prețul sunt două mărimi direct proporționale. Notând cu q cantitatea, cu p prețul și cu k valoarea raportului $\frac{p}{q}$, obținem $\frac{p}{q} = k$, de unde, $p = k \cdot q$.

Numărul k reprezintă prețul unui kilogram, al unui litru, al unei bucăți...

Despre numerele p_1, p_2, ... p_n, se spune că sunt direct proporționale cu numerele q_1, q_2, ... q_n, dacă formează șirul de rapoarte egale: $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = ... = \frac{p_n}{q_n} = k$.

Numărul de robinete și timpul în care robinetele umplu un rezervor sunt mărimi invers proporționale. Notând cu p, numărul de robinete și cu t, timpul în care acestea umplu un rezervor se obține tabelul alăturat:

n	1	4	2	8
t	16	4	8	2

n	n_1	n_2	n_3	n_4
t	t_1	t_2	t_3	t_4

$n \cdot t = 16$ sau $n \cdot t = k$, adică, $n_1 \cdot t_1 = n_2 \cdot t_2 = n_3 \cdot t_3 = ... = n_p \cdot t_p = k$

Despre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se spune că sunt invers proporționale cu numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots a_n \cdot b_n$.

Rezumăm cunoștințele

- ***Șirul de rapoarte egale*** *este un șir format cu rapoarte care au aceeași valoare.*
- *Într-un șir de rapoarte egale, fiecare raport din șir este egal cu raportul care are la numărător suma numărătorilor rapoartelor din șir și la numitor suma numitorilor rapoartelor din șir.*
- ***Mărimi direct proporționale*** *sunt două mărimi cu proprietatea: dacă una se mărește sau se micșorează de un număr de ori, atunci cealaltă mărime se mărește sau se micșorează de același număr de ori.*
- ***Mărimi invers proporționale*** *sunt două mărimi cu proprietatea: dacă una se mărește sau se micșorează de un număr de ori, atunci cealaltă mărime se micșorează sau se mărește de același număr de ori.*

Aplicăm cunoștințele

4. Notăm cu n numărul de muncitori și cu t timpul (exprimat în ore) în care cei n muncitori termină o lucrare (se presupune că muncitorii au același ritm de lucru). Completați tabelul alăturat:

n	1	3	4	5	6	8
t		4				

5. a) Verificați dacă $\frac{2}{5}=\frac{1}{2,5}=\frac{4}{10}=\frac{0,5}{1,25}$

b) Folosindu-vă de subpunctul a) calculați: $\frac{2+1+4+0,5}{5+2,5+5+0,5\cdot 5}$.

Ne verificăm

1. a_1) Pentru un pix, Ioana plătește de *4* ori mai puțin, adică *8 : 4 = 2* (lei). a_2) Dacă pentru un pix Ioana plătește 2 lei, atunci pentru 3 pixuri plătește de trei ori mai mult, adică 12 lei tabelul completat este următorul:

n	1	3	4	6	5
p	2	6	8	12	10

a_3) pentru $p = 8$ și $n = 4$ rezultă $\frac{p}{n}=2$. Valoarea acestui raport reprezintă prețul unui pix. b_1) prețul plătit pentru 1 pix este 2 lei; pentru 4 pixuri este $2\cdot 4 = 8$ (lei); pentru 5 pixuri este $2\cdot 5 = 10$ (lei); pentru 7 pixuri este $2\cdot 7 = 14$ (lei); pentru 6 pixuri este $2\cdot 6 = 12$ (lei); pentru 3 pixuri este $2\cdot 3 = 6$ (lei) și tabelul Sabinei este completat corect.b_2) Șirul de rapoarte scris de Sabina este: $\frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{6}{3}$. b_3) Afirmația lui Radu este adevărată deoarece valoarea fiecărui raport reprezintă prețul unui pix. b_4) Fiecare raport din șir este de forma $\frac{p}{n}$, iar valoarea *2* a raportului reprezintă prețul (în lei) al unui pix. Dacă $n = 4 + 5 + 7 + 6 + 3$ și $p = 8 + 10 + 14 + 12 + 6$, atunci $\frac{8+10+14+12+6}{4+5+7+6+3}=2$.

Într-adevăr, $8 + 10 + 14 + 12 + 6 = 50$; $4 + 5 + 7 + 6 + 3 = 25$ și $\frac{50}{25}=2$ și afirmația Alexandrei este adevărată.

2. a) În a doua zi administratorul a cumpărat $2\cdot 6 = 12$ (litri de lapte), iar în a treia zi, a cumpărat de două ori mai puțin lapte decât în prima zi, deci, a cumpărat $6 : 2 = 3$ (litri de lapte);

b) Prețul plătit pentru lapte este dat de: 1 l lapte este $15 : 6 = 2,50$(lei) a doua zi: 12 l lapte este $12\cdot 2,50 = 30$ (lei), a treia zi: 3 l lapte este $3\cdot 2,50 = 7,50$ (lei);

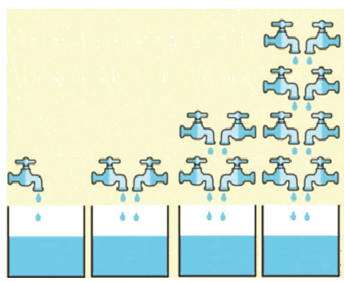
c) În prima zi, administratorul a plătit pentru lapte 15 lei, iar a doua zi a plătit 30 lei, deci de două ori mai mult. A treia zi administratorul a plătit 7,50 lei. Cum, $15 : 7,50 = 2$, rezultă că a plătit de două ori mai puțin decât în prima zi. Conform subpunctelor a) și b), afirmația Soniei este adevărată.

3. a) Un singur robinet va umple rezervorul într-un interval de timp de 4 ori mai mare decât timpul în care 4 robinete ar umple același rezervor. Prin urmare, rezervorul este umplut în:

$4\cdot 4 = 16$ (ore) de un robinet; $16 : 2 = 8$ (ore) de două robinete;
$16 : 4 = 4$ (ore) de 4 robinete; $16 : 8 = 2$ (ore) de 8 robinete.

b) Notând cu n numărul de robinete și cu t timpul de umplere (exprimat în ore), rezultă următorul tabel:

Acest tabel demonstrează că afirmația lui Mihai este adevărată.



4. Completăm tabelul:pe primul rând cu n_1 și n_2, în această ordine;pe rândul al doilea cu t_1, t_2 și t_3, în această ordine.

Numerele 1; 3; 4; 5; n_1; n_2 sunt invers proporționale cu numerele t_1; 4; t_2; t_3; 2; n_3·1,5. Rezultă: $1 \cdot t_1 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot t_2 = 5 \cdot t_3 = n_1 \cdot 2 = n_2 \cdot 1,5$. Se obține $t_1 = 12$. Apoi: $\Rightarrow t_2 = 12 : 4 \Rightarrow t_2 = 3 \Rightarrow t_3 = 12 : 5 \Rightarrow t_3 = 2,4 \Rightarrow n_1 = 12 : 2 \Rightarrow t_2 = 6 \Rightarrow n_2 = 12 : 1,5 \Rightarrow t_2 = 8$

n	1	3	4	5	n_1	n_2
t	t_1	4	t_2	t_3	2	1,5

5. a) $\frac{2}{5} = 0,4$; $\quad ^{2)}\frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = 0,4$; $\quad \frac{4}{10} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4$; $\quad \frac{4}{10} = 0,4$;

$^{100)}\frac{0,5}{1,25} = \frac{50}{125} = 0,4$.

Rezultă că rapoartele sunt egale (au aceeași valoare). b) Se aplică proprietatea șirului de rapoarte egale: $\frac{2}{5} = \frac{1}{2,5} = \frac{4}{10} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4$ și rezultă $\frac{2+1+4+0,5}{5+2,5+5+0,5 \cdot 5} = 0,4$.

n	1	2	4	8	16	32
t	16	8	4	2	4	0,5

Activități de învățare

1. Știind că $\frac{a}{n} = \frac{b}{m} = \frac{c}{p} = \frac{1}{5}$, $m, n, p \neq 0$ calculați raportul $\frac{a+b+c}{n+m+p}$

2. Se consideră șirul de rapoarte egale $\frac{2 \cdot a}{3} = \frac{5 \cdot b}{6} = \frac{8 \cdot c}{9}$ și $a+b+c = 51$. Aflați numerele a, b și c.

3. Se știe că $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, $\frac{b}{y} = 2$ și $x+y+z = 4,5$. Calculați $a+b+c$.

4. Folosind șirul de rapoarte egale $\frac{a}{n} = \frac{b}{m} = \frac{c}{p} = \frac{d}{q} = 7$, $m, n, p, q \neq 0$ calculați $7^2 - \frac{a+b+c+d}{n+m+p+q}$ și $\frac{a+b}{n+m} + \frac{b+c}{m+p} + \frac{c+d}{p+q} + \frac{d+a}{q+n} - 17$.

5. Dacă $\frac{a}{n} = \frac{b}{m} = 0,2$, $n, m \neq 0$ calculați $\frac{a^2+b^2}{n^2+m^2}$.

6. Se știe că $\frac{x}{n} = \frac{y}{3} = \frac{z}{m}$, $n, m \neq 0$, și $n+m = 10$. Dacă $x = 18$ și $y+z = 21$, aflați numerelex, y, z, n, m.

7. Aflați numerele a, b, c, $b \neq 0$ pentru care $c - a = 8$ și $\frac{a}{3} = \frac{8}{b} = \frac{c}{5}$.

8. Numerele a, b, c verifică relația $\frac{a}{7} = \frac{b}{24} = \frac{c}{25}$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 = c^2$;

b) Aflați numerele a, b, c, știind că $a+b-c = 0,6$.

9. Determinați numerele nenule x, y, z știind că $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z} = \frac{4}{t}$ și $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{t}{4} = \frac{1}{8}$.

10. Numerele naturale a, b, c verifică relațiile $\frac{a}{4} = \frac{b}{6}$ și $\frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.

a) Determinați cele trei numere știind, în plus, că $a + 2 \cdot b + c = 35$.

b) Demonstrați că dacă unul dintre cele trei numere este număr prim, atunci toate sunt numere prime.

11. Analizând datele din tabelele de mai jos, stabiliți dacă mărimile A și B sunt direct proporționale. Explicați răspunsul dat, pentru fiecare subpunct al problemei.

a)	A	1	2	6	10
	B	3	6	18	30
b)	A	12	16	10	$4n$
	B	3	4	2	n
c)	A	1,3	2,5	3,26	$\frac{15}{4}$
	B	2,6	5	6,52	$\frac{15}{2}$

12. Viteza de deplasare a unui automobil este de 75 de kilometri pe oră.

a) Calculați distanța pe care o va parcurge acest automobil în 2 ore, apoi în 5 ore, respectiv în 10 ore.

b) Completați tabelul de mai jos, folosind rezultatele găsite pentru valorile timpului dat și ale distanței corespunzătoare.

t	$2h$	$5h$	$10h$
d			

c)Verificați, dacă, păstrând viteza constantă, distanța și timpul sunt mărimi direct proporționale.

13. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) Cantitatea de marfă și prețul acelei mărfi sunt mărimi direct proporționale. ☐

b) Distanța parcursă și timpul de parcurgere, când viteza rămâne constantă, sunt mărimi direct proporționale. ☐

c) Timpul în care este parcursă o distanță și viteza de parcurgere a acesteia sunt mărimi direct proporționale. ☐

d) Vârsta unei persoane și înălțimea sa sunt mărimi direct proporționale. ☐

14. Completați spațiile libere așa încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Dintre numerele a și b, direct proporționale cu numerele 3 și 7, este mai mic ....

b) Dintre numerele x și y, direct proporționale cu numerele $0,4$ și $\frac{3}{5}$, este mai mare ....

15. Determinați trei numere direct proporționale cu 2; $2,5$ și 6, știind că cel mai mic dintre ele este 8.

16. Opt creioane costă 12 lei. Fără a calcula prețul unui creion, aflați cât vor costa:

a) de trei ori mai multe creioane; b) 4 creioane; c) 18 creioane.

17. Determinați numerele a și b știind că a, 4 și 12 sunt direct proporționale cu 5; b și 3.

18. Determinați numerele m, n și p știind că:

a) Sunt direct proporționale cu 3; 7 și 11, iar suma lor este 420;

b) Sunt direct proporționale cu $0,2$; $0,75$ și $1,55$, iar diferența dintre numărul mai mare și numărul mai mic este 27.

19. Mihnea cumpără patru cadouri pentru prietenii lui. Știind că prețurile acestor cadouri, exprimate în lei, sunt numere naturale, direct proporționale cu 3; $3,2$; $3,3$ și 3,5 și că suma cheltuită de Mihnea nu depășește 135 de lei, aflați prețul fiecărui cadou.

20. Aflați numărul natural $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ sunt direct proporționale cu 3 și 8.

21. Două pătrate au ariile exprimate în cm^2 prin numere direct proporționale cu 4 și 9. Aflați lungimile laturilor celor două pătrate, în fiecare din situațiile:

a) Perimetrul pătratului cu aria mai mică este 8 cm;

b) Suma perimetrelor celor două pătrate este 35 cm.

22. Analizând datele din tabelele de mai jos, stabiliți dacă mărimile A și B sunt invers proporționale sau nu. Explicați răspunsul dat, pentru fiecare subpunct al problemei.

a)	A	2	4	6	10	16
	B	24	12	8	4,8	3
b)	A	30	20	10	6	$30:n,\ n \neq 0$
	B	2	3	6	5	$2n$
c)	A	2	3	4,5	5	8
	B	9	6	4	3,4	2,25

23. Un automobil are de parcurs distanța de 180 km. Cu ce viteză (medie) trebuie să se deplaseze automobilul pentru a parcurge această distanță în 2 ore? Dar în 3 ore? Dar în 4 ore? Completați valorile obținute în tabelul de mai jos.

t	$2h$	$3h$	$4h$
v			

24. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) Viteza și distanța parcursă de un automobil, într-un timp dat, sunt mărimi invers proporționale; ☐

b) Timpul în care este parcursă o distanță și viteza de parcurgere a acesteia sunt mărimi invers proporționale; ☐

c) Numărul de muncitori și timpul în care aceștia realizează o lucrare sunt mărimi invers proporționale. ☐

25. O echipă de muncitori poate efectua o lucrare în 12 ore. În câte ore s-ar realiza lucrarea, dacă numărul muncitorilor:

a) este de două ori mai mic; b) este de două ori mai mare; c) este de 2,5 ori mai mare.

26. Numerele a și b sunt invers proporționale cu $4,2$ și $2,4$. Care dintre cele două numere este mai mic?

27. Aflați trei numere invers proporționale cu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$, știind că cel mai mare dintre ele este 24.

28. Numerele m; n și p sunt invers proporționale cu 8; 9 și 12. Aflați cele trei numere dacă:

a) suma lor este 46; b) produsul lor este 2.

29. Bunicul împarte suma de 84 lei celor trei nepoți ai săi, în părți invers proporționale cu vârstele lor, adică 7 ani, 9 ani, respectiv 12 ani. Aflați suma pe care o primește fiecare nepot.

30. La un concurs, trei copii, ocupanți ai locurilor I, II și III, au fost recompensați prin sume de bani, totalizând 360 de lei. Ocupantul locului al II-lea ar primi aceeași sumă, atât dacă sumele acordate ar fi direct proporționale cu 3; 2; 1, cât și dacă sumele acordate ar fi invers proporționale cu 12; 15 și 20. Aflați suma pe care o primește câștigătorul concursului în fiecare dintre cele 2 situații.

31. Dintre zece numere naturale consecutive, cel mai mic și cel mai mare sunt invers proporționale cu $5,4$ și $4,5$. Calculați suma celor zece numere.

32. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$, divizibil cu 9, în care cifra unităților și cifra miilor sunt invers proporționale cu $0,125$ și $0,2$.

33. Numerele a,b,c sunt direct proporționale cu $0,25$; $0,5$; și $0,75$. Numerele c și d sunt invers proporționale cu numerele $0,4$ și $0,2$. Demonstrați că produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d$ este pătratul unui număr.

2.4. Regula de trei simplă

Rezolvăm

1. Scuterul lui Sergiu consumă 1,8 litri de carburant pentru a parcurge 50 de kilometri.

a) Copiați și completați următorul text: *Consumul de carburant, exprimat în litri, este o mărime fizică direct proporțională cu distanța parcursă, exprimată în kilometri, deoarece dacă distanța parcursă de scuter se mărește sau se micșorează, de un număr de ori, atunci și consumul de carburant ....*

b) Sergiu parcurge cu scuterul 75 de kilometri. Pe această distanță, scuterul consumă x litri de carburant. În acest caz, numerele 1,8 și 50 sunt direct proporționale cu numerele x și 75. Rezultă o egalitate de două rapoarte, adică o proporție. Care este aceasta?

c) Folosind proporția respectivă, calculați valoarea lui x.

Observăm și demonstrăm

Din $\frac{1,8}{x}=\frac{50}{75}$ rezută $x=\frac{1,8\cdot 75}{50}$, de unde $x = 2,7$.

Pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

1,8 l .... 50 km

x l .... 75 km

$$\Rightarrow x=\frac{1,8\cdot 75}{50}\Rightarrow x=2,7.$$

Această modalitate de calcul este cunoscută sub numele de *regula de simplă, pentru mărimi direct proporționale.*

2. Vlad este ajutor de bucătar la un restaurant. Aici, el a învățat să gătească mâncăruri delicioase. Într-o duminică, Vlad a decis să pregătească o astfel de mâncare pentru familia lui, care numără 7 persoane. El și-a amintit ingredientele și cantitățile necesare pentru două porții:

- 250 grame mușchiuleț de porc;
- 14 ciuperci mici;
- 30 g de unt;
- 3 linguri smântână.

Calculați cantitățile de ingrediente necesare lui Vlad, pentru a găti această mâncare familiei

Exemplu: Deoarece cantitățile de alimente sunt direct proporționale cu numărul de persoane, aplicăm regula de trei simplă:

250 g mușchiuleț .... 2 porții

x g mușchiuleț .... 7 porții

$$\Rightarrow x=\frac{7\cdot 250}{2}\Rightarrow x=875.$$

Deci, pentru 7 porții sunt necesare 875 g mușchiuleț. La fel se procedează pentru celelalte ingrediente.

3. O lucrare de zidărie este terminată de 6 muncitori, în 8 ore. Șeful de șantier dorește ca lucrarea să fie terminată în 3 ore. Pentru aceasta, el mărește numărul de muncitori.

a) „Dacă x este numărul de muncitori care execută lucrarea în 3 ore, atunci numerele 6 și 8 sunt invers proporționale cu numerele x și 3”. Justificați afirmația;

b) Folosind a), calculați x.

Observăm și demonstrăm

Din $6 \cdot 8 = 3 \cdot x$ rezultă $x = \frac{6 \cdot 8}{3}$, de unde $x = 16$.

Pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

6 muncitori .... 8 ore

x muncitori .... 3 ore

$$\Rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{3} \Rightarrow x = 16 \text{ (muncitori)}$$

Această modalitate de calcul este cunoscută sub numele de *regula de trei simplă, pentru mărimi invers proporționale.*

Rezumăm cunoștințele

- *Regula de trei simplă* este procedeul folosit pentru a calcula o valoare a unei mărimi fizice, în cazul în care mărimea fizică respectivă este direct proporțională sau invers proporțională cu altă mărime fizică.

Exemplul 1: 3 kg de mere costă 15 lei. Cât costă 7 kg de mere de aceeași calitate?

3 kg .... 15 lei

7 kg .... x lei

$$\Rightarrow x = \frac{7 \cdot 15}{3} \Rightarrow x = 35 \text{ (lei)}$$

Exemplul 2: 4 robinete umplu un rezervor în 6 minute. În câte minute este umplut un rezervor cu aceași capacitate către 3 robinete cu același debit?

4 robinete .... 6 minute

3 robinete .... x minute

$$\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 6}{3} \Rightarrow x = 8 \text{ (minute)}$$

Aplicăm cunoștințele

4. Pentru a lichida un stoc de alimente, cu câteva zile înainte de expirarea termenului de valabilitate al acestora, conducerea supermarket-ului hotărăște ca prețurile să devină invers proporționale cu cantitatea de alimente. Un cumpărător plătește,pentru 8 kg de alimente, 120 lei. Cât va plăti dacă va cumpăra 30 kg de alimente?

Ne verificăm

1. a) Se completează cu expresia „... crește sau scade de același număr de ori."

b) Proporția este $\frac{1{,}8}{x} = \frac{50}{75}$. c) Din proporția $\frac{1{,}8}{x} = \frac{50}{75}$ rezultă $x = \frac{1{,}8 \cdot 75}{50}$ de unde $x = 2{,}7$.

2. 14 ciuperci .... 2 persoane

x ciuperci .... 7 persoane

$$\Rightarrow x = \frac{14 \cdot 7}{2} \Rightarrow x = 49 \text{ (ciuperci)}$$

30 g unt.......................... 2 persoane

x g unt.......................... 7 persoane

$$\Rightarrow x = \frac{30 \cdot 7}{2} \Rightarrow x = 105 \text{ g unt}$$

3 linguri .... 2 persoane

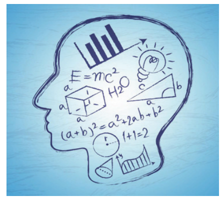
x linguri .... 7 persoane

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 7}{2} \Rightarrow x = 10\frac{1}{2} \text{ (linguri de smântână).}$$

3. a) Crește numărul de muncitori scade intervalul de timp în care ei termină lucrarea; scade numărul muncitorilor, crește intervalul de timp în care ei termină lucrarea. Desigur, se presupune că muncitorii au aceeași îndemânare și lucrează în același ritm. Deci, 6 și 8 sunt invers proporționale cu x și 3.

b) Rezultă $3 \cdot x = 6 \cdot 8$ rezultă $x = \frac{6 \cdot 8}{3}$, de unde $x = 16$. prin urmare, este nevoie de 16 muncitori pentru a termina lucrarea în 3 ore.

4. Aplicăm regula de trei simplă pentru mărimi invers proporționale:



$$8 \text{ kg} \ldots\ldots\longleftrightarrow\ldots\ldots 120 \text{ lei}$$
$$\underline{30 \text{ kg} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x \text{ lei}}$$
$$\Rightarrow x = \frac{8 \cdot 120}{30} \Rightarrow x = 32 \text{ (lei)}$$

Deci, pentru 30 kg de alimente cumpărătorul va plăti 32 lei.

Activități de învățare

1. Petra a plătit pe 18 caiete 27 de lei.
a) Câte caiete de același fel va cumpăra David, cu 21 de lei?
b) Câte caiete de același fel poate cumpăra Sonia, cu 63 de lei?

2. Matei parcurge cu bicicleta, având viteza de 20 kilometri pe oră, distanța de $80\,\text{km}$.
a) Ce distanță ar parcurge, în același interval de timp, dacă ar merge cu viteza de 25 de kilometri pe oră?
b) Ce distanță parcurge tatăl lui Matei, în același interval de timp, dacă merge cu viteza de 40 kilometri pe oră?

3. O lucrare este realizată de 20 de muncitori, în 18 ore. Aflați timpul în care poate fi realizată aceeași lucrare de către 12 muncitori.

4. O cantitate de cărămidă este transportată de 14 camioane, fiecare efectuând 25 de curse. Câte curse ar face fiecare camion, dacă s-ar folosi doar 10 camioane?

5. Bunica a făcut aceeași cantitate de pastă de roșii și pastă de ardei. Pentru pasta de roșii, a folosit 18 recipiente a câte 600 ml fiecare. Câte recipiente de 900 ml a folosit pentru pasta de ardei?

6. Șase robinete, cu același debit, umplu un bazin în 24 de ore.
a) În cât timp vor umple bazinul 8 robinete de același fel?
b) De câte robinete de același fel avem nevoie pentru a umple bazinul în 8 ore?

7. Familia Cristescu are nevoie de 2800 lei pentru un concediu de 7 zile. Dorind să facă economie, concediul a fost redus cu 2 zile. Aflați cât a costat concediul și ce sumă a economisit familia Cristescu.

8. Când era copil, Simona juca tenis în fiecare zi. Ea folosea 21 de mingi de tenis pe săptămână, pentru a se antrena. De câte mingi avea nevoie Simona, pentru a se antrena 10 zile?

9. O sală de cinematograf are 36 de rânduri, cu același număr de locuri pe fiecare rând. Dacă pe 15 rânduri, ocupate complet, sunt 240 de spectatori, aflați capacitatea sălii de cinematograf.

10. Pentru a colora 4 fețe ale unui cub, se folosesc 312 g de vopsea. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a colora toate fețele cubului?

11. Un complex sportiv dispune de 8 bazine de înot, de aceleași dimensiuni. Pentru a umple 3 dintre ele, se folosesc 2 cisterne, făcând câte 3 curse fiecare. De câte cisterne ar fi nevoie pentru a umple cele 8 bazine, dacă fiecare ar face un singur drum?

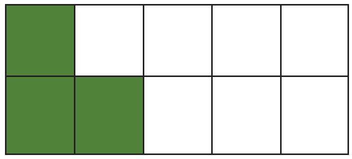
12. Dacă un câine face salturi de $1{,}2$ m, ajunge la stăpânul său în 40 de secunde. În cât timp parcurge aceeași distanță, făcând salturi de $1{,}5$ m?

13. O echipă de constructori poate finaliza o clădire în 15 zile. După 3 zile de lucru, s-au adăugat echipei încă 4 constructori. În cât timp va fi terminată construcția?

14. O lucrare poate fi realizată de o echipă de 20 de muncitori, în 8 zile. După 6 zile, patru dintre muncitori părăsesc echipa. Aflați în câte zile va fi realizată lucrarea.

15. Dacă ar parcurge un traseu fără oprire, cu viteza de 5 km/h, un alpinist ar ajunge la destinație în 9 ore. La jumătatea drumului, alpinistul face o pauză de 90 minute. Cu ce viteză trebuie să se deplaseze până la destinație, pentru a ajunge la aceeași oră?

16. Un teren în formă de dreptunghi este acoperit cu gazon. Terenul este împărțit în dreptunghiuri cu aceeași suprafață, ca în figura alăturată. Dacă în două zile este acoperită cu gazon suprafața hașurată, aflați în cât timp va fi acoperit cu gazon întregul teren.



2.5. Elemente de organizare a datelor

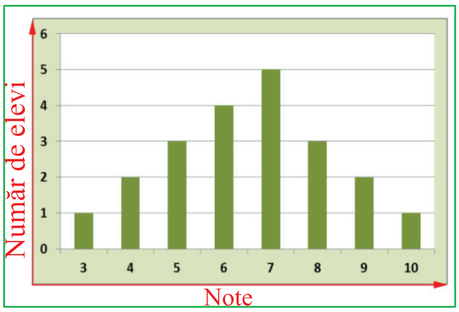
Rezolvăm

În studiul unor fenomene (naturale, ştiinţifice, sociale, economice) apar probleme legate de analizarea şi sistematizarea datelor privitoare la fenomenele cercetate, cu scopul de a emite concluzii bazate pe aceste analize, necesare inclusiv pentru anumite previzionări. Vom înţelege mai bine analizând şi rezolvând următoarele probleme.

1. a) Rezultatele obţinute de elevii clasei a VI-a, la o probă de evaluare, au fost sistematizate de profesorul clasei,în următorul tabel:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	3	4	5	3	2	1

Câţi elevi au luat nota 8? Dar nota 5?

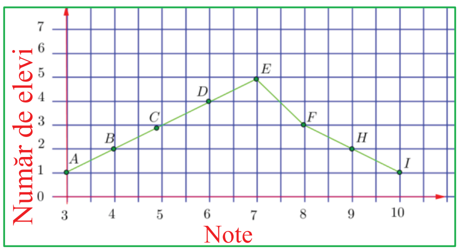


b) Graficul alăturat redă numărul de elevi în funcţie de nota obţinută la lucrarea respectivă.

Precizaţi câţi elevi au luat nota 7. Dar nota 9?

c) Înălţimile coloanelor graficului sunt direct proporţionale cu numărul de elevi. Dacă a 6-a coloană are 24 mm, calculaţi înălţimea coloanelor 5 şi 7.

Acest tip de grafic se numeşte *diagramă tip coloană*. Observaţi existenţa a *două axe*, reprezentate în desen, prin două săgeţi: pe una dintre axe sunt reprezentate notele (axa notelor), iar pe alta, numărul de elevi (axa numărului de elevi).



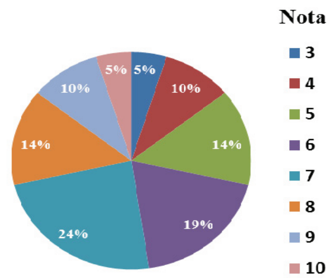
2. O analiză a notelor a fost făcută şi cu ajutorul graficului alăturat.De regulă, axa orizontală a unui astfel de grafic (în cazul nostru *axa notelor*) se notează cu *Ox* şi se numeşte *axa absciselor*, iar axa verticală(în cazul nostru *axa numărului de elevi*) se notează cu *Oy* şi se numeşte *axa ordonatelor*.

În această situație, unui punct al graficului, de exemplu punctului A, i se asociază două numere: unul este *abscisa* punctului, iar celălalt este *ordonata* punctului. Se scrie $A(3,1)$ şi se citeşte „*A* de coordonate 3 şi 1”. Cele două numere se numesc *coordonatele* punctului *A*.

a) Folosindu-vă de pătrăţelele din caietul tău, copiaţi graficul şi scrieţi coordonatele punctelor *B, C, D, E, F, H, I.* Ce semnificaţie are abscisa punctului *F*? Dar ordonata acestui punct?

b) Cum este denumită în grafic axa absciselor? Dar axa ordonatelor?
c) Refaceţi graficul, luând pe axa Ox unitatea de măsură de 0,5 cm, iar pe axa Oy unitatea de măsură de 1 cm.
Acest tip de grafic se numeşte *diagramă tip linie*.

3. Profesorul explică elevilor că se poate realiza o analiză bazată pe procente, a rezultatelor obținute la proba de evaluare.
a) Calculați numărul elevilor care au participat la proba de evaluare, folosind tabelul de date, inițial.
b) Folosind regula de trei simplă, exprimați în procente numărul elevilor care au obținut nota 9.



Exemplu

21 elevi .... 2 elevi cu nota 9
100 elevi... x elevi cu nota 9.

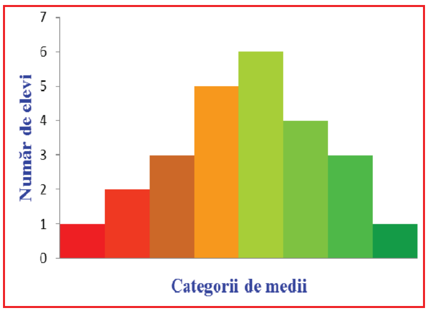
Rezultă $x = \dfrac{2 \cdot 100}{21}$, deci $x = 10$ (prin rotunjire la întregi).

c) Verificați corectitudinea datelor din tabelul de mai jos:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi (%)	5%	10%	14%	19%	24%	14%	10%	5%

Pentru calcule, utilizați un calculator de buzunar. Pe baza acestor date, se realizează graficul de mai sus, numit *diagramă circulară*.

4. La sfârşitul anului şcolar, dirigintele clasei analizează situaţia mediilor generale ale elevilor. Dirigintele trece datele într-un tabel şi pe baza acestuia, realizează următorul grafic:



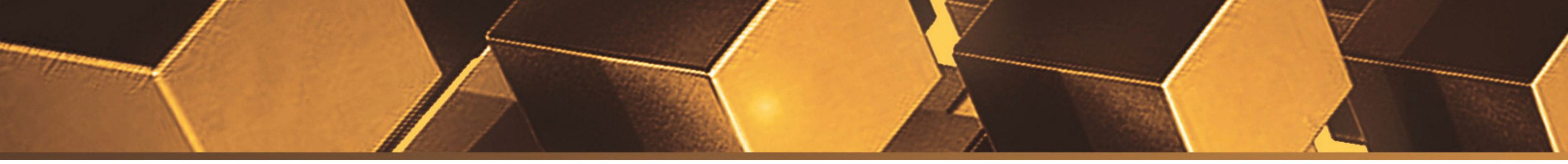
Categorii de medii	Nr. elevi
$m < 4$	1
$4 \le m < 5$	2
$5 \le m < 6$	3
$6 \le m < 7$	5
$7 \le m < 8$	6
$8 \le m < 9$	4
$9 \le m < 10$	3
$m = 10$	1
Total	25

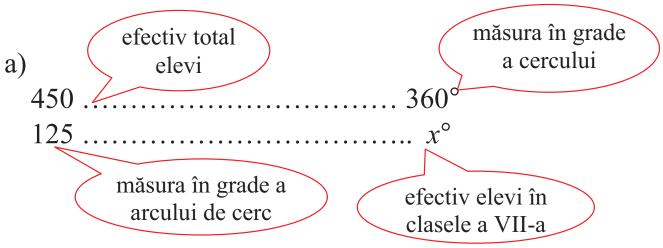
a) Ce semnificaţie are coloana cea mai înaltă?
b) Numărând de la stânga la dreapta, a câta coloană ne oferă informaţii cu privire la numărul de elevi cu medii între 5 şi 6?
c) Numărând de la stânga la dreapta, a câta coloană ne oferă informaţia că 6 elevi au medii între 6 şi 7?
O astfel de reprezentare grafică se numeşte *histogramă*.

5. Directorul unei unităţi şcolare completează un tabel cu efectivele de elevi pe clase (primele două linii ale tabelului de mai jos). Pe baza acestor date, el realizează un grafic numit *diagramă circulară*.

Sectoarele de cerc sunt direct proporţionale cu efectivele de elevi.
Prin urmare, proporţionalitatea directă şi regula de trei simplă l-au ajutat să realizeze diagrama.

Clasele	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a	Total
Nr.elevi	100	75	125	150	450
m_{arc}					360°
Procent					100%



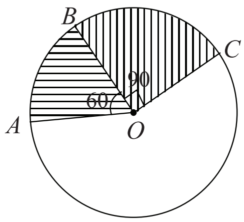


Utilizând regula de trei simplă, calculaţi măsura în grade a fiecărui arc de cerc şi completaţi linia a treia a tabelului.

b) Utilizând regula de trei simplă, calculaţi procentul din suprafaţa cercului ocupat de fiecare sector şi completaţi ultima linie a tabelului.

Notă: Calculul se face cu o zecimală exactă, iar rezultatul se rotunjeşte la zecimi.

Aplicăm cunoştinţele



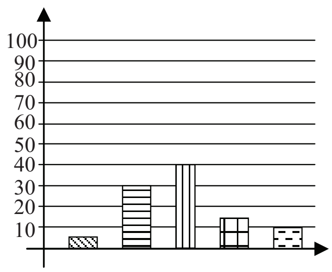
6. În figura alăturată se ştie că: $\sphericalangle AOB = 60°$ şi $\sphericalangle BOC = 90°$.

a) Calculaţi ce procent din suprafaţa circulară reprezintă suprafaţa corespunzătoare unghiului *AOB*;

b) Calculaţi ce procent din suprafaţa circulară reprezintă suprafaţa corespunzătoare unghiului *BOC*;

c) Construiţi unghiul *COD,* astfel încât suprafaţa corespunzătoare acestuia să reprezinte 50% din suprafaţa circulară.

7. La cabinetul de „Orientare şcolară şi profesională”, elevii au fost întrebaţi în ce măsură părinţii îi influenţează în ceea ce priveşte înscrierea la liceu. Situaţia este prezentată în diagrama cu bare verticale din figura de mai jos.



a) ▧ în totalitate;

b) ▤ în mare măsură;

c) ▥ într-o oarecare măsură;

d) ⊞ în mică măsură;

e) ⬚ deloc.

Ştiind că este vorba de 600 de elevi, calculaţi câţi elevi au alesvarianta a) câţi elevi au ales varianta b) câţi elevi au ales varianta c), câţi elevi au ales varianta d) şi câţi elevi au ales varianta e).

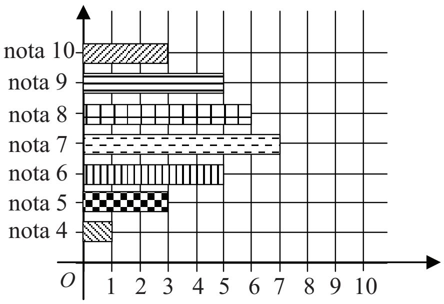
8. În diagrama cu bare orizontale din figura alăturată este ilustrată repartiţia notelor obţinute de elevii unei clase la testul de evaluare iniţială.

a) Calculaţi cât la sută din numărul elevilor au luat nota 8.

b) Calculaţi cât la sută din numărul elevilor au luat notă cel puţin egală cu 8.

c) Calculaţi care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev, acesta să fi obţinut nota 9

d) Calculaţi care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev, acesta să fi avut nota cel mult egală cu 8.



Ne verificăm

1. a) 3 elevi; 3 elevi; b) 5 elevi; 2 elevi; c) 40 mm; 16 mm. **2.** a) Abscisa punctului F reprezintă nota 8; ordonata indică 3 elevi; b) axa notelor; axa numărului elevilor; c) se realizează diagrama. **3.** a) 21 de elevi. **4.** a) 6 elevi au note între 7 şi 7,99; b) a treia coloană; c) niciuna.

5. Se calculează şi se completează tabelul alăturat.

Clasele	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a	Total
Nr. elevi	100	75	125	150	450
m_{arc}	80°	60°	100°	120°	360°
Procent	22,2	16,6	27,7	33,3	100

6. a) 16,6%; b) 25%; c) $\widehat{COD} = 180°$. **7.** a) 30 elevi; 180 elevi; 240 elevi; 90 elevi; 60 elevi. **8.** a) 20%; b) 46,6%; c) 16%; d) 20%.

2.6. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice

Observăm și demonstrăm

Microsoft Excel este componentă Microsoft Office specializată în prelucrarea datelor. Excel este cel mai popular mod prin care se prelucrează și se reprezintă grafic date, fiind un instrument foarte ușor de utilizat.

Exemplu:

1. La teza din semestrul al doilea, elevii claselor a VI-a de la o şcoală, au obţinut următoarele rezultate:

• la matematică:	Grupe de note	**Sub 5**	**5-5,99**	**6-6,99**	**7-7,99**	**8-8,99**	**9,00-10**
	Număr de elevi	8	14	27	25	34	20
• la limba română:	Grupe de note	**Sub 5**	**5-5,99**	**6-6,99**	**7-7,99**	**8-8,99**	**9 -10**
	Număr de elevi (în procente)	14%	27%	21%	15%	14%	9%

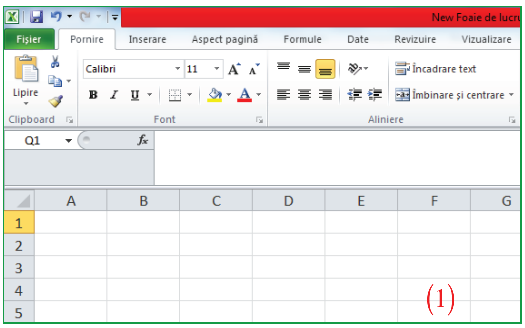
Pentru prelucrarea datelor, oferite de tabelul cu rezultatele la matematică, vom realiza o *diagramă tip coloană*. Acest tip de diagramă se utilizează pentru compararea valorilor care se analizează

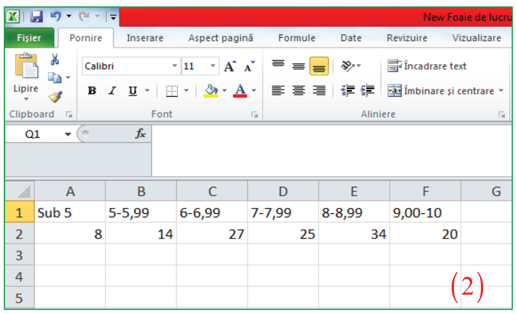
Pentru prelucrarea datelor, oferite de tabelul cu rezultatele la limba română, vom realiza o *diagramă circulară*.Diagrama circulară este o reprezentare grafică a informațiilor cantitative prin intermediul unui cerc împărțit în sectoare, în care dimensiunile sectoarelor corespund proporțiilor cantităților. Diagrama arată relația procentuală dintre părți, comparate cu întregul.

Oricare dintre cele două diagrame se realizează în patru pași:

Pasul 1: deschideți o foaie Excel.

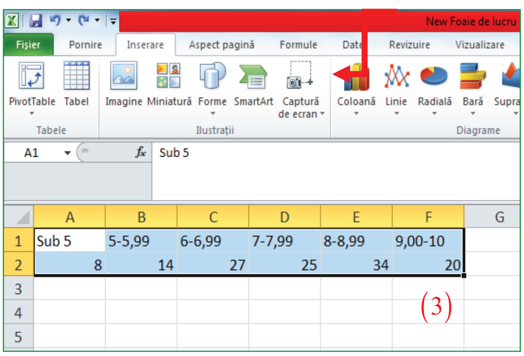
Pasul 2: introduceți datele cu rezultatele la matematică în celulele foii de lucru.





Pasul 3: selectați tabelul și faceți clic-dreapta pe *Inserare*, apoi pe pictograma *Coloană.*

Pasul 4: rezultatul este afișarea imediată a diagramei coloană.



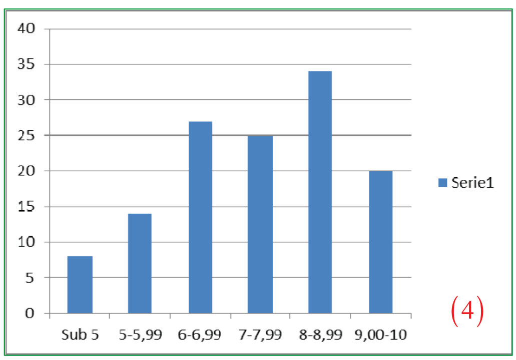


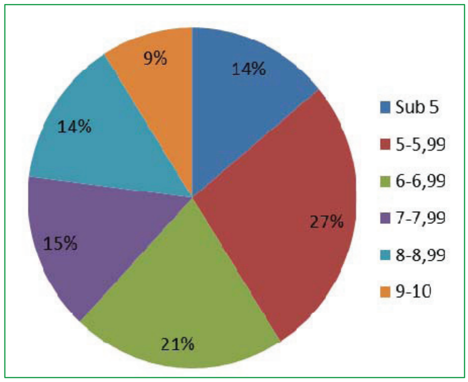
Diagrama circulară cu analiza informațiilor cantitative privind rezultate de la limba română rezultă în același mod:

Pasul 1: deschideți o foaie Excel.

Pasul 2: introduceți datele cu rezultatele la limba română în celulele foii de lucru.

Pasul 3: selectați tabelul și faceți clic-dreapta pe *Inserare*, apoi pe pictograma *Radială.*

Pasul 4: rezultatul este afișarea imediată a diagramei circulare.



Aplicăm cunoștințele

1. a) Realizează un alt tabel pentru prezentarea situației la teza de matematică, respectiv limba română, prin calcularea numărului procentual de elevi pentru fiecare grupă de note, la matematică, respectiv prin aflarea numărului de elevi pentru fiecare grupă de note, la limba română;

b) Prelucrați datele din tabelele obținute, utilizând Microsoft Excel.

Ne verificăm

2. a) Tabelul cu rezultatele elevilor la matematică rezultă prin aplicarea regulii de trei simplă.

Exemplu: Calculăm numărul total de elevi 8 + 14 + 27 + 25 + 34 + 20 = 128, apoi aplicăm regula de trei simplă:

$$\left.\begin{array}{l}8 \text{ elevi au nota } 5 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ din } 128 \text{ elevi} \\ x\ \% \text{ elevi au nota } 5 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ din } 100\% \text{ elevi}\end{array}\right\} \text{ de unde } x = \frac{8 \cdot 100}{128} \approx 6$$

(Pentru calcule se utilizează un calculator, iar rezultatele se rotunjesc la întreg)

Rezultă următorul tabel:

Matematică

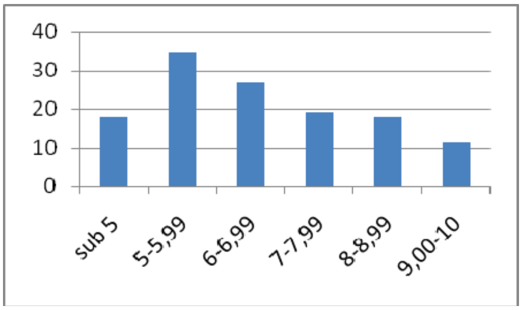
Grupe de note	Sub 5	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9,00-10
Număr de elevi	8	14	27	25	34	20
Număr de elevi (în procente)	6%	11%	21%	20%	27%	16%

Tabelul cu rezultatele elevilor la limba română rezultă tot prin aplicarea regulii de trei simplă.

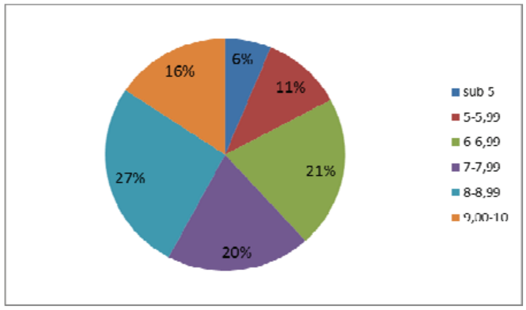
Limba româna

Grupe de note	Sub 5	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9 -10
Număr de elevi (în procente)	14%	27%	21%	15%	14%	9%
Număr de elevi	18	35	27	19	18	12

b) Pentru reprezentarea grafică a datelor unui tabel deschideți o foaie de lucru Excel, suprimați linia a doua a tabelului și introduceți datele rămase, în celulele foii de lucru. Selectați tabelul și faceți clic-dreapta pe Inserare și apoi pe pictograma care corespunde tipului de grafic. Obțineți imediat cele două diagrame de mai jos.



Matematică



Limba română

2.7.Probabilităţi

Observăm şi demonstrăm


banul


stema

O monedă are două feţe: *banul* şi *stema*. Dacă se aruncă moneda, apare, la revenire, ori banul ori stema.Este vorba despre o *experienţă* cu rezultat întâmplător. Repetăm experienţa. Aceasta înseamnă, de fapt, să aruncăm moneda de mai multe ori. Notăm cu n numărul de aruncări, cu n_s numărul de apariţii ale stemei şi cu f_s rezultatul calculului $\frac{n_s}{n}$. Numărul f_s este numit *frecvenţa* apariţiei stemei.

1) Efectuaţi experienţa: a) de 10 ori; b) de 20 de ori; c) de 30 de ori. Copiaţi tabelul alăturat pe caiete și înregistrați în el datele obținute.

	n	n_s	f_s
a)	10		
b)	20		
c)	30		

2) Rezultatul calculului raportului $f_s = \frac{n_s}{n}$, numit frecvenţa apariţiei stemei, sugerează o fracţie zecimală. Care credeţi că ar trebui să fie această fracţie zecimală?

Pentru a vă convinge de corectitudinea aproximării *frecvenţei apariţiei stemei*, repetaţi acasă experienţa de un număr de ori mult mai mare, să zicem de 100 de ori. Veți constată că $f_s \approx 0{,}5$.

Nu întotdeauna putem cunoaşte cea mai bună aproximare a frecvenţei unui eveniment, deoarece nu putem repeta experienţa decât de un număr finit de ori. Frecvenţa apariţiei unui eveniment sugerează o noţiune nouă, cea de *probabilitate*.

Pentru a defini probabilitatea, vom considera o *experienţă aleatoare* (de exemplu aruncarea unei monede) şi un *eveniment A* (de exemplu apariţia stemei). Vom nota cu m numărul *cazurilor favorabile* evenimentului, iar cu n vom nota numărul tuturor *cazurilor posibile* ale experienţei. De exemplu, în cazul aruncării unei monede sunt doar două cazuri posibile ale experienţei: banul sau stema. Avem un singur *caz favorabil* evenimentului A : *stema*.

Rezumăm cunoştinţele

Pentru o experienţă aleatoare, probabilitatea realizării unui eveniment A, este raportul dintre numărul *m,* al cazurilor favorabile evenimentului şi numărul *n, al* tuturor cazurilor posibile, ale experienţei: $P_A = \frac{m}{n}$.

Exemplu: Se aruncă o monedă. Care este probabilitatea apariţiei banului ?

Rezolvare:

- evenimentul A este apariţia banului;
- numărul cazurilor posibile ale experiențe este 2 (banul sau stema);
- numărul cazurilor favorabile evenimentului A este1 (banul).

Rezultă $P_A = \frac{1}{2} = 0,5$.

Aplicăm cunoștințele

1. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma punctelor de pe feţele celor două zaruri să fie 8.

2. Într-un anumit joc se aruncă simultan două monede, una de 5 bani și alta de 10 bani. Care este probabilitatea să apară stemele?

Ne verificăm

1. Notăm cu cifre numărul de puncte de pe feţele primului zar. Rezultă mulţimea $I = \{...\}$. Analog, notăm cu cifre numărul de puncte de pe feţele celui de-al doilea zar şi obţinem mulţimea $II = \{...\}$;

caz posibil: orice faţă a primului zar, cu orice faţă acelui de-al doilea zar, de exemplu (1,1) sau (1,2) sau (1,3) etc.

- toate cazurile posibile

(1,1); (1,2); .... ; (1,6);
(2,1); (2,2); .... ; <u>(2,6)</u>;
....
(6,1); (6,2); .... ; <u>(6,6)</u>;

Prin urmare, sunt 36 de cazuri posibile ale experienţei.
- numărul cazurilor favorabile ale evenimentului este 5.
- probabilitatea realizării evenimentului este $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,16 = 16\%$.

2. Pentru a afla probabilitatea, trebuie să numărăm toate cazurile posibile care se pot obține la aruncarea celor două monede. Ambele monede arată stema, eveniment pe care-l notăm (S, S) sau ambele monede arată banul, eveniment pe care-l notăm (B, B), sau primamonedă arată stema și cea de-a doua banul (S, B), sau prima monedă arată banul, iar cea de-a doua stema, eveniment care se notează cu (B, S).

Mulţimea tuturor evenimentelor posibile este: (SS; BB; S; BS), deci numărul total al cazurilor posibile este 4. Probabilitatea de realizare evenimentului (S , S) este egală cu $\frac{1}{4}$.

Altfel spus $P_{(S,S)} = \frac{1}{4}$.

prima monedă	a doua monedă	rezultate
(S)	(S)	(S , S)
(B)	(B)	(B , B)
(S)	(B)	(S , B)
(B)	(S)	(B , S)

Activități de învățare

1. În clasa a VI-a A sunt 27 elevi, dintre care, 15 sunt fete. Pentru ora de educație fizică, elevii se deplasează la sala de sport. Determinați probabilitatea ca primul elev care sosește la sala de sport să fie băiat.

2. La începutul orei, în penarul Ioanei sunt 8 creioane roșii și 4 creioane albastre. Ioana o împrumută pe Cerasela cu un creion roșu și unul albastru. După aceea, Sebastian îi cere Ioanei un creion albastru. Ioana întinde mâna spre penar și ia un creion, la întâmplare.

a) Calculați probabilitatea ca luând, la întâmplare, la începutul orei, un creion din penarul Ioanei, acesta să fie roșu.

b) Calculați probabilitatea ca Ioana să nimerească un creion albastru pentru Sebastian.

3. Într-o urnă sunt 11 bile roșii, 9 bile negre, 16 bile albe și 4 bile galbene.

a) Determinați probabilitatea ca extrăgând, la întâmplare, o bilă, să obținem:

a_1) o bilă albă; a_2) o bilă care nu este galbenă.

b) Determinați cel mai mic număr de bile pe care trebuie să le extragem din urnă, pentru a fi siguri că am obținut cel puțin o bilă neagră.

4. Într-un coș sunt 50 de mere; unele roșii, altele verzi. Aflați câte mere sunt de fiecare fel, știind că probabilitatea ca, alegând un măr din coș, acesta să fie verde este $0,4$.

5. Pe cartonașe sunt scrise numerele: $1,2,3,...,14,15$, fiecare număr o singură data, câte un număr pe fiecare cartonaș.

a) Aflați probabilitatea, ca alegând, la întâmplare, un cartonaș, pe acesta să fie scris un număr prim;

b) Se adaugă trei cartonașe suma numerelor scrise pe ele fiind 52. Aflați probabilitatea, ca alegând, la întâmplare, un cartonaș, pe acesta să fie scris un număr par.

2.8. Raportul și proporția în viaţa cotidiană

1. ***Iepuraşii lui Fibonacci, şirul lui Fibonacci şi numărul de aur***

În Pisa, în anul 1202, Fibonacci a participat la un concurs de matematică care a fost condus de însuşi împăratul Frederik al II-lea. Problema propusă concurenţilor a fost următoarea:

În ianuarie, pe o câmpie, este adusă o pereche de iepuraşi. În februarie, perechea de iepuraşi devine adultă. În martie, perechea adultă dă naştere unei perechi de pui. În aprilie, perechea adultă dă naştere la a doua pereche de pui, în timp ce prima lor pereche de pui devine adultă. În lunile următoare, fiecare pereche adultă dă naştere unei perechi de pui. Fiecare pereche de pui trebuie să aştepte o lună pentru a deveni pereche adultă, iar în luna următoare, naşte o pereche de pui. Calculaţi numărul de perechi de iepuraşi după 24 de luni.
(Se presupune că, de fiecare dată se naşte un cuplu şi că iepurii nu mor în perioada respectivă.)

Tabelul de mai jos, studiat cu atenţie, vă ajută să rezolvaţi problema.

<table>
<tr><td>Ianuarie – 1 (o pereche)</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Februarie – 1 (o pereche)</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Martie – 2 (două perechi)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aprilie – 3 (trei perechi)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Mai – a (a perechi)
Observaţi următoarele: 1) nr. a de perechi din mai = nr. b de perechi din aprilie + nr. c de perechi de pui ale adulţilor din aprilie; 2) nr. c de perechi de pui ale adulţilor din aprilie = nr. d de perechi din martie.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Iunie – x (x perechi)
Observaţi următoarele:
1) nr. x de perechi din iunie = nr. y de perechi din mai + nr. z de perechi de pui ale adulţilor din mai; 2) nr. z de perechi de pui ale adulţilor din mai = nr. t de perechi din aprilie.</td></tr>
</table>

a) Aflaţi numerele a, b, c şi d din tabelul de mai sus.

b) Aflaţi numerele x, y, z şi t din tabelul de mai sus.

c) Dacă notăm cu F_n numărul de perechi de iepuri din luna a n – a, calculaţi:

d) Observând că există o relaţie simplă între numărul de perechi din luna n şi numărul de perechi din luna $n-1$ şi cel din luna $n-2$ ($n \geq 3$): $F_3 = F_2 + F_1$; $F_4 = F_3 + F_2$; $F_5 = F_4 + F_3$;... $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, copiaţi şi completaţi primele cinci coloane ale tabelului de mai jos:

n	**Luna**		F_n	**Nr. perechi în luna n**	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	ianuarie		F_1	1	
2	februarie		F_2	1	
3	martie	$F_2 + F_1$	F_3	2	
4	aprilie	$F_3 + F_2$	F_4	3	
5	mai	$F_4 + F_3$	F_5	5	
6	iunie				
7	iulie				
8	august				
9	septembrie				
10	octombrie				
11	noiembrie				
12	decembrie				
13	ianuarie				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
22	octombrie				
23	noiembrie				
24	decembrie				

Din coloana a cincea rezultă şirul de numere naturale 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … numit *şirul lui Fibonacci*.
Şirul lui Fibonacci este un şir de numere în care fiecare, începând cu al treilea, este suma celor două dinaintea sa.

e) Să observăm următorul fapt: $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ este raportul dintre un număr din şirul lui Fibonacci şi predecesorul său. Pe baza acestei observaţii completaţi şi coloana a şasea a tabelului de mai sus. (Pentru aceste calcule utilizaţi un calculator de buzunar.)
Împărţind orice număr din şirul lui Fibonacci la termenul precedent se obţine o aproximare a unui număr, numit *numărul de aur*.
Matematicienii notează acest număr cu litera grecească φ (fi), în onoarea sculptorului grec Fidias (500–432 î.H.) care l-a utilizat la decorarea *Parthenonului din Atena*. Veţi înţelege cum anume rezolvând problema următoare.

2. ***Numărul de aur în artă*** $\boxed{\varphi = 1{,}6180339887\ldots}$

Pentru ca un întreg împărţit în părţi inegale să pară frumos, între partea cea mare şi cea mică trebuie să existe acelaşi raport ca între întreg şi partea mare.

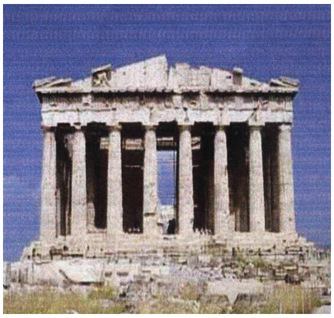
a) Copiaţi desenul de mai jos în caietul vostru, măsuraţi lungimile segmentelor, în mm şi verificaţi regula de mai sus.

AC = ? mm
CB = ? mm

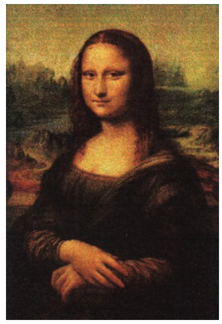
$\frac{CB}{CA} = ?$ $\quad \frac{AB}{CB} = ?$

b) Constataţi următoarele:
– câturile de mai sus sunt aproximativ egale;
– fiecare raport este aproximativ egal cu φ (numărul de aur).
Din acest motiv, despre punctul C se spune că împarte segmentul AB în **raportul de aur**.

Notă: Raportul de aur a fost folosit în pictură, mai ales în perioada Renaşterii, la sfârşitul Evului Mediu. Cea mai discutată utilizare a raportului de aur, probabil, este tabloul Mona Lisa, al lui Leonardo da Vinci.



*Parthenonul din Atena (*477–432 *î.H).*



Mona Lisa

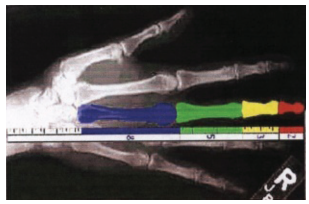
3. ***Numerele lui Fibonacci în natură***

a) La floarea-soarelui se pot observa două rânduri de spirale în sens invers. Numărul de spirale nu este acelaşi în fiecare sens. În funcție de soiul plantei, acest număr poate fi 21 şi 34 sau 34 şi 55, uneori 58 şi 89. Ce vă spun aceste perechi de numere?

b) Corpul omenesc şi numerele lui Fibonacci

– Mâna umană are 5 degete, fiecare deget având 3 falange, separate prin 2 articulații, iar media lungimilor falangelor este de 2, 3 şi respectiv 5 cm.

În continuarea lor, este un os al palmei care are, în medie, 8 cm.



– Câtul dintre distanţa de la linia surâsului (unde se unesc buzele până la vârful nasului) şi distanţa, de la vârful nasului până la baza sa, este aproximativ numărul de aur.

– Câtul dintre lungimea părţii de jos a corpului omenesc, măsurată de la ombilic până la tălpi, şi partea de sus, măsurată din creştet până la ombilic, este aproximativ numărul de aur.

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 p	**1.** Valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este $\frac{2}{7}$. Atunci valoarea raportului $\frac{x+y}{y}$ este $\frac{9}{7}$.	☐
5 p	**2.** Valoarea numărului x din proporția $\frac{3+3:3}{9}=\frac{8}{x}$ este 8.	☐
5 p	**3.** Calculând 70% din 340 kg obținem 248 kg.	☐
5 p	**4.** O lanternă costă 15 lei. După o scumpire de 20% va costa 18 lei.	☐
5 p	**5.** Distanța de 600 km pe teren este reprezentată pe o hartă cu scara 1:2 000 000 ca având 20 cm.	☐
5 p	**6.** Probabilitatea ca alegând, la întâmplare, un număr din mulțimea $\{6,7,8,...,37\}$, acesta să fie pătrat perfect este $0,125$.	☐

II. Uniţi, prin săgeţi, fiecare cifră corespunzătoare enunţurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana B.

	A	B
5 p	**1.** Dacă $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=0,6$, suma $a+b+c$ are valoarea	**a.** 10 ;
5 p	**2.** Numerele 4 și 5sunt direct proporționale cu numerele 8 și *a*. Atunci *a* este	**b.** 6 ;
5 p	**3.** Numerele 5 și 10 sunt invers proporționale cu numerele 8 și *b*. Atunci *b* este:	**c.** 13 ;
5 p	**4.** Numărul cu 35% mai mic decât 20 este:	**d.** 4 .

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 p **1.** Paul poate cumpăra cu banii pe care îi are 18 cărți, cărțile având același preț. Dacă prețul cărților se dublează, Paul poate cumpăra

A. 10 cărți; B. 6 cărți; C. 8 cărți; D. 9 cărți.

10 p **2.** Într-o cutie sunt 8 bile albe și bile roșii. Dacă probabilitatea ca alegând la întâmplare o bilă, aceasta să fie roșie este $\frac{3}{5}$, în cutie sunt

A. 10 bile roșii; B. 8 bile roșii C. 12 bile roșii; D. 6 bile roșii.

10 p **3**. O lucrare este realizată de șase muncitori în 12 ore. Patru muncitori vor realiza lucrarea în

A. 15 ore; B. 16 ore; C. 18 ore; D. 20 ore.

10 p **4**. Împărțim numărul 90 în părți invers proporționale cu numerele 2, 3 și 6. Cel mai mic dintre numere este

A. 10; B. 15; C. 20; D. 18;

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

3

Mulțimea numerelor întregi

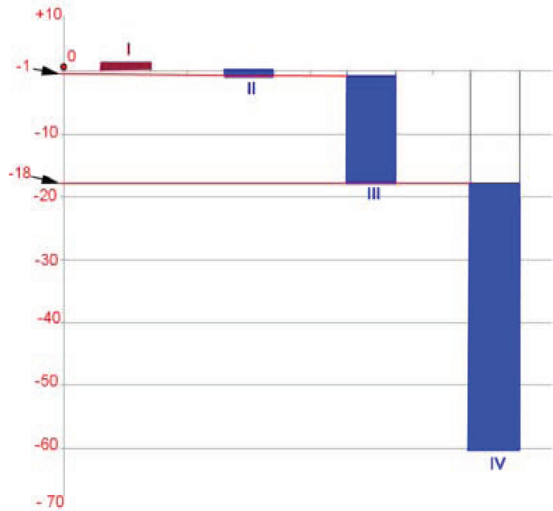
1. Mulțimea numerelor întregi. Opus. Reprezentare. Modul. Comparare și ordonare
2. Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți
3. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți
4. Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului
5. Puteri cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri
6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor
7. Ecuații. Inecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor

3.1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentare, comparare și ordonare

Observăm și demonstrăm

Există situații în realitatea înconjurătoare în care valorile unor mărimi fizice nu pot fi exprimate cu ajutorul numerelor naturale, deoarece pot exista tendințe sau sensuri opuse. Pentru a pune în evidență aceste două sensuri, se folosesc semne înaintea numerelor.

Exemplu 1: Temperatura este o mărime fizică care se măsoară cu termometrul. Unitatea de măsură pentru temperatură este gradul Celsius (C°). Afară temperatura poate fi, spre exemplu – 24°c sau + 24°C. În primul caz, se spune că vremea este foarte geroasă, iar în cazul al doilea, că vremea este călduroasă.

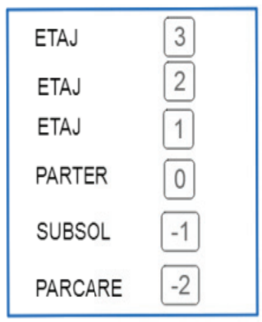


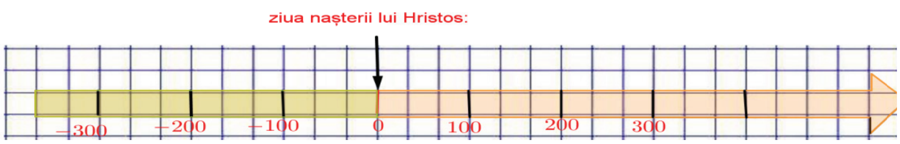
Exemplu 2: Biotopul Mării Negre este împărțit de biologi în patru etaje, notate în figura alăturată cu cifre romane. Observați că etajul I din zona de țărm este deasupra nivelului mării, etajul II începe la nivelul mării (suprafața apei) și are o adâncime de 1 m, etajul III începe la adâncimea de 1 metru și se termină la adâncimea de 18 m, iar etajul IV începe la adâncimea de 18 m și se termină la adâncimea de 60 m.
Prin urmare, un etaj poate fi deasupra nivelului mării sau sub nivelul mării

Exemplu 3: Cel mai adânc punct de pe suprafața Pământului este Groapa Marianelor, în Oceanul Pacific, având –11 022 m; cel mai înalt punct de pe suprafața Pământului este Vârful Everest, în Munții Himalaya, având +8 848 m.

Dicționar
biotopul = mediul geografic unde trăiește un grup de plante și animale în condiții omogene

Exemplu 4: Cronologia evenimentelor istorice au ca punct de plecare ziua 0 (ziua nașterii lui Hristos):
- în anul 292 î.Hr., regele dac Dromihete îl capturează pe regele trac Lisimah;
- în perioada 44 – 27 î.Hr. Deceneu era înalt preot al Daciei;
- în perioada 9 î.Hr. – 30 d.Hr. regatul Daciei a fost condus de regele Comosicus;
- în perioada 87 – 106 d.Hr. regatul Daciei a fost condus de regele Decebal.





Exemplu 5: Pentru a preciza nivelul la care urcă sau coboară un lift, pe butoanele acestuia sunt scrise numere naturale. Unele dintre ele sunt precedate de semnul „–” (minus). Astfel, pentru a urca la etajul al treilea, trebuie apăsat butonul pe care este scrie 3. Pentru a ajunge la parcarea subterană se apasă butonul pe care este scris –2. Simbolul $+$, respectiv $-$ ne indică sensul de deplasare sau reprezentare, iar numărul natural care îl însoțește indică unitățile dintre numărul 0 și numărul dorit.

Reținem

Un număr întreg se reprezintă cu ajutorul unui număr natural, precedat de simbolul „ + ” sau „ − ”. Acest număr natural este numit *modulul numărului întreg* sau *valoarea* sa *absolută*, iar semnul care îl precede se numește *semnul numărului întreg*.

Dacă a este un număr natural, atuncinumerele $+a$ și $-a$ sunt numere întregi opuse. Opusul numărului 0 este, însuși, numărul 0. De exemplu, numărul 2 este număr natural, +2 și –2 sunt numere întregi; numărul întreg +2 are semnul „+” (plus) și modulul 2, iar numărul întreg –2 are semnul „–” (minus) și modulul 2.

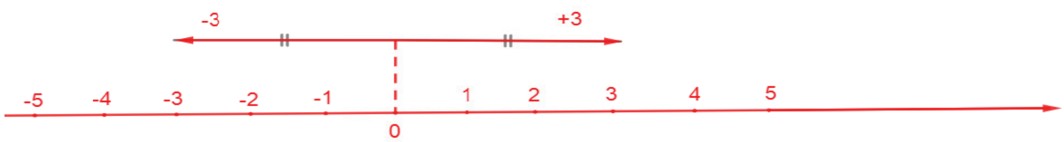
Mulțimea care conține toate numerele întregi pozitive, toate numerele întregi negative și numărul 0, se numește *mulțimea numerelor întregi* și se notează cu $\mathbb{Z}$. Vom spune că mulțimea numerelor întregi este mulțimea $\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}$.

Vom nota, $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, +4, \ldots\}$ și $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$.

– Mulțimile $\mathbb{Z}_+^*$ și $\mathbb{Z}_-^*$ sunt submulțimi ale mulțimii numerelor întregi, *numite mulțimea numerelor întregi pozitive* și *mulțimea numerelor întregi negative.*

– Au loc relațiile: $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$; $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Axa numerelor este o dreaptă pe care se fixează un punct *O,* numit *origine*, o *unitate de măsură* și un *sens pozitiv*. Pornind de la reprezentarea pe axa numerelor a numerelor naturale, despre care am învățat în clasa a V-a, vom reprezenta numerele întregi ținând cont că numerele întregi pozitive sunt numerele naturale. Pentru fiecare număr întreg pozitiv, se reprezintă opusul lui, numărul negativ, cu același modul, pe axa numerelor, la aceeași distanță față de origine, dar în sens contrar (figura).



Opusul numărului întreg nenul x se notează $-x$. De exemplu: opusul numărului $+7$ este numărul -7, iar opusul numărului -7 este numărul $+7$. Opusul numărului întreg 0 este 0.

Modului unui număr întreg a se notează $|a|$. De exemplu: dacă $x = -2$, atunci $x \in \mathbb{Z}$ și conform definiției opusului unui număr întreg, rezultă $-x = -(-2) = +2$. Observăm, de asemenea, că $|x| = |-2| = 2$, iar $|-x| = |+2| = 2$.

Din reprezentarea de mai sus, deducem ușor că modulul unui număr întreg este *distanța de la originea axei, la punctul în care se reprezintă pe axă* numărul dat și că $|-x| = |x|$, oricare ar fi numărul întreg x.

Se poate spune că:

a) modulul unui număr întreg pozitiv este numărul însuși;

b) modulul numărului 0 *este* 0*;*

c) modulul unui număr întreg negativ este opusul acelui număr.

Compararea și ordonarea numerelor întregi. Pentru orice două numere întregi a și b, are loc una și numai una din relațiile următoare: $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$. Vom vedea că relația de ordine între numere naturale „se extinde” și la numerele întregi. În consecință, modul de comparare a numerelor întregi este similar celui de la numere naturale.

Observând numerele întregi a,b,c reprezentate pe axa numerelor și „preluând” regula de la compararea numerelor naturale, deducem că au loc relațiile: $a < b$, $c > b$ și evident, $a < b < c$.

În cele două tabele de mai jos, sunt prezentate temperaturile înregistrate în principalele capitale europene în data de $\overline{xy}.02.2000$, ora $7{,}00$ GMT

Londra	Paris	Berlin	Roma	Madrid	Moscova	Oslo	Viena
$-2^\circ C$	$1^\circ C$	$0^\circ C$	$3^\circ C$	$5^\circ C$	$-8^\circ C$	$-4^\circ C$	$-2^\circ C$

și apoi un studiu comparativ al acestora:

Moscova-Viena	Londra-Berlin	Moscova-Madrid	Paris-Oslo	Roma-Oslo	Londra-Viena
$-8 < -2$	$-2 < 0$	$-8 < +5$	$1 > -4$	$3 > -4$	$-2 = -2$

Pentru a ordona numerele întregi, folosim relația „$\leq$” (mai mic sau egal) sau relația „$\geq$” (mai mare sau egal).

Prin notația $a \leq b$ se înțelege $a < b$ *sau* $a = b$. Astfel, $-3 \leq 0$ deoarece $-3 < 0$ iar $-4 \leq -4$ deoarece $-4 = -4$. Prin notația $a \geq b$ se înțelege $a > b$ *sau* $a = b$. Astfel, $+1 \geq -7$ deoarece $-1 > 7$ iar $-3 \geq -3$ deoarece $-3 = -3$.

Relația de ordine (mai mic sau egal), are următoarele proprietăți:

1) oricare ar fi numărul întreg a; $a \leq a$, (*reflexivitate);*

2) dacă $a,b,c \in \mathbb{Z}$, respectiv $(a \leq b$ și $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$; (*tranzitivitate*);

3) dacă $a,b,c \in \mathbb{Z}$, respectiv $(a \leq b$ și $b \leq a) \Rightarrow a = b$. (*antisimetrie*).

Dacă știm să comparăm numere naturale, adică numere întregi pozitive, ne punem problema comparării numerelor întregi, când acestea sunt ambele negative sau sunt de semne contrare. Poziționarea pe axă, a numerelor întregi, ne permite următorul set de reguli:

R.1. Orice număr întreg negativ este mai mic decât orice număr întreg pozitiv.

R.2. Orice număr întreg negativ este mai mic decât numărul întreg 0.

R.3. Dintre două numere întregi negative diferite, este mai mic numărul care are modulul mai mare.

Aplicăm cunoștințele

1. a) Completați tabelul:
b) Care este singurul număr întreg care nu are semn?

Număr întreg	$+1$	-15	$+3$	$+34$	-19	-32	$+7$	-8
Semnul	$+$	$-$						
Modulul	1	15						

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{-4,(3);\ 1\frac{1}{2};\ -4;\ +0,7;\ +7;\ -2\right\}$. Scrieți elementele mulțimii M care sunt numere întregi.

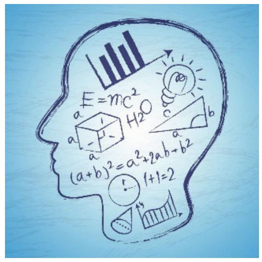
3. Completați tabelul:

Numărul întreg	$+7$	0	-5	$+18$	-12	$+15$	-5
Opusul său	-7						
Are loc egalitatea	$-(-7) = +7$						

a) Dacă a este un număr întreg, cum se notează opusul lui a? Dar modulul lui a?

b) Completați tabelul și verificați egalitatea $|a| = |-a|$, cu ajutorul valorilor din tabel.

a	-1	$+3$	$+7$	-52	-14	$+37$
$-a$	$+1$					
$\|a\|$	1					
$\|-a\|$	1					



5. a) Dați cinci exemple de numere întregi mai mici ca zero.

b) Scrieți elementele mulțimii $M = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ şi } a < 0\}$.

c) Dați cinci exemple de numere întregi mai mari ca zero.

d) Scrieți elementele mulțimii $N = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ şi } a > 0\}$.

6. Se consideră șirul de numere întregi: –5, +7, –4, +1, +3, –8, 0, –32.

a) ordonați crescător numerele întregi din șir;

b) ordonați descrescător numerele întregi din șir.

7. Aflați numărul întreg x știind că $x \leq -7$ şi $x \geq -7$.

8. Ordonați crescător numerele întregi: $-3, a, c$ știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = x \text{ şi } x < 4\}$

Ne verificăm

1. a)

Număr întreg	+1	–15	+3	+34	–19	–32	+7	–8
Semnul	+	–	–	+	–	–	+	–
Modulul	1	15	3	34	19	32	7	8

b) Numărul întreg *0* nu are semn.

2. Elementele mulțimii M, numere întregi, sunt: $-4;\ +7 \text{ şi } -2$.

3.

Număr întreg	+7	0	–5	+18	–12	+15
Opusul	–7	0	+5	–18	+12	–15
Are loc egalitatea	$-(-7) = +7$	$-0 = +0$	$-(-5) = +5$	$-(+18) = -18$	$-(-12) = +12$	$-(-15) = +15$

4. a) Opusul numărului întreg a se notează cu $-a$. Modul numărului întreg a se notează cu $|a|$.

a	-1	$+3$	$+7$	-5	-14	$+37$
$-a$	$+1$	-3	-7	$+5$	$+14$	-37
$\|a\|$	1	3	7	5	14	37
$\|-a\|$	1	3	7	5	14	37

b) Egalitatea $|a| = |-a|$ este adevărată oricare ar fi numărul întreg a.

5. a) –7; –5; –3; –2; –1, b) $M = \mathbb{Z}_-$, c) 2; 4; 6; 13; 95, d) $N = \mathbb{Z}_+$.

6. a) $-32 < -8 < -5 < -4 < 0 < +1 < +3 < +7$, b) $+7 > +3 > +1 > 0 > -4 > -5 > -8 > -32$.

7. Din $x \leq -7$ şi $x \geq -7$ rezultă $x = -7$ (proprietatea de antisimetrie a relației $\leq$).

8. Din $a < -3$ şi $c > -3$ rezultă $a < -3 < c$.

Activități de învățare

1. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

a) $-7\in\mathbb{Z}$; ☐ b) $+7\in\mathbb{N}$; ☐ c) $-3\notin\mathbb{N}$; ☐ d) $3\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; ☐

e) $\frac{28}{7}\in\mathbb{Z}$; ☐ f) $\left(\frac{5}{3}\right)^0\notin\mathbb{Z}$; ☐ g) $\frac{9}{9}\notin\mathbb{Z}$; ☐ h) $\frac{3}{8}\notin\mathbb{Z}$. ☐

2. Știind că $A=\left\{-1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ -4;\ 5^2;\ -101;\ 0\right\}$, determinați mulțimile:

a) $B=\{x\mid x\in A$ și x este număr întreg pozitiv$\}$;

b) $C=\{y\mid y\in A$ și y este număr întreg negativ$\}$.

3. Completați spațiile libere din tabelul următor:

a	6	–8		0	+37	
$-a$			2			–403

4. Se consideră mulțimea $A=\left\{0;4;\frac{1}{3};-5;0,(4);-2;\frac{8}{4}\right\}$. Determinați mulțimile:

a) $A\cap\mathbb{N}$; b) $A\cap\mathbb{Z}$; c) $A\cap\mathbb{Z}_-$; d) $A\setminus\mathbb{Z}$.

5. Pe axa numerelor, cu originea $O(0)$, folosind unitatea de măsură 1 cm,

a) reprezentați punctele corespunzătoare numerelor: $-1;\ 2;\ 0;\ -4;\ 5;\ -3$.

b) reprezentați punctele: $O(0)$, $A(-2)$, $B(3)$, $C(4)$, $D(-5)$, $E(-4)$, $F(2)$.

c) comparați distanțele: OA și OF, respectiv OC și OE. Explicați rezultatul obținut.

6. Completați spațiile libere din tabelul următor:

a	2		–11			–(–4)
$-a$		6		–25		
$\|a\|$					0	
$\|-a\|$						

7. Determinați numerele întregi x, în fiecare din situațiile:

a) $-x=5$; b) $|x|=39$; c) $|x|=-x$; d) $\{-2;\ x;\ 0;\ 1\}=\{1;\ 0;\ -1;\ -2\}$.

8. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

a) $\{-3;\ +2;\ 0;\ 1\}\subset\mathbb{Z}$; ☐

b) $|x|=x$, oricare ar fi numărul întreg x; ☐

c) $\{-2;\ 0;\ 2\}\subset\mathbb{N}$; ☐

d) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...,99;\ 100\}\subset\mathbb{Z}$; ☐

e) $|-x|=|x|$, oricare ar fi numărul întreg x. ☐

f) Există numere întregi x astfel încât $|2^2-x|=0$. ☐

9. Pe axa numerelor, cu originea $O(0)$, folosind unitatea de măsură 1 cm, reprezentați punctele $A(x)$ și $B(-x)$, $x\in\mathbb{N}^*$. Aflați numărul x în fiecare din situațiile:

a) $AB+3\cdot OB=15$ cm; b) $2\cdot OA+5\cdot OB=21$ cm.

10. Se consideră mulțimea $M=\{-9;+7;-6;2;0;3;-13;-(-2)\}$. Aflați mulțimile:

a) $A=\{x\in M \mid |x|=x\}$; b) $B=\{x\in M \mid |x|=-x\}$; c) $A=\{x\in M \mid |x|+|-x|=0\}$.

11. Completați spațiile libere cu numere din mulțimea $A=\{-2;3;-5;5\}$, astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) $-2>.....$; b) $.....>3$; c) $-4>....$; d) $4<....$

12. Scrieți pe caiet următoarele perechi de numere și subliniați numărul mai mic:

-673 și -679; -43 și -34; 0 și -2018; -25 și -19.

13. Scrieți pe caiet următoarele perechi de numere și subliniați numărul mai mare:

a) -3 și 1; b) 0 și -7; c) -2 și -50; d) 10 și 11.

14. Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $<$, $=$, $>$, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $-7 \ldots -3$; b) $0 \ldots |-2|$; c) $-4^2 \ldots -5^2$; d) $-144 \ldots -12^2$;

e) $+3 \ldots -3$; f) $|-5| \ldots 5$; g) $-104 \ldots -401$; h) $-2^3 \ldots -8$;

i) $15 \ldots -19$ j) $-8 \ldots 0$ k) $x\in\mathbb{N}$ și $x \ldots -3$; l) $x\in\mathbb{N}$ și $-x \ldots 2$.

15. Completați spațiile libere cu valorile corespunzătoare, pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă numerele $-4;\ x;\ -1;\ 0;\ y;\ 2$ sunt ordonate crescător, atunci:

$x\in\{..................\}$ și $y\in\{...............\}$.

b) Dacă numerele $2;\ 0;\ -1;\ z;\ t;\ -4;\ -10$ sunt ordonate descrescător, atunci: $z=.......$ și $t=........$.

16. La ora 12, în fiecare zi a unei săptămâni din luna ianuarie, au fost înregistrate următoarele temperaturi:

ziua	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
temperatura	–7°C	–4°C	–10°C	–9°C	–8°C	–7°C	–4°C

a) Precizați ziua în care s-a înregistrat cea mai mare temperatură.
b) Precizați ziua în care s-a înregistrat cea mai mică temperatură.

17. Aflați cifra x, pentru fiecare din situațiile:

a) $-41<-\overline{4x}$; b) $-\overline{x9}>-28$; c) $102>-\overline{12x}$; d) $-16<-\overline{1x}$; e) $|-73|=\overline{x3}$.

18. Determinați toate valorile posibile ale numerelor x și y astfel încât:

a) $|x|=4$; $y=2$ și $x>y$; b) $|x|=3$; $|y|=2$ și $x<y$;

c) $x=-3$; $|y|=4$ și $x<y$; d) $|x|=4$; $y=2$ și $x>y$.

19. Scrieți mulțimile A și B, enumerând elementele acestora, știind că:

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|=x \text{ si } x<4\}$; $B=\{x\in\mathbb{Z}_- \mid |x|=8\}$.

20. Scrieți:

a) 5 numere întregi consecutive, cel mai mic dintre ele fiind -2;
b) 7 numere întregi consecutive, cel mai mare dintre ele fiind 1;
c) 10 numere întregi consecutive dintre care, exact patru sunt nenegative;
d) cel mai mic număr întreg, de forma $-\overline{abcd}$, unde a, b, c și d sunt cifre distincte, având suma egală cu 11.

21. Pe axa numerelor, cu originea $O(0)$, se consideră punctele $A(-73)$ și $B(37)$. Determinați numărul punctelor care au coordonatele numere întregi și se pot reprezenta pe axă între punctele A și B.

22. Pe axa numerelor, cu originea $O(0)$, se consideră punctele $C(-20)$ și $D(x)$. Știind că, între C și D pot fi reprezentate pe axă 44 de puncte care au coordonatele numere întregi, determinați valoarea minimă a numărului întreg x.

3.2. Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți

Observăm și demonstrăm

1. Pentru adunarea și scăderea numerelor întregi, o importanță deosebită o are diferența dintre semnul numărului și semnul operației. Pentru a fi evitate confuziile, scriem numerele întregi între paranteze.

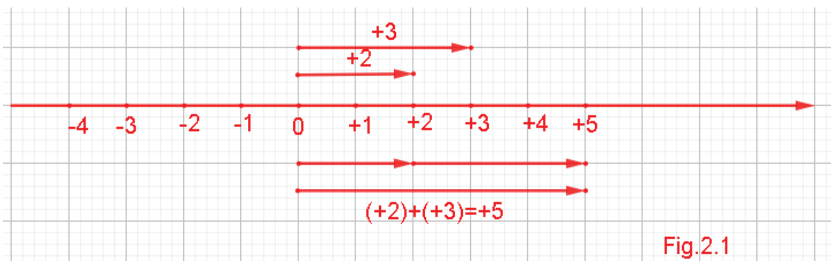
semnul operațiilor

(+3) + (–1) – (+3)

semnul numerelor

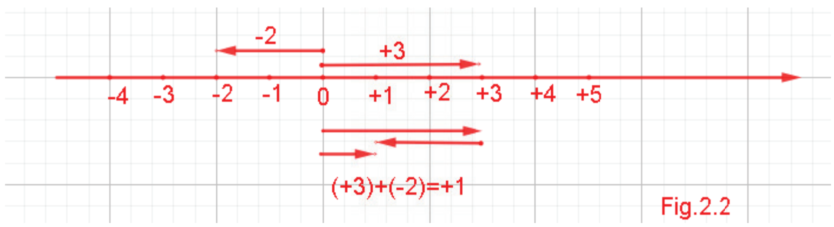
Fig. 1.

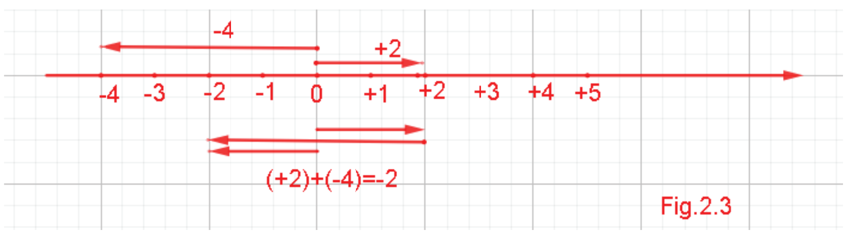
2. *Adunarea numerelor întregi* se bazează pe reprezentarea acestora pe axa numerelor și pe adunarea numerelor naturale. În figura 2 este reprezentată grafic adunarea numerelor întregi, cu ajutorul unor segmente care indică sensul pe axa numerelor. Pentru a înțelege adunarea numerelor întregi, analizați atent figura 2.



Observați următoarele:

1) *Dacă termenii sumei au același semn, suma va avea semnul lor comun.* Modulul sumei va fi egal cu suma modulelor termenilor (figura 2.1). Exemple: (+4)+(+5) = +9;(– 4) + (– 5)= – 9





2) *Dacă termenii sumei au semne diferite*, suma va avea semnul termenului cu modulul cel mai mare. Modul sumei va fi diferența dintre modulul cel mai mare și modulul cel mai mic al termenilor sumei (figura 2.2 și figura 2.3). Exemple: a) (+4)+(– 3) = ?; b) (+3)+(– 7) = ?.

Rezolvare: a) se calculează modulul termenilor sumei, $|+4| = 4$ și $|-3| = 3$; se stabilește semnul sumei, „+” deoarece $|+4| > |-3|$; se calculează modulul sumei: 4 – 3 = 1. Rezultă $(+4)+(-3) = +1$.

b) se calculează modulul termenilor sumei, $|+3| = 3$ și $|-7| = 7$; se stabilește semnul sumei: „+” deoarece $|-7| > |+3|$; se calculează modulul sumei, 7 – 3 = 4. Rezultă $(+3)+(-7) = -4$.

3. *Scăderea numerelor întregi* se bazează pe faptul că într-o sumă, orice termen al sumei este pus în evidență prin operația de scădere.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l}(+3)-(-7)=x \Leftrightarrow (+3)=x+(-7) \\ \textit{Se observă că:} \quad (+3)=(+10)+(-7)\end{array}\right\}$ *rezultă* $x=+10$, *deci* $(+3)-(-7)=+10$

Din: $(+3)-(-7)=+10$ și $(+3)+(+7)=+10$ rezultă *„scăderea unui număr întreg este reprezintă adunarea cu opusul acelui număr întreg”*. Exemple: $(-7)-(-9)=(-7)+(+9)=+2$; $(+13)-(+15)=(+13)+(-15)=-2$.

Reținem

a) în mulțimea $\mathbb{N}$	b) în mulțimea $\mathbb{Z}$
$5+2=7$	$(+5)+(+2)=+7$
$3<4$	$+3<+4$
$3+2<4+2$	$(+3)+(+2)<(+4)+(+2)$
$0+4$	$0+(+4)=+4$

Operațiile cu numere întregi pozitive se fac în același mod ca și operațiile cu numere naturale. De asemenea, compararea numerelor întregi se face în același mod cu compararea numerelor naturale.

Aceasta ne permite să admitem că numărul natural n este același cu numărul întreg $+n$ și invers, deci: $n=+n$ și $+n=n$. Exemple: $+2=2$; $+7=7$; $+210=210$.

În felul acesta: $\mathbb{Z}_+^*=\{+1,+2,+3,...\}=\{1,2,3,...\}=\mathbb{N}^*$;

Cum $\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z}_+\supset\mathbb{N}$ rezultă $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, adică mulțimea numerelor naturale este o parte, o submulțime a mulțimii numerelor întregi. Prin urmare, în cazul numerelor întregi pozitive se poate renunța la semnul lor, deci se înlocuiesc cu numere naturale.

4. Justificăm următoarelor egalități (unde n este un număr natural):

1) $+n=n$ numărul natural n este același cu numărul întreg $+n$;

2) $-(+n)=-n$ opusul numărului întreg $+n$ este numărul întreg $-n$;

3) $-(-n)=+n$ opusul numărului întreg $-n$ este numărul întreg $+n$;

4) $0+(+n)=+n$ 0 este element neutru pentru adunarea numerelor întregi pozitive;

5) $0+(-n)=-n$ 0 este element neutru pentru adunarea numerelor întregi negative;

6) $+(+n)=+n$ convenție de rescriere pentru 4);

7) $+(-n)=-n$ convenție de rescriere pentru 5).

Egalitățile 3), 4), 6) și 7) conduc la următoarea regulă: *„minus” în fața unei paranteze schimbă semnul; „plus” în fața unei paranteze nu schimbă semnul*. Exemplu: Suma algebrică $(-1)-(-3)-(+7)+(+1)-(+2)+(-10)$ se scrie într–o formă mai simplă astfel: $-1+3-7+1-2-10$

Proprietatea 1) și regula enunțată contribuie la simplificarea scrierii numerelor întregi.

Exemple:

Scriere	*Scriere simplificată*
$(+3)+(+4)=+7$	$3+4=7$
$(+5)+(-3)=+2$	$5-3=2$ [*deoarece* $+(-3)=-3$]
$(-6)+(+9)=+3$	$-6+9=3$ [*deoarece* $+(+9)=+9=9$]
$(+2)-(+3)=-1$	$2-3=-1$ [*deoarece* $-(+3)=-3$]

$(-3)-(+8)=-11$ | $-3-8=-11$ [*deoarece* $-(+8)=-8$]
$(+7)-(-2)=+9$ | $7+2=9$ [*deoarece* $-(-2)=+2=2$]
$(-2)-(-3)=+1$ | $-2+3=1$ [*deoarece* $-(-3)=+3=3$]

• *Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, **suma a două numere întregi** este:*
- suma modulelor celor două numere întregi, precedată de semnul „+”, dacă cele două numere întregi sunt pozitive;
- suma modulelor celor două numere întregi, precedată de semnul „–”, dacă cele două numere întregi sunt negative;
- diferența modulelor celor două numere întregi precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă cele două numere întregi sunt de semne diferite și module diferite;
- numărul întreg 0, dacă cele două numere întregi sunt de semne diferite și module egale.
• *Adunarea numerelor întregi este operația prin care se obține suma a două numere întregi.*
• *Diferența dintre un număr întreg a și un număr întreg b este suma numărului întreg a cu opusul numărului întreg b.*
• *Scăderea numerelor întregi este operația prin care se obține diferența a două numere întregi.*
***Proprietățile adunării numerelor întregi.** Oricare ar fi numerele întregi a, b și c:*
1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (asociativitatea adunării);
2) $0 + a = a + 0 = a$ (numărul întreg 0 este element neutru la adunare);
3) $a +(-a) = (-a)+a = 0$ (a are un opus, notat cu –a, iar suma dintre un număr și opusul său e 0);
4) $a+b = b+a$ (comutativitatea adunării);
5) $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ (proprietatea de monotonie).
***Sume algebrice**. Deoarece în mulțimea numerelor întregi, orice scădere poate fi înlocuită cu o adunare, vom spune că o sumă sau o diferență a două numere întregi este o sumă algebrică.*
Orice număr întreg dintr–o sumă algebrică poate fi la rândul lui o sumă algebrică.
Dacă avem de calculat o sumă algebrică, este indicată următoarea ordine a operațiilor:
- transformarea scăderilor în adunări;
- gruparea numerelor cu același semn;
- stabilirea rezultatului final.
Dacă n este un număr natural, atunci numărul întreg $+n$ se identifică cu n, $(+n = n)$.
• *Mulțimea numerelor naturale este inclusă în mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.*
• *Reguli de simplificare a scrierii numerelor întregi precum și a scrierii sumelor algebrice*
- „minus” în fața unei paranteze schimbă semnul termenilor;
- „plus” în fața unei paranteze nu schimbă semnul termenilor.

Aplicăm cunoștințele

1. Să se efectueze:
a) (+2)+(+7); (–3)+(–4); (+7)+(–3); (–2)+(+9); (–3)+(+3);
(+5)+(–5); 0+(+2); (+3)+0; 0+(–2); (–4)+0.
b) (+2)–(+7); (–3)–(–4); (+7)–(–3); (–2)–(+9); (–3)–(+3);
(+5)–(–5); 0–(+2); (+3)–0; 0–(–2); (–4)–0.

2. Să se calculeze: (–3) + (+2) – (–7) + (–15) – (+3) – (+9).

3. Se consideră suma algebrică: $S=(-3)+(-9)-(-3)-(+8)-(-4)$

a) Scrieți S sub forma cea mai simplă; b) Calculați $S, -S, |S|$ *și* $|-S|$.

4. Se consideră numărul întreg: $a=-3+2-7+8+5-13$.

a) Arătați că $a=-8$. Care este opusul numărului întreg a?

b) Deduceți că: $-(-3+2-7+8+5-13)=3-2+7-8-5+13$

Ne verificăm

1. a) (+2) + (+7) = +9; (–3) + (–4) = –7; (+7) + (–3) = +4; (–2) + (+9) = +7; (–3) + (+3) = 0; 0 + (+2) = +2; (+3) + 0 = +3; 0 + (–2) = –2; (–4) + 0 = –4; (+5) + (–5) = 0; b) (+2) – (+7) = (+2) + (–7) = –5; (–3) – (–4) = (–3) + (+4) = +1; (+7) – (–3) = (+7) + (+3) = +10; (–2) – (+9) = (–2) + (–9) = –11; (–3) – (+3) = (–3) + (–3) = –6; (+5) – (–5) = (+5) + (+5) = +10; 0 – (+2) = 0 + (–2) = –2; (+3) – 0 = + 3; 0 – (–2) = 0 + (+2) = +2; (–4) – 0 = –4;

2. (–3) + (+2) – (–7) + (–15) – (+3) – (+9) = (–3) + (+2) + (+7) + (–15) + (–3) + (–9) = (+2) + (+7) + (–3) + (–15) + (–3) + (–9) = (+9) + (–30) = –21.

3. a) $S=-3-9+3-8+4$; b) $S=3+4-3-9-8=7-(3+9+8)=7-20=-13$.

Rezultă: $S=-13; -S=+13=13; |S|=13$ *și* $|-S|=13$

4. a) $a=+2+8+5-3-7-13=(2+8+5)-(3+7+13)=15-23=-8$. Opusul lui $a=-8$ este $-a=8$.

Conform enunțului $-3+2-7+8+5-13=a$, deci $-(-3+2-7+8+5-13)=-a$. Cum $-a=8$, rezultă egalitatea $-(-3+2-7+8+5-13)=8$ (1).

Pe de altă parte $3-2+7-8-5+13=3+7+13-2-8-5=23-(2+8+5)=23-15=8$, deci:

$3-2+7-8-5+13=8$ (2). Din (1) și (2) rezultă: $-(-3+2-7+8+5-13)=3-2+7-15+13$.

Activități de învățare

1. Completați spațiile libere cu numărul întreg, corespunzător fiecărei sume:

a) $-13+(-10)=$........ ; b) $-20+(-20)+(-20)=$........ ;

c) $+101+(+301)=$..... ; d) $+17+(+40)+(+13)=$........ ;

e) $+16+(-30)=$........ ; f) $-8+(+18)=$........................ .

2. Uniți, prin săgeți, fiecare literă corespunzătoare sumelor din prima coloană, cu răspunsulcorect, aflat în coloana din dreapta.

$-10+(+12)$;	0;
$+17+(-21)$;	$+2$;
$-10+(-12)$;	-22;
$+17+(+21)$;	-4;
$(-1)+(-2)+(+3)$.	$+38$.

3. Calculați în două moduri sumele, folosind modelul următor:

$$-1+(+2)+(-3)+(+4)=\underbrace{+1+(-3)}+(+4)=-2+(+4)=+2 \text{ sau}$$

$$-1+(+2)+(-3)+(+4)=\underbrace{-1+(-3)}+\underbrace{(+2)+(+4)}=(-4)+(+6)=+2.$$

a) $(-4)+(+6)+(-8)+(+3)$; b) $(+5)+(-7)+(+10)+(-6)$;

c) $(-2)+(-22)+(+30)+(-9)$; d) $(+13)+(+77)+(-40)+(-60)$.

4. Scrieți numărul –10 ca sumă de numere întregi, astfel încât termenii să fie:
a) două numere întregi negative;
b) două numere întregi cu semne contrare;
c) cel mai mare număr de numere întregi negative distincte.

5. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
a) Suma dintre un număr întreg și opusul său este................;
b) Suma a două numere întregi pozitive este un număr.................;
c) Suma a două numere întregi negative este un număr.................;
d) Suma a două numere întregi cu semne contrare poate fi un număr.................sau..................... .

6. Știind că a și b sunt două numere întregi pentru care $|a+2|+|b-3|=0$, calculați $a+b$.

7. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{Z}_- \mid -13<x<9\}$ și $B=\{x\in\mathbb{Z}^* \mid -7\le x<12\}$. Notăm cu s_A suma elementelor mulțimii A și cu s_B suma elementelor mulțimii B.
a) Scrieți mulțimile A și B, enumerându-le elementele.
b) Calculați numerele întregi s_A și s_B.
c) Determinați numărul elementelor mulțimii $C=\{x\in\mathbb{Z}_- \mid x\in A \text{ si } x\in B\}$.

8. Calculați, folosind eventual proprietățile adunării, sumele S_1, S_2:
a) $S_1=-1+2-3+4-5+6-...-15+16-17+18$;
b) $S_2=-1-2+3+4-5-6+7...-14+15+16-17-18$;

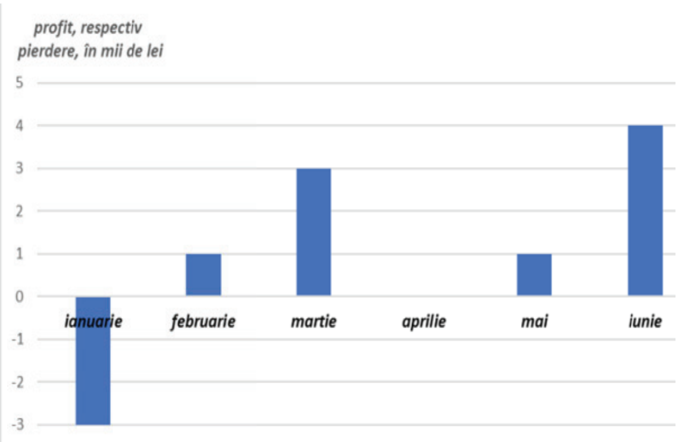
9. Numerele întregi $-5,\ -3,\ a,\ 2$ sunt ordonate crescător.
a) Determinați valorile posibile ale numărului a.
b) Pentru fiecare valoare obținută la subpunctul a), calculați suma numerelor date.

10. Numerele întregi $-1,\ a,\ -4,\ b,\ -7$ sunt ordonate descrescător.
c) Determinați valorile posibile ale numerelor a și b.
d) Pentru fiecare dintre perechile de valori $(a,\ b)$, obținute la subpunctul a), calculați suma numerelor date.

11. Suma numerelor de pe fiecare linie din tabelul următor este 0. Determinați numerele a, b, c.

–3	+8	–4	+9	–5	a
+10	–13	–5	–2	b	+1
c	–1	–6	+13	–7	–5

12. Situația financiară a unei societăți comerciale, în primele șase luni ale anului trecut, este redată în diagrama alăturată.
Suma de bani câștigată, respectiv datorată, la sfârșitul lunii este exprimată în mii de lei. Stabiliți profitul acestei societăți comerciale (suma de bani pe care o câștigă societatea) în prima jumătate a anului.



13. Completați spațiile libere cu numărul întreg, corespunzător fiecărei diferențe:

a) $-9-(+2)=........;$ b) $+4-(+8)=........;$

c) $-8-(-5)=........;$ d) $+10-(-9)=........;$

e) $+3-(-7)=........;$ f) $-17-(-20)=........;$

g) $0-(-4)=........;$ h) $0-(+9)=........;$

i) $+3-0=........;$ j) $(-7)+0=........ .$

14. Într-o zi de iarnă, la ora 18^{00}, termometrul indica –4°C. Până la ora 6^{00} a zilei următoare, temperatura a scăzut cu 8°C.

a) Aflați temperatura înregistrată de termometru a doua zi, la ora 6^{00}.

b) Aflați cu câte grade ar fi crescut temperatura dacă a doua zi, la aceeași oră, s-ar fi înregistrat +1°C.

15. Calculați și comparați numerele $a=x-(y+z)$ și $b=x-y-z$, pentru fiecare din tripletele următoare:

a) $x=+5,\ y=-7,\ z=-2;$ b) $x=-10,\ y=-10,\ z=-10;$

c) $x=-15,\ y=+6,\ z=-21;$ d) $x=+5,\ y=-5,\ z=-7.$

16. Calculați și comparați numerele $a=x-(y-z)$ și $b=x-y+z$, pentru fiecare din tripletele următoare:

a) $x=+5,\ y=-7,\ z=-2;$ b) $x=-10,\ y=-10,\ z=-10;$

c) $x=-15,\ y=+6,\ z=-21;$ d) $x=+5,\ y=-5,\ z=-7.$

17. Suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană din tabelul alăturat este aceeași.

−8	+3	−2
+5	b	c
a	−10	d

a) Determinați numerele a, b, c și d.

b) Calculați suma $a+b+c+d$ și sumele care au ca termeni cele trei numere aflate pe fiecare diagonală a tabelului.

18. Scrieți numărul –6 ca diferență de numere întregi, astfel încât termenii să fie:

a) două numere întregi negative;

b) două numere întregi pozitive;

c) două numere întregi cu semne contrare.

19. Angajații unei stații meteo măsoară temperatura aerului la interval de două ore. Valorile și evoluția temperaturii, într-o zi de iarnă, sunt înregistrate în tabelul alăturat. Completați spațiile libere, în acord cu cele deja completate.

Ora măsurarii	Temperatura înregistrată	Evoluția temperaturii
8^{00}	–6°C	
10^{00}		rămâne constantă
12^{00}		crește cu $1^{\circ}C$
14^{00}		crește cu $3^{\circ}C$
16^{00}		crește cu $1^{\circ}C$
18^{00}		scade cu $2^{\circ}C$
20^{00}		scade cu $2^{\circ}C$
22^{00}	–6°C	

20. Efectuați calculele:

a) $29-(-76)-(+108)$;　b) $-7-(-77)+(-707)$;
c) $-58-(-136)-(+49)$;　d) $+905-(-590)+(-509)-(+950)$;
e) $100-(-100)+(-200)-(-300)$;　f) $-100+(-200)-(-300)$.

21. Completați spațiile libere cu un număr întreg astfel încât să aibă loc egalitățile:

a) $-4+.....=-12$;	b) $-63-.....=-80$;	c) $.....-(-23)=32$;
d) $.....+(+13)=+5$;	e) $.....-(-100)=-100$;	f) $-4-.....=0$;

22. Calculați eliminând parantezele:

a) $15+(-20)-(-16)$;　b) $-(-8+4)-(-9+16)+(-7-10)$;
c) $-24-(-50)+(-10)$;　d) $x+(-8-x)-(-10+7)$;
e) $[-10+(-2+5-11)-(-9)]+(-13)$;　f) $-1+\{-2+[-3-(-4+5-6)]\}-7$.

23. Calculați diferența numerelor $a=-7-77-777$ și $b=3+33+333$.

3.3. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți

Rezolvăm și descoperim

1. Am văzut că adunarea și scăderea numerelor întregi se bazează pe adunarea și scăderea numerelor naturale. La fel, înmulțirea și împărțirea numerelor întregi se bazează pe înmulțirea și împărțirea numerelor naturale. Calculăm: a) (+3) · (+5); b)(+3) · (– 5); c) (–3) · (+5); d) (–3) · (–5).

Rezolvare:

a) $\underset{\overset{\downarrow}{3}}{(+3)}+\underset{\overset{\downarrow}{5}}{(+5)}$	numerele întregi +3 și +5 se identifică cu numerele naturale 3 și 5; altfel spus +3 = 3 și +5 = 5
3 · 5 = 15	produsul efectuat în mulțimea numerelor naturale
15 = +15	numărul natural 15 se identifică cu n umărul întreg +15; altfel spus 15 = +15
Prin urmare: (+3) · (+5) = 3 · 5 = 15 = + 15. Rezultă: (+3) · (+5) = +15	
b) $\underset{\overset{\downarrow}{3}}{(+3)}+\underset{\overset{\downarrow}{-5}}{(-5)}$	numărul întreg +3 se identifică cu numărul natural 3, altfel spus +3 = 3
3·(–5) = (–5) + (–5)+ (–5)	înmulțirea este o adunare repetată
(–5) + (–5) + (–5) = –15	adunarea numerelor întregi;
Rezultă: (+3) · (–5) = – 15	

c) (–5) · (+3) = ? În mulțimea numerelor naturale, înmulțirea este comutativă. Proprietatea se păstrează și în mulțimea numerelor întregi. Atunci: (–5) · (+3) = (+3) · (–5) = –15.
d) Rezultă: (–5) · (+3) = – 15
e) (–3) · (–5) = ? Pentru a găsi rezultatul acestei înmulțiri, comparăm cele trei înmulțiri de mai sus. Observăm că la schimbarea semnului unui factor, se schimbă și semnul produsului.
f) Rezultă: (–3) · (–5) = + 15

Prin urmare:

Observăm că, dacă două numere întregi au același semn, produsul lor este pozitiv, iar dacă au semne contrare, produsul lor este negativ. În toate cazurile, modulul produsului este egal cu produsul modulului celor două numere întregi.

Rezumăm cunoștințele

• *Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, se definește operația de înmulțire a numerelor întregi. Produsul a două numere întregi nenule este un număr întreg care este egal cu:*

✓ *produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul +, dacă cele două numere întregi au același semn;*

✓ *produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul –, dacă cele două numere întregi au semne diferite;*

✓ *produsul oricărui număr întreg cu 0 și produsul lui 0 cu orice număr întreg este egal cu 0.*

• *Înmulțirea numerelor întregi este operația prin care se obține produsul a două numere întregi.*

• *Înmulțirea numerelor are următoarele proprietăți: este asociativă, numărul întreg +1 = 1 este element neutru la înmuțire, este comutativă, este distributivă față de adunarea și scăderea numerelor întregi.*

• ***Proprietățile înmulțirii.** Dacă a, b și c sunt numere întregi, aceste proprietăți se reformulează astfel:*

1) $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ (asociativitate);

2) $1\cdot a = a\cdot 1$ (numărul 1 este element neutru la înmulțire);

3) $a\cdot b = b\cdot a$ (comutativitate);

4) $a\cdot(b+c) = a\cdot b+b\cdot c$; $a\cdot(b–c) = a\cdot b–b\cdot c$ (distributivitate față de adunare și scădere).

Comentariu:

1) $a < b \,|\, \cdot c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (prin înmulțirea unei inegalități cu un număr pozitiv se păstrează semnul inegalității);

2) $a < b \,|\, \cdot c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ (prin înmulțirea unei inegalități cu un număr negativ, semnul inegalității se schimbă).

Aplicăm cunoștințele

1. Completați tabelul de mai jos:

a	b	c	$a\cdot b$	$b\cdot a$	$(a\cdot b)\cdot c$	$a\cdot(b\cdot c)$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b+a\cdot c$
+2	+3	+4	+6	+6	+24	+24	+14	+14
–3	+6	–5						
–3	–4	+2						
+4	–2	–5						
+2	–2	+3						
+5	+10	–3						
0	–6	–5						
–6	0	–2						
–8	–2	0						
–3	–8	–6						

2. Completați cu unul dintre semne $\leq, =, \geq$ pentru a obține afirmații adevărate:

a) Dacă $a \geq b$, atunci $(-5)\cdot a ... (-5)\cdot b$

b) Dacă $a \leq b$, atunci $(-7)\cdot a ... (-7)\cdot b$

c) Dacă $a < b$, atunci $0 \cdot a ... 0 \cdot b$

d) Dacă $a > b$, atunci $(-3)\cdot a ... (-3)\cdot b$

e) Dacă $a \leq b$, atunci $(+3)\cdot a ... (+3)\cdot b$

f) Dacă $a \geq b$, atunci $(+4)\cdot a ... (+4)\cdot b$

g) Dacă $a > b$, atunci $0 \cdot a ... 0 \cdot b$

h) Dacă $a < b$, atunci $(+5)\cdot a ... (+5)\cdot b$

Ne verificăm

1.

a	b	c	$a\cdot b$	$b\cdot a$	$(a\cdot b)\cdot c$	$a\cdot(b\cdot c)$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b+a\cdot c$
+2	+3	+4	+6	+6	+24	+24	+14	+14
–3	+6	–5	–18	–18	+90	+90	–3	–3
–3	–4	+2	+12	+12	+24	+24	+6	+6
+4	–2	–5	–8	–8	+40	+40	–28	
+2	–2	+3	–4	–4	–12	–12	+2	+2
+5	+10	–3	+50	+50	–150	–150	+35	+35
0	–6	–5	0	0	0	0	0	0
–6	0	–2	0	0	0	0	+12	+12
–8	–2	0	+16	+16	0	0	+16	+16
–3	–8	–6	+24	+24	–144	–144	+42	+42

a) $\leq$; b) $\geq$; c) =; d) <; e) $\leq$; f) $\geq$; g) =; h) <.

Activități de învățare

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Produsul a două numere întregi pozitive este un număr întreg......... .
b) Produsul a două numere întregi negative este un număr întreg......... .
c) Produsul dintre un număr întreg pozitiv și un număr întreg negativ este un număr întreg......... .
d) Dacă un factor al unui produs este zero, atunci produsul este egal cu........... .
e) Dacă produsul a două numere întregi este zero, atunci ....

2. Folosind răspunsurile date la exercițiul anterior, alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect, știind că doar unul dintre răspunsuri este corect.

a) Dacă produsul a trei numere întregi este un număr negativ, atunci numărul factorilor negativi este:
A) 1 sau 2; B) 2 sau 3; C) 1 sau 3; D) niciunul.

b) Dacă produsul a patru numere întregi este un număr pozitiv, atunci numărul factorilor pozitivi este:
A) 1; 2 sau 3; B) 2; 3 sau 4; C) 1 sau 3; D) 0; 2 sau 4.

3. Fără a efectua calculele, alegeți *literele* care identifică înmulțirile care vor avea ca rezultat un număr întreg negativ.

a) $(-9)\cdot(+1)$; b) $(-5)\cdot(-2)$; c) $(+3)\cdot(-3)$;

d) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$; e) $(+9)\cdot(+8)$; f) $(-2)\cdot(+3)\cdot(-4)\cdot(+5)$.

4. Fără a efectua calculele, alegeți *literele* care identifică înmulțirile care vor avea ca rezultat un număr întreg pozitiv.

a) $(-7)\cdot(-2)$; b) $(+5)\cdot(+6)$;

c) $(+4)\cdot(-4)$; d) $(-3)\cdot(-5)\cdot(+2)$;

e) $(-33)\cdot(-22)\cdot(+11)$; f) $(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)$.

5. Completați tabelul următor, comparați rezultatele obținute și stabiliți relația între opusul unui număr întreg a și produsul $(-1)\cdot a$.

a	3	10			-44	0
$(-1)\cdot a$			5			
$-a$				18		

6. Scrieți numărul -4 ca produs de:
a) două numere întregi; b) trei numere întregi; c) opt numere întregi.

7. Se consideră mulțimea $A=\{-15,-5,-3,-1,+1,3,5,10,15,30\}$.
a) Scrieți toate submulțimile $B=\{a,b,c\}$ pentru care $a=b\cdot c$.
b) Scrieți toate submulțimile $C=\{a,b\}$ pentru care $a\cdot b=a$.
c) Scrieți toate submulțimile $D=\{a,b\}$ pentru care $a\cdot b=-a$.

8. Efectuați calculele și completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile $\in$, respectiv $\notin$ astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
a) $4\cdot(-5)\ \dots\ \mathbb{N}$; b) $(-13)\cdot(+2)\ \dots\ \mathbb{Z}_-$; c) $(-16)\cdot(-3)\ \dots\ \mathbb{N}$;
d) $0\cdot(-20)\ \dots\ \mathbb{N}$; e) $417\cdot(-1)\ \dots\ \mathbb{Z}$; f) $4\cdot(+5)\ \dots\ \mathbb{N}$;
g) $(-100)\cdot(-5)\ \dots\ \mathbb{Z}_-$; h) $4\cdot 20\ \dots\ \mathbb{Z}$; i) $(+8)\cdot(-10)\cdot(-2)\ \dots\ \mathbb{N}$.

9. Efectuați calculele:
a) $(-8)\cdot(-5)$; b) $(-2)\cdot(-22)$; c) $(-1)\cdot(-7)$;
d) $(+4)\cdot(+23)$; e) $(-5)\cdot(+32)$; f) $(+8)\cdot(-17)$;
g) $(-13)\cdot(-31)$; h) $(-25)\cdot(-3)\cdot(+5)$; i) $(-3)\cdot(-12)$;
j) $(+6)\cdot(+4)$; k) $(-1)\cdot(+3)$; l) $(+5)\cdot(-3)$;
m) $(+9)\cdot|-7|$; n) $|-6|\cdot|+3|\cdot|-2|$; o) $(+18)\cdot(-10)\cdot(+2)$;
p) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)$; q) $(+8)\cdot(-10)\cdot(-2)$; r) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$.

10. Uniți, prin săgeți, fiecare litera corespunzătoare produselor din prima coloană, cu răspunsul corect, aflat în coloana din dreapta:

a) $(10)\cdot(-3)$;	$a_1)\ -30$; $a_2)\ +30$;
b) $(-5)\cdot(+8)$;	$b_1)\ 40$; $b_2)\ -40$;
c) $(-6)\cdot(-7)$;	$c_1)\ +42$; $c_2)\ -42$;
d) $(+2)\cdot(+9)$;	$d_1)\ -18$; $d_2)\ +18$;
e) $(-33)\cdot 0$;	$e_1)\ -33$; $e_2)\ 0$;
f) $(-2)\cdot(+2)$.	$f_1)\ 0$; $f_2)\ -4$;

11. Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) pentru care au loc egalitățile:

a) $x \cdot y = -1$;   b) $x \cdot y = 101$;

c) $x \cdot (y+3) = -2$;   d) $(x-7)\cdot(y+3) = -5$;

e) $x + x \cdot y = -14$;   f) $|x+2| \cdot y = -11$.

3.4. Împărțirea numerelor întregi, când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului

Ne amintim

Fie *m* și *n* două numere naturale:

Dacă $\boxed{m \cdot n = p}$ atunci

p este număr natural
p este produsul lui m cu n
p și n sunt factorii produsului
p este divizibil cu m
p este divizibil cu n

De asemenea, un factor al produsului $m \cdot n = p$ se pune în evidență prin operația de împărțire. De exemplu: $m = p : n, n \neq 0$.

Dacă $\boxed{p : n = m}$ atunci

p este divizibil cu n
m este câtul împărțirii lui p la n
p și n sunt factorii câtului (p este deîmpărțitul, iar n este împărțitorul)

Deoarece rezultă una din alta, despre egalitățile $m \cdot n = p$ și $p : n = m,\ n \neq 0$ se spune că sunt echivalente. Se scrie: $\boxed{m \cdot n = p \Leftrightarrow p : n = m}$

Observăm și demonstrăm

1. Cum se calculează $(+12):(+3)$? Identificând numerele întregi + 12 și +3 cu numerele naturale 12 și 3 rezultă $(+12):(+2) = 12:3 = 4$. Identificând numărul natural 4 cu numărul întreg +4 rezultă $(+12):(+3) = +4$. Au loc egalitățile: $(+3)\cdot(+4) = +12$ și $(+12):(+3) = +4$.

2. Putem calcula $(+15):(+7)$? Nu, deoarece procedând ca în exemplul de mai sus, ajungem la împărțirea *15 : 7*, care nu se poate efectua în mulțimea numerelor naturale, deoarece *15* nu este divizibil cu *7*.

3. Egalitățile: $(+12):(+3) = +4$ și $(+12):(+3) = +4$ și observația precedentă arată că putem defini împărțirea numerelor întregi astfel:

Dacă a și b sunt numere întregi astfel încât $|a| : |b| = |c|$, *atunci* $a : b = c \Leftrightarrow b = a \cdot c$.

Exemple:

1. Dacă $a = -12,\ b = +3$, atunci $12 : 3 = 4$. Rezultă $(-12):(+3) = -4$ deoarece $-12 = (-4)\cdot(+3)$;

2. Dacă $a = +12,\ b = -3$, atunci $12 : 3 = 4$. Rezultă $(+12):(-3) = -4$ deoarece $+12 = (-4)\cdot(-3)$;

3. Dacă $a = -12,\ b = -3$, atunci $12 : 3 = 4$. Rezultă $(-12):(-3) = +4$ deoarece $-12 = (+4)\cdot(-3)$

Așadar, $(+12):(+3) = +4$, $(-12):(+3) = -4$, $(+12):(-3) = -4$, $(-12):(-3) = +4$.

Aceasta arată că la împărțirea numerelor întregi, modulul câtului este egal cu câtul modulului, iar semnul câtului rezultă din regula semnelor: $(+):(+) = +$, $(-):(-) = +$ $(-):(+) = -$ $(+):(-) = -$

Rezumăm cunoștințele

- *Câtul a două numere întregi a și b se notează cu* ***a : b****.*
Numerele a și b se numesc factorii câtului:
a se numește deîmpărțit, b se numește împărțitor.
- *Câtul a două numere întregi este un număr întreg numai dacă modulul deîmpărțitului se divide cu modulul împărțitorului.*
- *Dacă deîmpărțitul și împărțitorul au același semn, câtul este pozitiv, dacă deîmpărțitul și împărțitorul au semne diferite, câtul este negativ.*
- *Modulul câtului este egal cu câtul modulelor.*

Aplicăm cunoștințele

Dicționar
plauzibil = care poate fi admis, crezut, care pare a corespunde realității.

2. Numerele întregi *a, b* și *c* sunt astfel încât *b : c* și *a : c* sunt și ele numere întregi. Este *(b + a) : c* număr întreg?

Are loc egalitatea: *(b + a) : c = b : c + a : c*?

a) Completați tabelul de mai jos.

b	*c*	*a*	*b : a*	*c : a*	*(b+ c) : a*	*b : a + c : a*
+12	+6	–3	–4	–2	–6	–6
+8	–24	–4				
–32	–36	+2				
+24	+36	–12				
–6	–12	–3				

b) Folosiți tabelul și formulați un răspuns plauzibil la cele două întrebări.

Referințe privind numerele negative există încă din antichitate, dar acceptarea și utilizarea acestora de către matematicieni a fost dificilă și a durat foarte mult. Primele referințe la numerele negative s-au găsit în China (aproximativ în anul 200 î.Hr.). În Grecia, primele referințe la numerele negative apar în scrierea *Arthimetica* a lui Diaphantus (aproximativ în anul 250 d.Hr.). La indieni (700 d.Hr.) numerele întregi erau deja cunoscute. Cuvintele pozitiv și negativ provin din limba indiană de la cuvintele credit și datorie. În Europa numerele negative au fost cunoscute mai târziu, deoarece legătura dintre India și Europa a fost făcută de arabi, care respingeau noțiunea de număr negativ. În Europa medivală, prima carte în care au fost amintite numerele negative a fost *Arthimetica integra* (1544) a lui Michael Stifel, însă numerele negative sunt definite abia în veacul al XIX-lea, când se pun bazele logice ale matematicii.

Temă de portofoliu. Folosind Internetul, realizați un eseu despre istoria numerelor negative.

Ne verificăm

1. a)

b	*c*	*a*	*b : a*	*c : a*	*(b+ c) : a*	*b : a + c : a*
+12	+6	–3	–4	–2	–6	–6
+8	–24	–4	–2	+6	+4	+4
–32	–36	+2	–16	–18	–34	–34
+24	+36	–12	–2	–3	–5	–5
–6	–12	–3	2	+4	+6	+6

b) Răspunsul plauzibil: egalitatea este adevărată.

Activități de învățare

1. Fără a efectua calculele, alegeți *literele* care identifică împărțiri cu rezultat un număr întreg pozitiv.

a) $(+35):(+5)$; b) $(-30):(+6)$; c) $(+8):(-8)$;

d) $-100:10$; e) $(-20):(-2):+5$; f) $(+56):(-7):(+4)$;

g) $[(-80):(-1)]:(-1)$; h) $(4-2^2):(-3)$; i) $(-3):[(-1):(+1)]$;

2. Fără a efectua calculele, alegeți *literele* care identifică împărțiri care vor avea ca rezultat un număr întreg pozitiv.

a) $(-60):(+10)$; b) $(+50):(-25)$; c) $(-40):(-8)$;

d) $0:(-10)$; e) $14:(+7)$; f) $(-200):(-2):(-4)$;

g) $81:(-9):(-3)$ h) $300:(-6):|-5|$; i) $125:(-125)$.

3. Uniți, prin săgeți, fiecare litera corespunzătoare împărțirilor din prima coloană, cu răspunsul corect, aflat în coloana din dreapta:

a) $20:(-4)$;	a_1) -5; a_2) $+5$;
b) $(-48):(-6)$;	b_1) -8; b_2) $+8$;
c) $(-30):(-5)$;	c_1) $+6$; c_2) -6;
d) $+70:(+10)$;	d_1) -7; d_2) $+7$;
e) $0:(-7)$;	e_1) 0; e_2) -7;
f) $0:(+3)$.	f_1) -3; f_2) 0;

4. Efectuați calculele:

a) $-42:(-6)$; b) $-84:(+4)$; c) $+45:(-5)$; d) $-63:(-7)$;

e) $-144:(+16)$; f) $-256:(-32)$; g) $+676:(+13)$; h) $-3000:(-3):(-25)$;

5. Uniți, prin săgeți, fiecare litera corespunzătoare calculului din prima coloană, cu răspunsulcorect, aflat în coloana din dreapta:

$-2304:16$;	-72;
$+1296:(-18)$;	$+12$
$-484:(+44)$;	-144;
$+122436:(+10203)$.	-11.

6. Se consideră mulțimea $A=\{-24,-16,-15,-3,-1,1,4,8,9,12\}$.

a) Scrieți toate submulțimile $B=\{a,b,c\}$ pentru care $a:b=c$.

b) Scrieți toate submulțimile $C=\{a,b,c\}$ pentru care $(a:b:c)\in A$.

c) Scrieți toate submulțimile $D=\{a,b\}$ pentru care $a:b=-a$.

7. Determinați mulțimile:

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x$ este divizor al numărului $-119\}$;

$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid (-861:7)\le x\le[712:(-8)]$ si x este multiplu al numărului $7\}$.

3.5. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri

Rezolvăm

Puterea cu exponent natural a unui număr întreg se definește în același mod ca și puterea unui număr natural. Prinanalogie $(+3)^2=(+3)\cdot(+3)$; $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$.

Regulile de calcul cu puteri, învățate la numere naturale, rămân valabile și la numere întregi.

1. Calculați $(+2)^3$.

a) Cum se citește scrierea $(+2)^3$? Care este baza? Dar exponentul?

b) Efectuați calculele de mai jos, în două moduri:

1) Se calculează fiecare putere și se efectuează operația indicată;

2) Se aplică regulilede calcul cu puteri.

$(+2)^3\cdot(+2)^4$; $(-3)^2\cdot(-3)^3$; $(-1)^6\cdot(-1)^5$; $(-4)^3:(-4)^2$; $(+5)^4:(+5)^2$; $(-1)^7:(-1)^3$.

2. Verificați egalitățile:

$[(+3)\cdot(-2)]^2=(+3)^2\cdot(-2)^2$; $[(-4)\cdot(-2)]^2=(-4)^2\cdot(-2)^2$; $\left[(-2)^3\right]^2=(-2)^6$; $\left[(-3)^2\right]^2=(-3)^4$;

Rezumăm cunoștințele

Pentru *orice* număr întreg *a,* nenul și pentru orice număr natural $n\ge 2$ puterea a *n*-a a numărului întreg *a,* sau *a* la puterea *n* este produsul a *n* factori, toți egali cu *a*.

Acest produs se notează a^n.

a la puterea n	$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$	*a se numește bază* *n se numește exponent*

Convenții: $a^0=1$; $a^1=a$; 0^0 *nu se definește.*

• Reguli de calcul cu puteri:

1)	*Înmulțirea puterilor care au aceeași bază*	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	*Se scrie baza și se adună exponenții*
2)	*Împărțirea puterilor care au aceeași bază*	$a^m:a^n=a^{m-n}$	*Se scrie baza și se scad exponenții*
3)	*Puterea unei puteri*	$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$	*Se scrie baza și se înmulțesc exponenții*
4)	*Puterea unui produs*	$(a\cdot b)^n=a^m\cdot b^n$	*Se ridică fiecare factor la puterea respectivă*

• Compararea puterilor. Fie *a* și *b* două numere întregi și *n* număr natural nenul:

- dacă *n* este impar și $a<b$, atunci $a^n<b^n$;
- dacă n este par și $0<a<b$, atunci $a^n<b^n$;
- dacă n este par și $a<b<0$, atunci $a^n>b^n$

Aplicăm cunoştinţele

3. a) Completaţi tabelul de mai jos:

a	n	a^n	$-a^n$	$(-a)^n$
–3	2			
–3	3			
+2	4			
+2	5			
–1	6			
–1	7			

b) Scrieţi numerele naturale pentru care:

1) $(-a)^n = a^n \Leftrightarrow n$ este par; 2) $(-a)^n = -a^n \Leftrightarrow n$ este impar;

c) Analizând rezultatele precedente, scrieţi o condţie necesară şi suficientă pe care să o îndeplinească n pentru ca:

1) $(-a)^n = a^n$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$; 2) $(-a)^n = -a^n$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$;

Ne verificăm

1. a) $(+2)^3 = 2^3 = 8 = +8$. b) Scrierea $(+2)^3$ se citeşte „+2 la puterea a treia”. Baza este +2, iar exponentul este 3.

2. $(+2)^3 \cdot (+2)^4 = 2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$; $(+2)^3 \cdot (+2)^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$; $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = 9 \cdot (-27) = 243$;
$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^5 = -243$; $(-1)^6 \cdot (-1)^5 = 1 \cdot (-1) = -1$; $(-1)^6 \cdot (-1)^5 = (-1)^{11} = -1$;
$(-4)^3 : (-4)^2 = (-64) : 16 = -4$; $(-4)^3 : (-4)^2 = (-4)^1 = -4$; $(+5)^4 : (+5)^2 = 625 : 25 = 25$;
$(+5)^4 : (+5)^2 = (+5)^2 = 5^2 = 25$; $(-1)^7 : (-1)^3 = (-1) : (-1) = 1$; $(-1)^7 : (-1)^3 = (-1)^4 = 1$;

2. $[(+3) \cdot (-2)]^2 = (-6)^2 = 36$; $(+3)^2 \cdot (-2)^2 = 9 \cdot 4 = 36$;
$[(-4) \cdot (-2)]^2 = 8^2 = 64$; $(-4)^2 \cdot (-2)^2 = 16 \cdot 4 = 64$;
$\left[(-2)^3\right]^2 = (-8)^2 = 64$; $(-2)^6 = 2^6 = 64$; $\left[(-3)^2\right]^2 = 9^2 = 81$; $(-3)^4 = 3^4 = 81$;

3. a)

a	n	a^n	$-a^n$	$(-a)^n$
–3	2	+9	–9	+9
–3	3	–27	+27	+27
+2	4	+16	–16	+16
+2	5	+32	–32	–32
–1	6	+1	–1	+1
–1	7	–1	1	+1

b) 1) $(-a)^n = a^n$ pentru $n \in \{2, 4, 6\}$; 2) $(-a)^n = -a^n$ pentru $n \in \{3, 5, 7\}$;

c) Pentru orice număr întreg a, nenul şi n număr natural

1) $(-a)^n = a^n \Leftrightarrow n$ este număr par; 2) $(-a)^n = -a^n \Leftrightarrow n$ este număr impar.

Activități de învățare

1. Scrieți ca puteri cu exponent natural al unor numere întregi:

a) $(-3)\cdot(-3)$;

b) $5\cdot5\cdot5$;

c) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$;

d) -7;

e) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$;

f) $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$.

2. Completați în tabelul următor valorile puterilor numerelor scrise în prima coloană:

n	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4
1					
-1					
$+2$					
-2					
$+3$					
-3					

3. Calculați:

a) 1^5; b) $(-1)^5$; c) $(-1)^6$; d) -1^6;

e) $(-1)^{123}$; f) $(+1)^{321}$; g) $(-1)^{3^2}$; h) $(+1)^{2^3}$;

i) $(+1)^6$; j) $(-1)^{n\cdot(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$; k) $-1^{2\cdot n+7}$; l) $(-1)^{2\cdot n+7}$.

4. Calculați perechile de puteri, apoi comparați rezultatele obținute:

a) $(-3)^4$ și -3^4; b) $(-2)^3$ și -2^3; c) $(-4)^2$ și -4^2;

d) $(-10)^2$ și -10^2; e) $(-6)^0$ și -6^0; f) $(+5)^3$ și $+5^3$;

g) $(+2)^5$ și $+2^5$; h) $(-2)^2$ și 2^2; i) 0^9 și $(-1)^0$.

5. Scrieți:

a) numărul 4 ca putere cu baza -2;
b) numărul -8 ca putere cu baza -2;
c) numărul 16 ca putere cu exponentul 2;
d) numărul -64 ca putere cu exponentul 3;
e) numărul -1 ca putere cu exponentul un număr mai mare decât 100;

6. Completați spațiile libere cu un număr întreg astfel încât să aibă loc egalitățile:

a) $(.....)^2 = 16$; b) $(.....)^3 = -27$; c) $(.....)^4 = 81$;

d) $(.....)^1 = -10$; e) $(.....)^0 = 1$; f) $(.....)^{10} = 1$;

g) $(.....)^{23} = -1$; h) $(.....)^4 = 0$; i) $a^0 = ...$, $a\in\mathbb{Z}^*$.

7. Scrieți rezultatul operațiilor ca puteri ale unor numere întregi:

a) $2^3\cdot 2^4$; b) $(-3)^2\cdot(-3)^6$; c) $(-4)\cdot(-4)^2$;

d) $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6$; e) $7\cdot 7\cdot(-7)$; f) $x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4\cdot x^5,\ x\in\mathbb{Z}$;

g) $(-2)^4:(-2)^3$; h) $3^6:3^2$; i) $(-4)^{10}:(-4)^7$;

j) $(-20)^{10}:(-20)^5:(-20)^5$; k) $\left[(-2)^2\right]^3$; l) $\left(5^1\right)^0$;

m) $\left[(-3)^5\right]^2$; n) $\left[(-7)^3\right]^5$; o) $\left[(-1)^7\right]^4$;

p) $\left[2^2\cdot(-3)^3\right]^2$; q) $\left[(-2)\cdot(+3)^2\right]^3$; r) $(-2)^7\cdot 2^5$;

s) $\left[(+6)\cdot(-2)\cdot(-3)\right]^2$; t) $\left[-3\cdot(+7)^2\right]^0$; u) $\left(a^2\cdot b^2\cdot c^2\right)^4, a,b,c\in\mathbb{Z}^*$.

8. Efectuați calculele:

a) $(-2)^3\cdot(-2)^4:(-2)^5$; b) $\left\{\left[(-4)^2\right]^3\cdot(-4)^5\right\}:(-4)^9$;

c) $(-3)^{10}:(-3)^8\cdot(-3)$; d) $\left[(-2)\cdot(-2)^2\cdot(-2)^3\right]:(-8)$;

e) $(-2)^2\cdot(-2)^9:(-2)^8$; f) $\left[(-2)^3\cdot(-2)^2\right]^3:(-512)$.

9. Uniţi, prin săgeţi, fiecare literă corespunzătoare calculului din prima coloană, cu răspunsul corect, aflat în coloana din dreapta:

a) $(-2)^2\cdot(-2)^3$;	1) $(-2)^{2+3}$; 2) $(-2)^{2\cdot 3}$;
b) $(-3)^8:(-3)^2$;	3) $(-3)^{8:2}$; 4) $(-3)^{8-2}$;
c) $\left(4^3\right)^5$;	5) $4^{3\cdot 5}$; 6) 4^{3+5};
d) $\left[-2\cdot(-3)^2\right]^3$;	7) $-2^3\cdot(-3)^5$; 8) $(-2)^3\cdot(-3)^6$.

10. Efectuați calculele:

a) $|-2|\cdot(-2)^2\cdot|-8|\cdot(-2)^4$; b) $(-10)^5:\left(-2^4\cdot 5^3\right)$;

c) $\left[-1\cdot(+2)\cdot(-3)\right]^4:36$; d) $\left[-2\cdot(-3)\cdot(-5)\right]^3:(-900)$.

11. Pentru numerele întregi nenule a,b,c se consideră $x=a^2\cdot b^3\cdot c^4$ și $y=a^3\cdot b^2\cdot c$. Pentru fiecare dintre următoarele afirmații, scrieți câte un exemplu de numere întregi a,b,c care să o justifice.

a) Dacă b este număr întreg negativ, atunci x este număr întreg negativ.

b) Dacă a și c au același semn (sau sunt ambele pozitive, sau sunt ambele negative), atunci y este un număr întreg pozitiv.

c) Dacă $x\cdot y$ este număr întreg negativ, atunci $a\cdot b\cdot c$ este număr întreg negativ.

3.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Ordinea efectuării operațiilor cu numere întregi este aceeași ca și în cazul operațiilor cu numere naturale.

Reținem

Într-un exercițiu de calcul cu mai multe operații se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar, și apoi adunările și scăderile.

Exemplu: Calculați: $-9+9:(-3)\cdot(-1)-(-2)^3$

Rezolvare:

$$-9+\underbrace{9:(-3)}_{-3}\cdot(-1)-\underbrace{(-2)^3}_{-8}=$$
$$=-9+\underbrace{(-3)\cdot(-1)}_{+3}\underbrace{-(-8)}_{+8}=$$
$$=-9+3+8=$$
$$=-9+11=$$
$$=+2$$

$$-9+9:(-3)\cdot(-1)-(-2)^3=$$
$$=-9+(-3)\cdot(-1)-(-8)=$$
$$=-9+3+8=$$
$$=-9+11=$$
$$=+2$$

Într-un exercițiu de calcul cu paranteze se efectuează mai întâi calculele din parantezele rotunde, apoi din cele drepte și apoi din acolade.

Exemplu: Calculați; $2\cdot\left\{-1+\left[(-2)^3-2+4\right]:(-3)\cdot(-1)\right\}-3$. *Rezolvare*: Notăm cu x rezultatul calculului deoarece: $(-2)^3-2+4=-8-2+4=-10+4=-6$ rezultă $x=2\cdot\left\{-1+(-6):(-3)\cdot(-1)\right\}-3$.

Dar, $-1+\underbrace{(-6):(-3)}_{+2}\cdot(-1)=-1+\underbrace{(+2)\cdot(-1)}_{-1}=-1-1=-2$ deci $x=2\cdot(-2)-3$.

Rezultă; $x=-4-3$, deci $x=-7$.

Aplicăm cunoștințele

1. Calculați expresiile următoare: $x=23-12\cdot3+8$; $y=15-3\cdot(4-6)$; $z=3+4\cdot5+2\cdot(3-15)$;

$t=(-7)+7\cdot(-3)+5\cdot\left[-5+(-2)\right]$; $u=-4+2\cdot\left[-3\cdot(5-7)-9\right]$;

$v=\left[-7+7\cdot(-3)-3\right]:\left[-8\cdot5-3\cdot(-3)\right]$

Ne verificăm

1. $x=23-12\cdot3+8=23-36+8=23+8-36=31-36=-5$;

$y=15-3\cdot(4-6)=15-3\cdot(-2)=15+6=21$;

$z=3+4\cdot5+2\cdot(3-15)=3+20+2\cdot(-12)=23-24=-1$;

$t=(-7)+7\cdot(-3)+5\cdot\left[-5+(-2)\right]=-7-21+5\cdot(-7)=-28-35=-63$;

$u=-4+2\cdot\left[-3\cdot(5-7)-9\right]=-4+2\cdot\left[-3\cdot(-2)-9\right]=-4+2\cdot(+6-9)=-4+2\cdot(-3)=-10$;

$v=\left[-7+7\cdot(-3)-3\right]:\left[-8\cdot5-3\cdot(-3)\right]=(-7-21-3):(-40+9)=(-31):(-31)=1$.

Activități de învățare

1. Efectuați calculele:

a) $2\cdot(-10)+10$; b) $3\cdot(-11)+22:(-2)$;

c) $3+(-5)^2-(-20):(-4)$; d) $-4\cdot\left[-7+\left(-3^2+6\right)\cdot(-2)\right]$.

2. Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $-5\cdot(-6)+(-20)$; b) $+99-(-5)\cdot(-19)$;

c) $-10\cdot(+12)+(-7)\cdot(-15)$; d) $-2\cdot(+3)\cdot(-4)-(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)$;

e) $(-2+3-44)\cdot(7-5+8)$; f) $-100\cdot\left[(-4)\cdot(+5)-(-10)\cdot(+2)-(-3)\right]$.

3. Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $(-21):(-7)+5$; b) $-23+(+75):(-5)$;

c) $(-8):(+2)-(-18):(-3)$; d) $-400:(-25+125)$;

e) $(-900+450):(-90+45)$; f) $-400:(-75-125)$.

4. Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $2+2\cdot(-2)$; b) $-1-3:(-3)$; c) $+8+7\cdot(-3)$;

d) $-40:(-5)-(-6)$; e) $(-4+6-8+1)\cdot 3$; f) $-132:(-21+32-44)$.

5. Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $3\cdot(-6)+6\cdot(-3)+35$; b) $-15:(-6+1)-24:(-8+14)$;

c) $-1+2\cdot\left[-3+4\cdot(-5+6)\right]$; d) $\left[(-6+7\cdot 2):10+9\right]\cdot 3$;

e) $\left[-4+(-3+91:7):(-5)\right]:(-2)$; f) $2^3+(-3)^2+(-2)\cdot(+3)$.

6. Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $\left(-3^2+2^3\right)^2+3^3-(-2)^2$;

b) $\left[\left(-4:2^2-9:3^2-1^3\right)\cdot\left(-3^5:3^3+1\right)\right]:\left(-5^2+1\right)$;

c) $(-1+2-3+4-5+6-7+8-9):(-1+2+3-4+5)$.

7. Dacă $a=-1\cdot(+2)-3$ și $b=-4-(-5)\cdot(-6)$, calculați numerele întregi $a\cdot b$ și $-17\cdot a+3\cdot b$.

8. Subliniați factorul comun și efectuați calculele în două moduri; numerele a și b sunt numere întregi:

a) $7\cdot 8+7\cdot(-3)$; b) $-10\cdot 4-(-10)\cdot 9$;

c) $-3\cdot 1+(-3)\cdot 2+(-3)\cdot(-13)$; d) $12\cdot(-8)+12\cdot(+20)$;

e) $-17\cdot 25-(-17)\cdot(-25)+(-40)\cdot(-17)$; f) $4\cdot a-4\cdot b+4\cdot(b-a+1)$; $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}$;

g) $-9\cdot(-3)+(-9)\cdot 21-(-9)\cdot(-6)$; h) $4\cdot(a+b)-4\cdot a-4\cdot b$; $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}$.

9. a) Știind că $a=-13$ și $a\cdot b+a=-182$, aflați numărul întreg b.

b) Știind că $a=-14$ și $a\cdot b+a\cdot c=+182$, aflați suma $b+c$.

c) Știind că $b+c=15$ și $a\cdot b+a\cdot c+15\cdot a=-3510$, aflați numărul a.

10. Scrieți în ordine crescătoare numerele: $a=(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^{2\cdot3\cdot4}$,

$b=-3^3+(-3)^7:81-(-4)^3$ și $c=+8-(-2\cdot3)^2+\left[(-2)^3\right]^2:(-3^2\cdot7-1)$.

11. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\in\mathbb{Z}^*$.

a) Calculați $E(-1)$ și $E(1)$;

b) Calculați $E(-n)+E(n)$, pentru $n\in\mathbb{Z}^*$.

c) Calculați $E(2)+E(-3)+E(4)+E(-5)+\ldots E(-101)$.

12. Formulați câte un exercițiu de calcul/expresie numerică, al cărui rezultat să fie -3 și care să conțină:

a) o adunare; b) o scădere; c) o adunare și o scădere

d) o adunare și o împărțire; e) o scădere și o înmulțire.

13. Efectuați calculele:

a) $(-2)^{31}:2^{29}-(-2)^{25}:4^{12}$;

b) $(1^{32}-32^2):\left[(-2\cdot3^2)^2-(3^2-2^3)\cdot(-3^2-2^3)\right]$;

c) $\left[(-3)^{11}\cdot(-3)^9:3^{18}-10\right]^{2017}+(-1)^{2018}$;

d) $17\cdot(17^3-17^2\cdot16-17\cdot16-16)$;

e) $-8-|-12|+|-6^2+5^2|-|-7\cdot17+2^7|$;

f) $-1024:\left[-750:(-6\cdot4-1)-(-3)^3-(-7)\right]$.

14. Comparați numerele a și b, date de:

$a=(64-1^2)\cdot(64-2^2)\cdot(64-3^2)\cdot\ldots\cdot(64-10^2)$;

$b=(1^3-64)\cdot(2^3-64)\cdot(3^3-64)\cdot\ldots\cdot(10^3-64)$.

3.7. Ecuaţii în mulțimea numerelor întregi

Rezolvăm și descoperim

1. Se pune problemasă aflăm numerele întregi din mulțimea $M=\{-3,0,1\}$, care au proprietatea că diferența dintre număr și pătratul lui este egală cu triplul numărului.

Să notăm cu x un număr întreg din mulțimea $M=\{-2,0,4\}$ care are proprietatea menționată. Atunci x verifică egalitatea $x-x^2=3x$. Sunt posibile următoarele situații:

1) dacă $x=-2$, atunci: $\left.\begin{array}{l}(-2)-(-2)^2=-6\\ 3\cdot(-2)=-6\end{array}\right\}$ egalitatea $(-2)-(-2)^2=3\cdot(-2)$ este adevărată;

2) dacă $x=0$, atunci: $\left.\begin{array}{l}0-0^2=0\\ 3\cdot0=0\end{array}\right\}$ egalitatea $0-0^2=3\cdot0$ este adevărată;

3) dacă $x=4$, atunci: $\left.\begin{array}{l}4-4^2=-12\\ 3\cdot4=12\end{array}\right\}$ egalitatea $4-4^2=3\cdot4$ nu este adevărată.

Deci, în mulțimea $M=\{-2,0,4\}$ există două numere întregi, -2 și 0, care au proprietatea din enunț. Altfel spus, egalitatea $x-x^2=3x$ este verificată de două numere din mulțimea *M*.

Problema de mai sus poate fi reformulată astfel: *„Să se rezolve în mulțimea $M=\{-2,0,4\}$, ecuația $x-x^2=3x$”*, sau, mai simplu: *„Să se rezolve ecuația $x-x^2=3x$, $x\in\{-2,0,4\}$”*

Despre x, se spune că este *necunoscuta ecuației.* Orice număr din mulțimea M care verifică egalitatea $x - x^2 = 3x$ se numește *soluția ecuației*. Numerele -2 și 0 din M verifică egalitatea $x - x^2 = 3x$, deci sunt soluții ale ecuației. Numărul 4 nu verifică egalitatea, deci nu este soluție a ecuației.

Rezolvarea unei ecuații înseamnă găsirea mulțimii soluțiilor ei.

2. Rezolvând ecuațiile

a) $2x = -6 - x$, $x \in \{-2, 1, 2\}$; b) $4x - 2 = x - 8$, $x \in \{-2, 1, 2\}$, constatăm că ele au aceeași soluție: $x = -2$.

Două ecuații în care necunoscuta aparține aceleași mulțimi și care au aceleași soluții se numesc ecuații echivalente.

3. Se consideră mulțimea $M = \{-1, 0, 2, 4\}$ și ecuația $6x - 2 = 3x + 4$, $x \in M$.

a) Adunați la ambii membri ai ecuației același număr, de exemplu numărul −3. Scrieți ecuația rezultată și verificați că este echivalentă cu cea dată.

b) Treceți termenii −2 și $3x$ dintr-un membru în celălalt,dar cu semn schimbat. Scrieți ecuația rezultată și verificați că este echivalentă cu cea dată.

c) Înmulțiți ambii membri ai ecuației cu același număr diferit de zero, de exemplu cu 2. Scrieți ecuația rezultată și verificați că este echivalentă cu cea dată.

Reținem

Proprietățile ecuațiilor

- *Dacă adunăm la ambii membri ai unei ecuații același număr, obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.*
- *Dacă într-o ecuație trecem un termen dintr-un membru în altul cu semn schimbat, rezultă o ecuație echivalentă cu cea dată.*
- *Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu un număr nenul, obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.*

Proprietățile ecuațiilor sunt utile atunci când mulțimea în care se caută soluțiile are prea multe elemente sau este infinită. În aceste situații se folosesc proprietățile ecuațiilor, transformând ecuația dată într-o ecuație echivalentă cu ea, care se rezolvă mai ușor.

Exemplu: Să rezolvăm în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $3x + 10 = 2 - x$

Rezolvarea	*Etapele rezolvării*
$3x + 10 = 2 - x$	Trecem termenul +10 din membrul I în membrul II și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația 2)
$3x = 2 - x - 10$	Trecem termenul $-x$ din membrul II în membrul I și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația 3)
$3x + x = 2 - 10$	Efectuăm calculele. Rezultă ecuația 4)
$4x = -8$	Împărțim la 4 ambii membri ai ecuației. Rezultă ecuația 4)
$x = -2$	*Concluzie*: Soluția ecuației este numărul întreg – 2.

Exemplul de mai sus, conduce la următoarele patru etape de rezolvare a ecuaţiilor:

1) *Separarea termenilor*, care presupune trecerea termenilor care conţin necunoscuta într-un membru şi a termenilor liberi (care nu conţin necunoscuta) în celălalt membru.

2) *Efectuarea calculelor în fiecare membru.* Rezultă o ecuație de forma $ax = b$, unde a și b sunt numere întregi; a este numit *coeficientul necunoscutei x*, iar b este numit *termenul liber*.

3) *Obţinerea soluţiei*, prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei la coeficientul necunoscutei (când acesta este diferit de zero și este divizor al termenului liber). În caz contrar (când împărțirea $a{:}b$ nu se poate efectua, adică, numărul a nu este divizor al numărului b), ecuația nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$.

Aplicăm cunoștințele

4. Se consideră ecuația: $-2t+9=2t+5$, $t \in \mathbb{Z}$.

a) Care este necunoscuta ecuației?
b) Câți termeni are ecuația?
c) Numiți termenii ecuației care conțin necunoscuta și termenii liberi.
d) Numiți coeficienții termenilor care conțin necunoscuta
e) Stabiliți dacă numărul întreg 3 este soluție a ecuației.
f) Rezolvați ecuația.

Ne verificăm

3. Numărul 2 este singurul element din mulțimea M care verifică egalitatea $6x-2=3x+4$. Într-adevăr $6\cdot2-2=10$ și $3\cdot2+4=10$, deci $6\cdot2-2=3\cdot2+4$. Prin urmare, numai numărul 2 este soluție a ecuației.
a) Adunând la ambii membri ai ecuației numărul -3, rezultă ecuația $6x-2-3=3x+4-3$, $x\in M$ adică ecuația $6x-5=3x+1$, $x\in M$. Prin verificări, rezultă că aceasta are soluția 2, deci este echivalentă cu ecuația dată. b)Trecând termenii -2 și $3x$ dintr-un membru în celălalt, cu semn schimbat, rezultă ecuația $6x-3x=4+2$, $x\in M$, adică ecuația $3x=6$, $x\in M$. Prin verificări, rezultă că aceasta are soluția 2, deci este echivalentă cu ecuația dată. c) Înmulțind ambii membri ai ecuației cu numărul 2, rezultă ecuația $2\cdot(6x-2)=2\cdot(3x+4)$, $x\in M$, adică ecuația $12x-4=6x+8$, $x\in M$.
Prin verificări, rezultă că aceasta are soluția 2, deci este echivalentă cu ecuația dată.

4. a) Necunoscuta ecuației $-2t+9=2t+5$, $t\in\mathbb{Z}$ este t. b) Ecuația are patru termeni. c) Termenii ecuației care conțin necunoscuta sunt: $-2t$ și $2t$. Termenii liberi sunt 9 și 5. d) Coeficienții termenilor care conțin necunoscuta sunt -2 și 2. e) Numărul întreg 3 nu este soluție a ecuației deoarece nu verifică ecuația: $-2\cdot3+9=3$ și $2\cdot3+5=11$, deci $-2\cdot3+9\neq2\cdot3+5$. f) Deoarece mulțimea $\mathbb{Z}$, în care se caută soluțiile, este infinită, pentru rezolvarea ecuației, parcurgem cele patru etape, bazate pe proprietățile ecuațiilor:
a) separăm termenii care conțin necunoscuta de termenii liberi. Rezultă ecuația $-2t-2t=5-9$, $t\in\mathbb{Z}$;
b) efectuăm calculele și obținem ecuația $-4t=-4$, $t\in\mathbb{Z}$;
c) prin împărțirea ambilor membri ai ecuației la – 4, care este coeficientul necunoscutei, se obține $t=1$
d) obținem soluția ecuației: $t=1$.

Activități de învățare

1. Scrieți litera care identifică răspunsul corect știind că numai un răspuns este corect.

1.1. Numărul -2 este soluție a ecuației:
a) $x+2=0$; b) $x-2=0$; c) $3x+8=16$; d) $x^2=2$.

1.2. Ecuația care are ca soluție un număr întreg, este:
a) $2\cdot x=7$; b) $3\cdot x+1=8$; c) $-x^2+10=0$; d) $-x+3=7$.

1.3. Sunt echivalente ecuațiile:
a) $x+3=0$ și $2\cdot x=-6$; b) $1+x=7$ și $7+x=1$; c) $x+x=2$ și $x^2=2$.

2. Rezolvați fiecare ecuație, în mulțimea A, precizată:
a) $2\cdot x-1=-5$; $A=\{-3, -2, -1, 1, 3\}$; b) $6=4\cdot x$; $A=\mathbb{N}$.
b) $-3\cdot x+1=-2$; $A=\{-2, -1, 0, 1, 2{,}5\}$;

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuațiile:
a) $5\cdot x-15=0$; b) $4\cdot x+16=20$;
c) $-3\cdot x+11=-1$; d) $-2\cdot x-200=0$;
e) $21=7\cdot x-21$; f) $10\cdot x+99=88$;
g) $2\cdot x+x=-20+(-10)$; h) $-(1-2x)=-37$.

4. Determinați mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x+2^3=3^2\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}_-$ și $-3\cdot x+7=10\}$, $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\, si\; x:(-2)=-22\}$.

5. Scrieți câte o ecuație echivalentă cu fiecare dintre ecuațiile următoare:

a) $-x+5=6$; b) $-3\cdot x+7=-20$; c) $-8^2-x=-63$.

6. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuațiile:

a) $9\cdot(x-7)=-63$; b) $5\cdot(x+3)=3\cdot(x-5)$;

c) $2\cdot(-x+4)=-3\cdot(x+1)+23$; d) $1-2\cdot[3-(4-x)]=-7$;

e) $2\cdot(x+6)-(5-3\cdot x)=2\cdot(-x+9)+3$; f) $225:(x-3)=-15$.

7. Aflați numerele întregi x pentru care au loc egalitățile:

a) $|x|=7$; b) $|-x|=|+5|$;

c) $|x+3|=0$; d) $|x-2|=3$;

e) $|-x+4|=9$; f) $|-2\cdot x|+1=15$.

8. Arătați că ecuațiile următoare nu au soluții în mulțimea numerelor întregi:

a) $3\cdot x-17=2$; b) $-5\cdot x+14=27$;

c) $x+3=4\cdot x-7$; d) $-72:(x+1)=14$.

9. Determinați mulțimea soluțiilor următoarelor ecuații:

a) $-99\cdot x=0$; b) $(x+1)\cdot(x-4)=0$;

c) $3\cdot x^2-12=0$ d) $|3\cdot x+1|=-3+1$;

e) $|3\cdot x+1|=3\cdot x+1$; f) $x^2=9$.

10. Determinați perechile de numere întregi (x,y) care verifică egalitățile:

a) $x\cdot y=5$; b) $\frac{7}{x}=-y$; c) $x+x\cdot y=-3$.

3.8. Inecuaţii în mulțimea numerelor întregi

Rezolvăm

1. Dacă într-o ecuație înlocuim semnul egal cu unul dintre semnele <, >, ≤, ≥, obținem o inecuație. Spre exemplu, dacă considerăm mulțimea $M=\{-1,0,2,3,4\}$ și în ecuația $6x-2=3x+4$, $x\in M$ înlocuim semnul „=” cu semnul „≥” și se obține inecuația $6x-2\geq 3x+4$, $x\in M$.

a) Arătați că numărul -1 nu este soluție a inecuației, iar numărul 3 este soluție a inecuației.

b) Rezolvați inecuația.

Proprietățile inecuațiilor sunt identice cu proprietățile ecuațiilor, cu excepția înmulțirii sau împărțirii membrilor inecuației cu un același număr negativ.

d) Înmulțiți ambii membri ai inecuației cu același număr pozitiv, de exemplu cu 2. Scrieți inecuația rezultată și verificați că este echivalentă cu cea dată.

Dacă a și b sunt două numere întregi și $a<b$, atunci $-a>-b$, de unde obținem: dacă $a<b$ și $c<0$, atunci $a\cdot c>b\cdot c$.

d) Înmulțiți ambii membri ai inecuației cu același număr negativ, de exemplu cu -2. Scrieți inecuația rezultată în urma acestei operații, dar aveți grijă să schimbați sensul inegalității (în locul semnului $\geq$ puneți semnul $\leq$). Verificați că inecuația rezultată este echivalentă cu cea dată.

Reținem

Proprietățile inecuațiilor

- *Dacă adunăm la ambii membri ai unei inecuații același număr, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.*
- *Dacă într-o inecuație trecem un termen dintr-un membru în altul cu semn schimbat, rezultă o inecuație echivalentă cu cea dată.*
- *Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu același număr întreg pozitiv, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.*
- *Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu același număr întreg negativ și schimbăm sensul inecuației, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.*

La fel ca în cazul ecuațiilor, aceste proprietăți conduc la următoarele patru etape de rezolvare ale inecuațiilor:

1) *Separarea termenilor:* presupune trecerea termenilor care nu conțin necunoscuta într-un membru și a termenilor liberi (care conțin necunoscuta) în celalalt membru.

2) *Efectuarea calculelor în fiecare membru:* rezultă o inecuație de forma $a \cdot x < b$ sau $a \cdot x > b$, sau $a \cdot x \leq b$ sau $a \cdot x \geq b$, unde a și b sunt numere întregi; a este numit *coeficientul necunoscutei x*, iar b este numit *termenul liber*.

3) *Obținerea soluției*, prin împărțirea ambilor membri ai ecuației la coeficientul necunoscutei (când acesta este diferit de zero și este divizor al termenului liber), având grijă ca atunci când a este negativ să schimbăm sensul inegalității.

Exemplu. Să rezolvăm în mulțimea $\mathbb{Z}$ inecuația $-3x + 10 \leq -2 + x$

	Rezolvarea	*Etapele rezolvării*
	$-3x - 10 \leq -2 + x$	*separăm termenii:* - trecem termenul $+x$ din membrul II în membrul I și îi schimbăm semnul - trecem termenul -10 din membrul I în membrul II și îi schimbăm semnul. Rezultă inecuația 2)
	$-3x - x \leq -2 + 10$	Efectuăm calculele. Rezultă inecuația 3)
	$-4x \leq 8$	Împărțim la -4 ambii membri ai inecuației. Deoarece -4 este negativ, avem grijă să schimbăm sensul inegalității. Rezultă inecuația 4)
	$x \geq -2$	*Concluzie*: mulțimea soluțiilor inecuației date este $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} = \{-2, -1\} \cup \mathbb{N}$.

Aplicăm cunoștințele

2. Se consideră inecuația: $-2y - 9 > 2y - 5$, $y \in \mathbb{Z}$.

a) Care este necunoscuta inecuației?

b) Câți termeni are inecuația?

c) Numiți termenii inecuației care conțin necunoscuta și termenii liberi.

d) Numiți coeficienții termenilor care conțin necunoscuta.

e) Stabiliți dacă numărul întreg -2 este soluție a inecuației.

f) Rezolvați inecuația.

Ne verificăm

1. a) Dacă $x = -1$, atunci $6\cdot(-1) - 2 = -8$ și $3\cdot(-1) + 4 = 1$. Prin urmare, că inegalitatea $6\cdot(-1)-2 \geq 3\cdot(-1)+4$ este falsă, deci numărul -1 nu este soluție a inecuației.Dacă $x = 3$, atunci $6\cdot3 - 2 = 16$ și $3\cdot3 + 4 = 13$. Rezultă inegalitatea $6\cdot3 - 2 \geq 3\cdot3 + 4$, deci numărul 3 este soluție a ecuației.

b) Procedând ca mai sus, constatăm imediat că, dintre elementele mulțimii *M,* inegalitatea $6x-2 \geq 3x+4$ este verificată numai de numerele 2, 3 și 4. Prin urmare mulțimea $S = \{2,3,4\}$ este mulțimea soluțiilor inecuației.

c) Înmulțind ambii membri ai inecuației cu numărul 2, rezultă inecuația $2\cdot(6x-2) \geq 2\cdot(3x+4)$, $x \in M$ adică,inecuația $12x-4 \geq 6x+8$, $x \in M$. Prin verificări rezultă că aceasta are mulțimea soluțiilor $S = \{2,3,4\}$, deci este echivalentă cu inecuația dată.

d) Înmulțind ambii membri ai inecuației cu numărul –2 și schimbând sensul inegalității, rezultă inecuația $-2(6x-2) \leq -2(3x+4)$, $x \in M$ adică, $-12x+4 \geq -6x-8$, $x \in M$. Prin verificări, rezultă $S = \{2,3,4\}$ deci cele două inecuații sunt echivalente.

2. a) Necunoscuta inecuației $-2y-9 > 2y-5$, $y \in \mathbb{Z}$ este *y*.b) Inecuația are patru termeni. c) Termenii inecuației care conțin necunoscuta sunt: $-2y$ și $2y$. Termenii liberi sunt numerele –9 și –5.

d) Coeficienții termenilor care conțin necunoscuta sunt – 2 și 2.e) Numărul întreg –2 nu este soluție a inecuației deoarece nu verifică inecuația. Într-adevăr $-2\cdot(-2)-9 = -5$ și $2\cdot(-2)-5 = -9$, deci $-2\cdot3-9 > 2\cdot3-5$. f) Deoarece mulțimea, $\mathbb{Z}$ în care se caută soluțiile este infinită, pentru rezolvarea inecuației parcurgem cele patru etape de rezolvare, bazate pe proprietățile inecuațiilor:

1) *Separăm termenii* care conțin necunoscuta de termenii liberi. Rezultă inecuația $-2y-2y > 5-9$, $y \in \mathbb{Z}$

2) *Efectuăm calculele* și obținem inecuația $-4y > -4$, $y \in \mathbb{Z}$. 3) prin împărțirea ambilor membri ai inecuației la – 4 și schimbarea sensului inegalității, se obține $y < 1, y \in \mathbb{Z}$ și stabilim mulțimea soluțiilor inecuației: $S = \{...-4.-3.-2\} = \mathbb{Z}_- - \{-1\}$.

Activități de învățare

1. Scrieți fiecare din enunțurile următoare, folosind unul dintre simbolurile $<, >, \leq, \geq$:

a) Înălțimea h, a unei case, este cel puțin 3 m. b) Vârsta v, a unui adult, este mai mare de 18 ani.

c) Masa m, a unui pachet, este cel mult 4 kg. d) Grosimea x, a unei cărți, este mai mică de 2 cm.

2. Pentru fiecare subpunct al problemei 1., ilustrați, printr-un exemplu, relația scrisă.

3. Se consideră inecuațiile:

a) $x+5<4,\ x \in \mathbb{Z}$ b) $2\cdot x+1>20,\ x \in \mathbb{Z}$; c) $-3\cdot x \leq -9,\ x \in \mathbb{Z}$ d) $4\cdot x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}$.

3.1. Scrieți literele care numesc inecuațiile pentru care numărul -3 este soluție.

3.2. Scrieți literele care numesc inecuațiile pentru care numărul 0 nu este soluție.

4. Pe axa numerelor, reprezentați punctele $A(-6)$ și $B(-2)$. Reprezentați, apoi, pe axă, toate punctele $E(x)$ cu proprietatea că $x > -6$ și $x < -2$.

5. Determinați toate numerele întregi *x*, pentru fiecare din situațiile:

$x \geq -3$ și $x < 1$; b) $x > -5$ și $x < 1$; c) $x \geq -4$ și $x \in \mathbb{Z}_-$.

6. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, inecuațiile:

a) $x-5>0$; b) $2\cdot x+5<7$; c) $3\cdot x \geq -15$;

d) $-4\cdot x \geq 12$; e) $2\cdot x-1 \leq 11$; f) $-6+3\cdot x < x$.

7. Dintre numerele întregi $-3, 5, -7, 11, 4, -10$, alegeți-le pe cele care sunt soluții ale inecuației $|x-2|<9$.

8. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, inecuațiile:

a) $|x|<4$; b) $|x|\le 3$; c) $|x|>5$; d) $|x|\le -6$;

e) $|x|>-7$; f) $|x+1|<1$; g) $|x-1|\le 2$; h) $|2\cdot x|<6$.

9. Discutați cu colegul/colega de bancă și justificați, următoarele afirmații:

a) Dacă x este număr natural nenul, atunci $-x<0$;

b) Dacă y este număr întreg negativ, atunci $1-y>1$.

10. Determinați numerele întregi negative a, b, c, știind că $(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)<9$.

3.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor în contextul numerelor întregi

Rezolvăm și descoperim

În multe situații,unele probleme din viața cotidiană se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor. Descoperiți în cele ce urmează, câteva aplicații.

1. În două lăzi, un vânzător are 96 kg de mere. El sortează merele și pune 6 kg din prima ladă în lada a doua. Calculați câte kilograme de mere au fost la început în fiecare ladă.

Rezolvare		*Etapele rezolvării*
Notăm cu x cantitatea de mere aflată la început în prima lada.	←	**1.** stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor
cantitatea de mere aflată la început în lada a doua: $96-x$; din prima ladă se scot 6 kg și rămân $x-6$ kg. cantitatea de mere aflată acum în lada a doua este $96-x+6$; Rezultă ecuația: $x-6=96-x+6$	←	**2.** obţinerea ecuaţiei
$x+x=96+6+6$ $2x=108$ $x=108:2$ $x=54$	←	**3.** rezolvarea ecuaţiei
La început, în prima ladă, au fost 54 kg de mere, iar în a doua, au fost 48 kg de mere. *Verificare:* $54+48=96$ (kg) După sortarea merelor, în prima lada rămân: $54-6=48$ (kg), tot atâtea kilograme de mere câte au fost la început în lada a doua.	←	**4.** interpretarea rezultatelor, eventual verificarea lor

2. Localitățile A şi B sunt la o distanţă de 200 km una faţă de alta. În localitatea A, se produce făină la preţul de 2 500 lei tona, iar în localitatea B se produce făină la preţul de 2 564 lei tona. O brutărie se află între cele două localităţi, în punctul C. Pentru aprovizionarea cu o tonă de făină, brutăria plătește 8 lei pe km. Stabiliți condiția sau condițiile ca aprovizionarea cu o tonă de făină a brutăriei să fie mai ieftină, dacă se face din localitatea B.

Rezolvare. Observăm că un element important al costurilor de aprovizionare îl reprezintă costul transportului. Acest cost depinde de distanța la care se află brutăria față de sursă de aprovizionare cu făină. Notăm cu x distanța dintre brutărie și localitatea B, exprimată în km. Atunci, distanța dintre brutărie și localitatea A, exprimată în kilometri, este egală cu $200-x$.

Costurile de aprovizionare cu o tonă de făină, exprimate în lei, din:	
localitatea A	localitatea B
cost pentru o tonă de făină: 2500	cost pentru o tonă de făină: 2564
cost-transport făină: $8 \cdot (200 - x)$	cost transport făină: $8 \cdot x$
Total: $2500 + 8 \cdot (200 - x)$	Total: $2564 + 8 \cdot x$

Pentru ca aprovizionarea, cu o tonă de făină, să fie mai ieftină dacă se face din localitatea B trebuie ca: $2564 + 8 \cdot x \leq 2500 + 8 \cdot (200 - x)$. Din rezolvarea inecuației rezultă $x \leq 96$. Deci, aprovizionarea cu făină din localitatea B, va fi mai ieftină, numai dacă brutăria se află la o distanță mai mică de 96 km, față de această localitate. În caz contrar, aprovizionarea va fi mai ieftină dacă se va face din localitatea A.

Reținem

Etapele rezolvării problemelor cu ajutorul ecuațiilor

- *stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor*
- *obținerea ecuației*
- *rezolvarea ecuației*
- *interpretarea rezultatelor, eventual verificarea lor*

Aplicăm cunoștințele

1. Pe trei rafturi ale unei biblioteci sunt 129 volume. Pe raftul al doilea sunt de două ori mai multe volume decât primul raft și cu 4 mai puține decât pe al treilea raft. Câte volume sunt pe fiecare raft?

Ne verificăm

1. Notăm cu x numărul volumelor de pe primul raft. Numărul volumelor de pe al doilea raft este egal cu $2 \cdot x$, iar numărul volumelor de pe al treilea raft este egal cu $2 \cdot x + 4$. Cum în total sunt 129 volume, rezultă ecuația: $x + 2 \cdot x + (2 \cdot x + 4) = 129$. Rezolvând ecuația se obține $x = 25$. Prin urmare pe primul raft sunt 25 volume, pe raftul al doilea sunt 50 volume, iar pe raftul al treilea sunt 54 volume.

Activități de învățare

1. Suma dintre un număr întreg și dublul opusului său este 13. Determinați acest număr.

2. La fiecare dintre numerele $-15, -8$ respectiv 23, se adună un număr întreg, a. Media aritmetică a numerelor obținute este -3. Aflați numărul a.

3. Suma a trei numere întregi consecutive este -15. Calculați produsul acestor numere.

4. La un concurs de matematică, se dau spre rezolvare, 5 probleme. Regulamentul concursului prevede următoarele: pentru fiecare problemă rezolvată corect, se acordă 7 puncte, pentru o problemă neabordată, se scade un punct iar pentru o problemă pe care o greșește se scad 5 puncte. Vlad a obținut, la acest concurs, 15 puncte. Câte probleme a rezolvat corect?

5. Aflați un număr întreg știind că, dacă îl micșorăm cu 10, obținem un număr întreg pozitiv, mai mic decât 3.

6. Ana a economisit 380 de lei și vrea să cumpere trei obiecte care au același preț. Constată că îi lipsesc 22 de lei. Care este prețul unui obiect?

7. Petre a primit de la părinți o sumă de bani ca să cumpere coperți pentru manualele școlare. Dacă ar cumpăra coperți pentru 7 manuale, ar mai avea nevoie de 6 lei. Dacă ar cumpăra pentru toate cele 11 manuale, atunci i-ar trebui de două ori mai mulți bani.
Aflați ce sumă a primit Petre și cât costă o copertă.

8. Aflați cel mai mare număr întreg pentru care, dacă la dublul său adunăm -24, obținem un număr întreg negativ.

9. Diferența a două numere întregi este -30.
Aflați numerele știind că unul dintre ele este triplul celuilalt.

10. Suma numerelor $2 \cdot x - 3$, $x + 7$ și $-6 \cdot x + 10$ este 11.
Calculați produsul acestor numere.

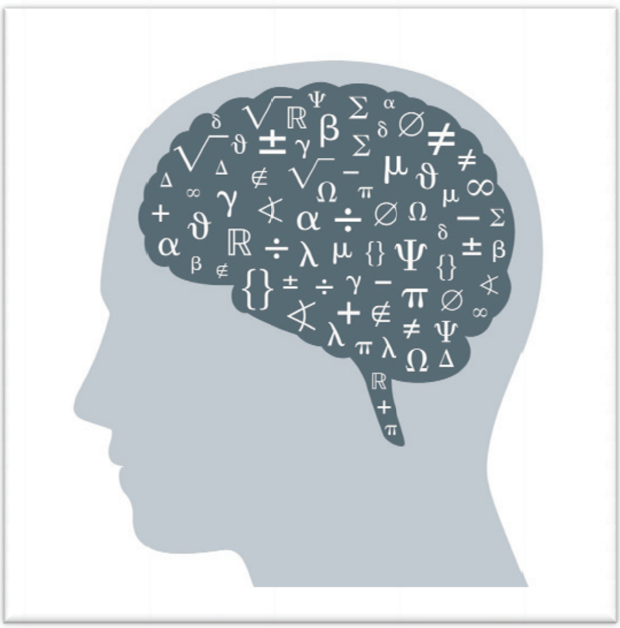
11. Produsul numerelor întregi $2 \cdot x - 1$, $4 \cdot x + 1$ și $5 - x$ este 0.
Calculați suma acestor numere.

12. Aflați numerele întregi negative care, prin înmulțire cu -5, dau un produs cel mult egal cu 20.

13. Produsul a 2018 numere întregi consecutive este 0.
   a) Aflați valoarea minimă și valoarea maximă pe care o poate lua suma acestor numere.
   b) Stabiliți dacă suma celor 2018 numere poate fi egală cu -1.

14. Determinați perechile de numere întregi pentru care suma și produsul lor sunt numere întregi egale.

15. Aflați numărul întreg care, dacă s-ar aduna la fiecare dintre numerele $4, 10, 11, 24$, s-ar obține patru numere care pot fi termenii unei proporții.



Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

5 p	**1.** Dacă numerele întregi $-3, a, b, c, d, 2$ sunt scrise în ordine crescătoare, atunci $a+d=b+d$.	☐
5 p	**2.** Opusul numărului $-3+5-7$ este -15.	☐
5 p	**3.** Suma a două numere întregi negative este un număr întreg negativ.	☐
5 p	**4.** Produsul a trei numere întregi consecutive dintre care doar unul este negativ, este egal cu 0.	☐
5 p	**5.** Dacă $a^3=-1000$, atunci $a=10$.	☐
5 p	**6.** Dacă numărul $x^2 \cdot y$ este întreg negativ, atunci $-y$ este un număr pozitiv.	☐

II. Uniţi, prin săgeţi, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsulcorespunzător, aflat în coloana B.

	A	B
5 p	**1.** $-36:(-6+12-18)=$	**a.** 81;
5 p	**2.** Rezultatul calculului $(-3)^2\cdot(-3)^3:\left(-3^2+6\right)$ este	**b.** 3;
5 p	**3.** $22-\left[-45:[-9]-(-4)^2\cdot(-2)-(-1)^4\right]=$	**c.** -81;
		d. 0;
5 p	**4.** Dacă $a=(-1)^n\cdot(-2)^n-2^n$, $n\in\mathbb{N}$, atunci a este egal cu	**e.** -14;

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 p **1.** Mulțimea $\{x\in\mathbb{Z} / |x|\le 2\}$, scrisă prin enumerarea elementelor este:

A. $\{0,1,2\}$; B. $\{-2,-1,0,1,2\}$; C. $\{-2,-1,0\}$; D. $\{-2,-1\}$.

10 p **2.** Suma dintre un număr întreg și opusul său este:

A. acel număr; B. -1; C. 0; D. 7.

10 p **3.** Rezultatul calculului $-3-(-2)+(-3+2)$ este egal cu :

A. 0; B. -1; C. -1; D. -2.

10 p **4.** Mulțimea $M=\left\{x\in\mathbb{Z}^* \middle| -3<x-1<2\right\}$ conține:

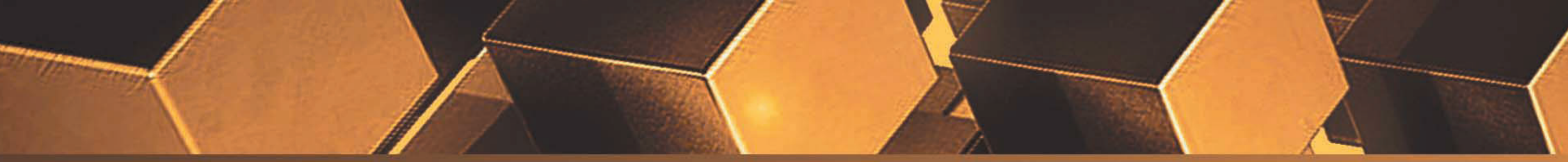
A. 2 nr. negative, 2 nr. pozitive; B. 1 nr. negativ, 2 nr. pozitive; C. 1 nr. negativ, 1 nr. pozitiv; D. 2 nr. negative 3 nr. pozitive.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

4

Mulțimea numerelor raționale

1. Noțiuni recapitulative
2. Număr raţional. Mulţimea numerelor raţionale
3. Reprezentarea numerelor raţionale pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr raţional. Compararea şi ordonarea numerelor raţionale
4. Adunarea și scăderea numerelor raţionale. Proprietăți
5. Înmulţirea și împărţirea numerelor raţionale. Proprietăți
6. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr raţional nenul. Reguli de calcul cu puteri
7. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor
8. Ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor



4.1. Noțiuni recapitulative

Ne amintim

1. Orice fracţie ordinară se scrie sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$ şi $n \neq 0$. Numărul *n* este *numitorul* fracţiei şi arată că întregul a fost împărţit în *n* părţi egale. O parte din cele *n* părţi egale se numeşte *unitate fracţionară*. Numărul *m* este numărătorul fracţiei şi arată câte unităţi fracţionare s-au luat în considerare.

Exemplu: Câteva batoane identice de ciocolată urmează să fie împărțite în mod egal unor copii. Se știe că, dacă fiecare baton este împărțit în trei părți egale, atunci fiecărui copil îi revin 7 părți (bucăți) de ciocolată. În această situație:

- *întregul* este batonul de ciocolată;
- *unitatea fracționară* este o parte din cele trei părți egale, adică o treime, ceea ce se reprezintă cu ajutorul fracției ordinare $\frac{1}{3}$. Prin fracția ordinară $\frac{7}{3}$ se arătă că fiecărui copil îi revin 7 unități fracționare de ciocolată. Rezultă:

$$\frac{7}{3}=7\cdot\frac{1}{3}=\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{1}+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$$

2. Orice fracţie ordinară poate fi transformată în fracţie zecimală, prin împărţirea numărătorului la numitor.

O fracție zecimală poate fi:	*Exemple:*		
- *fracție zecimală finită*:	2,04;	7,0;	7,32073;
- *fracție zecimală periodică simplă*:	1,(23);	14,(201);	34,(2);
- *fracție zecimală periodică mixtă*:	7,2(4);	21,31(5);	4,3(12);

Fracția zecimală rezultată prin împărțirea numărătorului unei fracții ordinare la numitorul acesteia nu poate avea perioada 9.

3. Orice fracție zecimală poate fi transformată în fracție ordinară.

Exemple:

$$1,(3)=1\frac{3^{(3}}{9}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$
$$2,(12)=2\frac{12^{(3}}{99}=\frac{2\cdot33+4}{33}=\frac{70}{33}$$
$$3,2(13)=3\frac{213-2}{990}=\frac{3\cdot990+211}{990}=\frac{3181}{990}$$

sau

$$1,(3)=\frac{13-1}{9}=\frac{12^{(3}}{9}=\frac{4}{3}$$
$$2,(12)=\frac{212-2}{99}=\frac{210^{(3}}{99}=\frac{70}{33}$$
$$3,2(13)=\frac{3213-32}{990}=\frac{3181}{990}$$

4. Operațiile cu fracții ordinare și cele cu fracții zecimale sunt: *adunarea*, *scăderea*, *înmulțirea*, *împărțirea și ridicarea la putere*.

Operația de adunare a fracțiilor ordinare presupune *aducerea fracțiilor la același numitor*. Dacă fracțiile ordinare nu au același numitor se procedează astfel:

a) *determinăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor date,* care va deveni numitorul comun;

b) *amplificăm fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun găsit și numitorul fracției respective.*

Exemplu: Pentru a calcula $\frac{7}{12}+\frac{1}{15}$ procedăm astfel: 1) cum $12=2^2\cdot 2$ și $15=3\cdot 5$ numitorul comun este $[12,15]=2^2\cdot 3\cdot 5=60$; 2) amplificăm fracția $\frac{7}{12}$ cu câtul dintre 60 și 12 adică cu 5 și obținem $^{5)}\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$; 3) amplificăm fracția $\frac{1}{15}$ cu câtul dintre 60 și 15 adică cu 4 și obținem $^{4)}\frac{1}{15}=\frac{4}{60}$. Deci suma numerelor $\frac{7}{12}$ și $\frac{1}{15}$ este $\frac{35}{60}+\frac{4}{60}=\frac{39^{(3}}{60}=\frac{13}{60}$.

5. Foarte importante sunt *regulile de calcul* și *ordinea efectuării operațiilor.*

Exemplu: Calculați: $7+\left\{32\cdot[0,(3)]^2:\frac{4}{9}-\frac{5}{2}\right\}\cdot\frac{1}{0,5}$.

Rezolvare: Deoarece exercițiul conține fracții zecimale periodice, vom transforma fracția zecimală periodică în fracție ordinară: $0,(3)=\frac{1}{3}$, calculăm și $^{10)}\frac{1}{0,5}=\frac{10}{5}=2$. Înlocuind, rezultă:

$$7+\left[32\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2:\frac{4}{9}-\frac{5}{2}\right]\cdot 2=7+\left(32\cdot\frac{1}{9}:\frac{4}{9}-\frac{5}{2}\right)\cdot 2=7+\left(\frac{32}{9}:\frac{4}{9}-\frac{5}{2}\right)\cdot 2=$$

$$=7+\left(\frac{32}{9}\cdot\frac{9}{4}-\frac{5}{2}\right)\cdot 2=7+\left(8-\frac{5}{2}\right)\cdot 2=7+\frac{11}{2}\cdot 2=18.$$

Aplicăm cunoștințele

1. Transformaţi fracţiile ordinare în fracţii zecimale finite: a) $\frac{15}{10}$; b) $\frac{1023}{100}$; c) $\frac{24}{1000}$; d) $\frac{127}{8}$.

2. Transformaţi fracţiile ordinare în fracţii zecimale periodice simple: a) $\frac{83}{3}$; b) $\frac{17}{9}$; c) $\frac{56}{27}$.

3. Transformaţi fracţiile ordinare în fracţii zecimale periodice mixte: a) $\frac{35}{18}$; b) $\frac{137}{72}$; c) $\frac{7}{12}$.

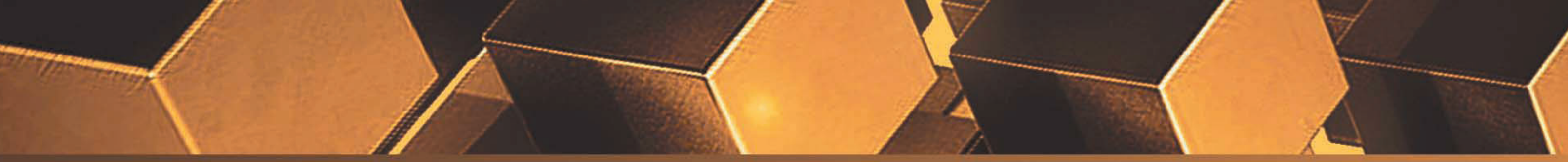
4. Transformaţi fracţiile zecimale în fracţii ordinare: a) 24,3; b) $2,(12)$; c) $7,5(3)$; d) 0,1(15).

5. Calculați : $1,5\cdot\left\{3+3,2\cdot\left[100\cdot 0,01+\frac{5}{2}\cdot\left(14-\frac{6}{5}:0,1\right)\right]\right\}-1,(3):0,(1)$.

Ne verificăm

1. a) 1,5; b) 10,23; c) 0,024; d) 15,875; **2.** a) 27,(6); b) 1,(8); c) 2,(074). **3.** a) 1,9(4); b) 1,902(7) c) 0,58(3)

4. d) $\frac{115-1}{990}=\frac{114^{(2}}{990}=\frac{57}{495}^{(3}=\frac{19}{165}$.



5. Succesiv, rezultă: $\left(14-\frac{6}{5}:0,1\right)=14-\frac{6}{5}\cdot 10=14-12=2$; $\left[100\cdot 0,01+\frac{5}{2}\cdot\left(14-\frac{6}{5}:0,1\right)\right]=$

$100\cdot 0,01+\frac{5}{2}\cdot 2=100\cdot\frac{1}{100}+5=1+5=6$;

$\left\{3+3,2\cdot\left[100\cdot 0,01+\frac{1}{5}\cdot\left(14-\frac{6}{5}:0,1\right)\right]\right\}=3+3,2\cdot 6=3+\frac{32}{10}\cdot 6=3+\frac{96}{5}=\frac{111}{5}$;

$1,5\cdot\left\{3+3,2\cdot\left[100\cdot 0,01+\frac{5}{2}\cdot\left(14-\frac{6}{5}:0,1\right)\right]\right\}-1,(3):0,(1)=\frac{3}{2}\cdot\frac{111}{5}-\frac{12}{9}:\frac{1}{9}=33,3-12=21,3$.

4.2. Număr raţional. Mulţimea numerelor raţionale. Forme de scriere a numerelor raţionale

Rezolvăm şi descoperim

1. Orice pereche de numere întregi m şi n, unde $n\neq 0$, scrisă $\frac{m}{n}$, se numeşte *număr raţional.* Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z} \text{ şi } n\neq 0\right\}$

a) Justificaţi de ce $\frac{+3}{-2}$ este număr raţional şi de ce $\frac{-1}{0}$ nu este număr raţional.

b) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

1) $\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$; 2) $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$; 3) $\frac{-5}{0}\in\mathbb{Q}$; 4) $\frac{0}{-5}\in\mathbb{Q}$; 5) $\frac{4}{3}\notin\mathbb{Q}$; 6) $\frac{-6}{3}\notin\mathbb{Q}$; 7) $\frac{-2}{-1}\notin\mathbb{Q}$.

2. a) Pe mulţimea $\mathbb{Q}$, a numerelor raţionale, se defineşte egalitatea a două numere raţionale: $\frac{m}{n}, n\neq 0$ şi $\frac{p}{q}, q\neq 0$, astfel, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ dacă $m\cdot q=n\cdot p$. Pe baza acestei definiţii, justificaţi egalităţile: 1) $\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$; 2) $\frac{-3}{2}=\frac{3}{-2}$; 3) $\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$; 4) $\frac{-1}{-2}=\frac{4}{8}$.

b) Dacă m şi n sunt două numere naturale şi $n\neq 0$, arătaţi că $\frac{-m}{-n}=\frac{m}{n}$ şi $\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n}$.

3. Numerele raţionale $\frac{-m}{n}$ şi $\frac{m}{-n}$ fiind egale, vor fi notate cu $-\frac{m}{n}$. Prin urmare, orice număr raţional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$, sau $-\frac{m}{n}$ unde, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ şi $n\neq 0$. În fiecare din scrierile $\frac{m}{n}$ şi $-\frac{m}{n}$, fracţia $\frac{m}{n}$ este o *fracţie ordinară* care, prin algoritmul de împărţire, poate fi transformată într-o *fracţie zecimală* (*finită* sau *periodică*). Această observaţie este foarte importantă deoarece toate cunoştinţele învăţate despre fracţii (amplificarea, simplificarea, aducerea la acelaşi numitor şi toate celelalte) rămân valabile.

a) Arătaţi că următoarele fracţii reprezintă acelaşi număr raţional:

1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{-6}$; $-0,5$; $\frac{-7}{14}$; 2) $\frac{3}{2}$; $\frac{-6}{-4}$; $1,5$; $\frac{21}{14}$.

b) Scrieţi numerele raţionale: $-\frac{1}{6}$; $\frac{17}{3}$; $\frac{-5}{12}$ şi $\frac{3}{4}$ sub formă de fracţii zecimale.

c) Scrieţi numerele raţionale: –1,(3); 2,(12); –0,25 şi 2,1(3) sub formă de fracţii ordinare.

4. Pentru orice număr întreg m, $\frac{m}{1}=m$. De exemplu: $\frac{5}{1}=5$, deoarece $5:1=5$ şi $\frac{-3}{1}=-\frac{3}{1}=-3$, deoarece $\frac{3}{1}=3$. Egalitatea $m=\frac{m}{1}$ arată că orice număr întreg m este raţional, adică mulţimea numerelor întregi este o submulţime a mulţimii numerelor raţionale $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Cum orice număr natural este întreg, adică $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ *rezultă incluziunile* $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

a) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

1) $2\in\mathbb{N}$; 2) $2\in\mathbb{Z}$; 3) $2\in\mathbb{Q}$; 4) $-3\in\mathbb{N}$; 5) $-3\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{N}$; 7) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Z}$; 8) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$.

b) Daţi trei exemple de numere întregi, care nu sunt naturale.
c) Daţi trei exemple de numere raţionale, care nu sunt întregi.

Rezumăm cunoştinţele

- ***Un număr raţional*** *este o pereche de numere întregi m şi n,* $n\neq 0$, *scrisă sub forma* $\frac{m}{n}$.
- Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z} \text{ şi } n\neq 0\right\}$.
- Două numere raționale, $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$, sunt egale, prin definiție, dacă $mq=np$.

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow mq=np.$$

- Numerele raționale $\frac{-m}{n}$, $\frac{m}{-n}$ și $-\frac{m}{n}$ sunt egale: $\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n}=-\frac{m}{n}$.
- Orice număr rațional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ și $n\neq 0$.

În fiecare dintre scrierile $\frac{m}{n}$ și $-\frac{m}{n}$, fracţia $\frac{m}{n}$ este o fracţie ordinară care, prin algoritmul de împărţire, poate fi transformată într-o fracţie zecimală (finită sau periodică).
- Orice număr natural este întreg și orice număr întreg este număr rațional: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

5. Se consideră mulţimile $A = \{-1, 2, -3\}$ şi $B = \{2, -4, 1\}$. Scrieţi elementele mulţimii: $C=\left\{x \middle| x=\frac{m}{n},\ m\in A \text{ şi } n\in B\right\}$.

6. Scrieţi următoarele numere raţionale sub formă zecimală: $\frac{7}{10}$; $\frac{+2}{+5}$; $\frac{-4}{-3}$; $\frac{-5}{+6}$; $\frac{+3}{-2}$; $-\frac{25}{12}$.

7. Scrieţi următoarele numere raţionale, sub formă de fracţii ordinare: –2,7; 1,(12); –0,(23); 2,1(3); –3,2(4).

Ne verificăm

1. a) $\frac{+3}{-2}$ este număr raţional pentru că +3 şi −2 sunt numere întregi cu $-2\neq 0$, şi $\frac{-1}{0}$ nu este număr raţional pentru că numitorul este zero. b) 1) $\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$, (F); 2) $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$, (A); 3) $\frac{-5}{0}\in\mathbb{Q}$, (F); 4) $\frac{0}{-5}\in\mathbb{Q}$, (A); 5) $\frac{4}{3}\notin\mathbb{Q}$ (F); 6) $\frac{-6}{3}\notin\mathbb{Q}$, (F); 7) $\frac{-2}{-1}\notin\mathbb{Q}$, (F). **2.** a) 1) $\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$, pentru că $2\cdot 12=4\cdot 6$; 2) $\frac{-3}{2}=\frac{3}{-2}$, pentru că $(-3)\cdot(-2)=2\cdot 3$; 3) $\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$ pentru că $(-5)\cdot 6=5\cdot(-6)$; 4) $\frac{-1}{-2}=\frac{4}{8}$ pentru că $(-1)\cdot 8=(-2)\cdot 4$; b) $\frac{-m}{-n}=\frac{m}{n}$ pentru că $(-m)\cdot n=-m\cdot n=-n\cdot m=(-n)\cdot m$ şi $\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n}$ pentru că $(-m)\cdot(-n)=+m\cdot n=m\cdot n=n\cdot m$. **3.** 1) a) Fracțiile $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{-6}$; $-0{,}5$ și $\frac{-7}{14}$ reprezintă același număr rațional $-\frac{1}{2}$ deoarece: într-adevăr $\frac{3}{-6}=-\frac{3^{(3}}{6}=-\frac{1}{2}$; $-0{,}5=-\frac{5^{(5}}{10}=-\frac{1}{2}$ și $\frac{-7}{14}=-\frac{7^{(7}}{14}=-\frac{1}{2}$. Deci $-\frac{1}{2}=\frac{3}{-6}=-0{,}5=\frac{-7}{14}$ b) Fracțiile $\frac{3}{2}$; $\frac{-6}{-4}$; 1,5; $\frac{21}{14}$ reprezintă numărul rațional $\frac{3}{2}$ deoarece $\frac{-6}{-4}=1{,}5=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$. c) $-1{,}(3)=-\frac{13-1}{9}=-\frac{4}{3}$;
$2{,}(12)=\frac{212-2}{99}=\frac{210^{(3}}{99}=\frac{70}{33}=2\frac{4}{33}$; $-0{,}25=-\frac{25^{(25}}{100}=-\frac{1}{4}$; $2{,}1(3)=\frac{213-21}{90}=\frac{192^{(6}}{90}=2\frac{2}{15}$

4. a) 1) $2\in\mathbb{N}$ (A); 2) $2\in\mathbb{Z}$ (A); 3) $2\in\mathbb{Q}$ (A); 4) $-3\in\mathbb{N}$ (F); 5) $-3\in\mathbb{Z}$ (A); 6) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{N}$ (F); 7) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Z}$ (F); 8) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ (A). b) -3, -4, -1; c) $\frac{1}{2},-\frac{2}{3},+\frac{7}{9}$. **5.** $C=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{4};1;2;-\frac{3}{2};\frac{3}{4};-3\right\}$; $-1=\frac{-1}{1}$

6. $\frac{7}{10}=0{,}7$; $\frac{+2}{+5}=0{,}4$; $\frac{-4}{-3}=1{,}(3)$; $\frac{-5}{+6}=-0{,}8(3)$; $\frac{+3}{-2}=-1{,}5$; $-\frac{25}{12}=-2{,}08(3)$.

7. $-2{,}7=-2\frac{7}{10}$; $1{,}(12)=\frac{112-1}{99}=\frac{111^{(3}}{99}=\frac{37}{33}=1\frac{7}{33}$; $-0{,}(23)=-\frac{23}{99}$; $2{,}1(3)=\frac{213-21}{90}=\frac{192^{(6}}{90}=\frac{32}{15}=2\frac{2}{15}$; $-3{,}2(4)=-\frac{324-32}{90}=-\frac{292^{(2}}{90}=-\frac{146}{45}=-3\frac{11}{45}$.

Activități de învățare

1. Scrieți câte trei reprezentanți (fracții), pentru fiecare dintre numerele raționale:

a) $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) 1; d) -3.

2. Completați în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) $\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3}$ ☐; b) $\frac{-5}{-7}=-\frac{5}{7}$ ☐; c) $\frac{9}{-8}=-\frac{9}{8}$ ☐;

d) $\frac{0}{8}=\frac{0}{-5}$ ☐; e) $\frac{-6}{-11}=\frac{+6}{+11}$ ☐; f) $\frac{7}{-10}=\frac{7}{10}$ ☐.

3. Bogdan a scris pe caiet numerele: $-\frac{1}{8}, \frac{5}{-3}, \frac{16}{4}, -1, \frac{-15}{-7}$. Colegii săi, David și Vlad, au următoarea conversație:

– David: *Bogdan a scris trei numere raționale negative.*

– Vlad: *Nu, sunt trei numere raționale pozitive și doar două negative.*

Observați cu atenție numerele scrise de Bogdan și decideți cine are dreptate. Justificați răspunsul dat.

4. Completați, în spațiile libere din tabelul următor, cuvântul *da* atunci când afirmația, scrisă în coloana întâi, este adevărată și cuvântul *nu*, dacă această afirmație este falsă, urmând modelul din coloana a doua a tabelului.

a	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	2	$\frac{-21}{3}$	$\frac{-10}{-2}$	-3	$\frac{11}{20}$	0	$\frac{+39}{+7}$
$a\in\mathbb{N}$;	*nu*								
$a\in\mathbb{Z}$;	*nu*								
$a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$;	*nu*								
$a\in\mathbb{Q}$;	*da*								
$a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.	*da*								

5. Scrieți următoarele numere raționale sub formă de fracții zecimale:

a) $\frac{9}{2}$; b) $\frac{7}{4}$; c) $-\frac{15}{8}$; d) $\frac{3}{5}$; e) $-\frac{7}{10}$;

f) $\frac{1}{3}$; g) $-\frac{1}{6}$; h) $\frac{5}{9}$; i) $-\frac{37}{12}$; j) $\frac{17}{14}$;

k) $\frac{169}{11}$ l) $\frac{131}{25}$ m) $-\frac{93}{100}$; n) $\frac{-102}{55}$; o) $\frac{67}{100}$.

6. Scrieți următoarele numere raționale sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) $0,24$; b) $2,8$; c) $-15,625$; d) $-1,16$;

e) $0,(3)$; f) $-1,(24)$; g) $2,1(3)$; h) $0,(09)$;

i) $\overline{a,bc}$; j) $\overline{a,(bc)}$; k) $-3,33(6)$; l) $\overline{a,b(c)}$.

7. Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{7}{2}; -\frac{5}{3}; -\frac{9}{4}; +\frac{11}{6}; -1\frac{5}{8}; -\frac{17}{10^2}; \frac{-44}{-72}; \frac{42}{27}\right\}$.

a) Determinați mulțimea

$B=\{x\in A \mid x$ se poate scrie ca fracție zecimală finită$\}$.

b) Determinați mulțimea

$C=\{x\in A \mid x$ se poate scrie ca fracție zecimală periodică$\}$.

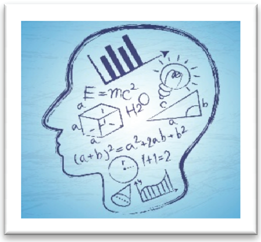
8. Determinați valorile numărului n pentru fiecare din situațiile:

a) $n\in\mathbb{N}$ și $\frac{14}{n}\in\mathbb{N}$; b) $n\in\mathbb{Z}$ și $-\frac{25}{n}\in\mathbb{N}$;

c) $n\in\mathbb{N}$ și $\frac{10}{6-n}\in\mathbb{Z}$; d) $n\in\mathbb{N}$, $n<10$ și $\frac{30}{n}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$;

9. Arătați că numărul rațional $\frac{\overline{aaa}}{375}$ se scrie sub formă de fracție zecimală finită, oricare ar fi cifra a, în baza 10.

10. Arătați că numerele $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ și $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$ sunt numere naturale, oricare ar fi n, număr natural.



11. Pentru numărul rațional $\frac{89}{440}$:

a) scrieți fracția zecimală corespunzătoare;

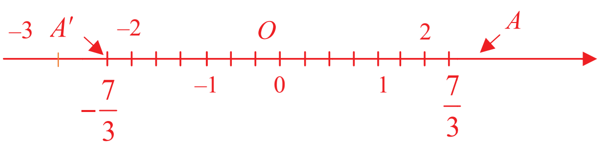
b) determinați a 20-a zecimală a acestei fracții;

c) calculați suma primelor 20 de zecimale ale fracției.

4.3. Reprezentarea numerelor raţionale pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr raţional. Compararea şi ordonarea numerelor raţionale

Rezolvăm

1. Să reprezentăm pe axa numerelor numărul raţional $\frac{7}{3}$. Alegem convenabil unitatea de măsură (um), , se împarte în 3 părţi egale și se iau în considerare, 7 asemenea părţi:



Pentru a reprezenta numărul raţional $-\frac{7}{3}$ procedăm exact la fel, numai că acest număr raţional fiind negativ, ca şi în cazul unui număr întreg, va fi desenat pe axă, la stânga originii. Numărului 0 îi corespunde punctul O, care este originea axei numerelor. Pe axa numerelor, numărului $\frac{7}{3}$ îi corespunde punctul A, iar numărului $-\frac{7}{3}$ îi corespunde punctul A'. Prin urmare, coordonatele punctelor A', O şi A sunt $-\frac{7}{3}$, 0 şi $\frac{7}{3}$. Se scrie $A'\left(-\frac{7}{3}\right)$, $O(0)$ și $\left(\frac{7}{3}\right)$. Atunci $OA = OA' = \frac{7}{3}$ um, iar despre numerele raționale $-\frac{7}{3}$ și $\frac{7}{3}$ se spune că sunt *numere raționale opuse*.

Dacă notăm cu x un număr rațional oarecare și cu P punctul corespunzător acestuia pe axa numerelor, atunci *modulul numărului rațional* x este distanța OP. Notăm $|x| = OP$.

Exemplu: $\left|-\frac{7}{3}\right| = OA' = \frac{7}{3}$ și $\left|\frac{7}{3}\right| = OA = \frac{7}{3}$. Prin urmare, două numere raționale opuse au același modul.

Pentru un număr rațional oarecare notat cu x, opusul acestuia se notează cu $-x$. De asemenea, rezultă că opusul numărului rațional $-x$, este numărul rațional x, adică, $-(-x) = x$.

2. Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 4 cm reprezentaţi pe axă numerele: $\frac{-3}{8}$; $\frac{+5}{8}$; – 0,75; +0,25; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; – 0,125.

3. a) Scrieţi modulul următoarelor numerele raţionale: $-\frac{3}{4}$; $\frac{-5}{+13}$; $\frac{2}{-17}$; $\frac{-7}{-19}$; $\frac{1}{5}$; -3,1(3).

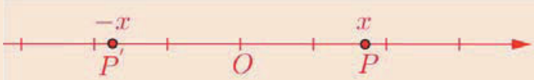
b) Scrieţi opusul următoarelor numerele raţionale: –0,1(3); $\frac{2}{-7}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{-5}{-11}$; 3,(6); 0,75; –1,7.

Observăm și demonstrăm

Cum orice număr raţional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$, definim *mulţimea numerelor raţionale negative,* notată cu $\mathbb{Q}$ și *mulţimea numerelor raţionale pozitive,* notată cu $\mathbb{Q}_+$. Vom scrie: $\mathbb{Q}_- = \left\{-\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Deci: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

Rezumăm cunoștințele

• *Opusul* unui număr rațional x, este numărul rațional –*x*. Opusul numărului rațional –*x* este numărul rațional *x*, adică, $-(-x) = x$.



• Numerele raționale *se pot reprezenta pe axa numerelor.*

– pe axa numerelor, oricărui număr rațional *x* i se asociază un punct *P*. Spunem că punctul *P* are coordonata *x* și scriem *P*(*x*);

– distanța de la punctul *P* la originea axei se numește *modulul numărului rațional* sau *valoarea absolută a numărului rațional x* și notăm $|x| = OP$, respectiv, distanța de la punctul P' la originea axei se numește *modulul numărului rațional –x* sau *valoarea absolută a numărului rațional –x* și notăm $|-x| = OP'$. Cum $OP = OP'$, rezultă $|x| = |-x|$

• Mulţimea numerelor raţionale negative se notează cu $\mathbb{Q}_-$, iar mulţimea numerelor raţionale pozitive se notează cu $\mathbb{Q}_+$.

$$\mathbb{Q}_- = \left\{-\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\};\ \mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\};\ \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+.$$

• Pe mulțimea numerelor raționale se definesc relațiile $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ care permit compararea și ordonarea acestor numere:

- dintre două numere raționale cel mai mic este reprezentat pe axa numerelor în stânga;
- două numere raționale, pozitive, *x* și *y*, se compară după regulile învățate în clasa a V-a;
- pentru două numere raționale negative, *x* și *y*, $x < y$, dacă și numai dacă $|x| > |y|$;

oricare ar fi două numere raționale, *x* și *y*, avem: $x < y$ sau $x = y$ sau $x > y$.

• Prin relația de ordine $x \leq y$ înțelegem $x < y$ sau $x = y$ și are următoarele proprietăți:

- este *reflexivă*: oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$, $x \leq x$;
- *este tranzitivă*: oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$, dacă $x \leq y$ *și* $y \leq z$ atunci $x \leq z$;
- *este antisimetrică*: oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$, dacă $x \leq y$ și $y \leq x$ atunci $x = y$.

Aplicăm cunoștințele

4. a) Reprezentați pe o axă a numerelor, numerele raționale: $1; -1{,}5; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -0{,}(6); \quad -\frac{1}{6}$.

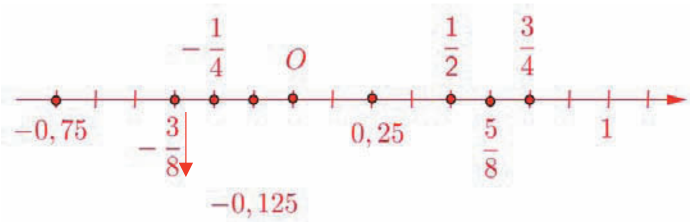
b) Scrieți numerele de la subpunctul a) în ordine crescătoare.

5. Copiați, înlocuind caseta alăturată cu (A) dacă afirmația este adevărată și cu (F) dacă afirmația este falsă:

a) $2 \in \mathbb{Q}_+^*$	b) $0 \in \mathbb{Q}_-^*$	c) $0 \in \mathbb{Q}_+^*$	d) $-7 \in \mathbb{Q}_-^*$
e) $\frac{-1}{-2} \in \mathbb{Q}_+^*$	f) $\frac{-7}{+3} \in \mathbb{Q}_-^*$	g) $\frac{+9}{-7} \in \mathbb{Q}_+^*$	h) $\frac{-3}{-4} \in \mathbb{Q}_-^*$
i) $1{,}7 \in \mathbb{Q}_+^*$	j) $-1{,}(3) \in \mathbb{Q}_-^*$	k) $2{,}1(2) \in \mathbb{Q}_+^*$	e) $1{,}(4) \in \mathbb{Q}_-^*$

Ne verificăm

2. Segmentul cu lungimea de 4 cm, care este unitatea de măsură, îl împărțim în 8 păți egale. Prin urmare unitatea fracționară este $\frac{1}{8}$. Deoarece: $\frac{-3}{8} = -\frac{3}{8}$; $\frac{+5}{8} = \frac{5}{8}$; $-0{,}75 = \; = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$; $+0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; $-\frac{1}{4} = -\frac{2}{8}$; $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $-0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$, rezultă următoarea reprezentare grafică :

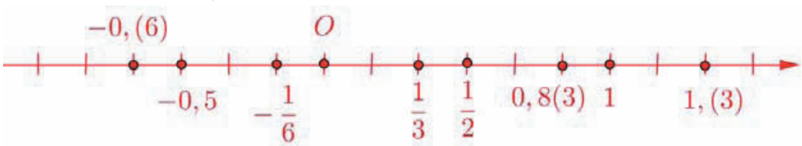


3. a) $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$; $\left|\frac{-5}{+13}\right| = \left|-\frac{5}{13}\right| = \frac{5}{13}$; $\left|\frac{2}{-17}\right| = \frac{2}{17}$; $\left|\frac{-7}{-19}\right| = \left|\frac{7}{19}\right| = \frac{7}{19}$; $\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$; $|-3{,}1(3)| = 3{,}1(3)$

b)

Numărul	$-0{,}1(3)$	$\frac{2}{-7}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-5}{-11}$	3,(6);	0,75	–1,7.
Opusul numărului	$0{,}1(3)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{11}$	–3,(6);	–0,75	1,7.

4. Deoarece $0{,}8(3) = \frac{5}{6}$; $1 = \frac{6}{6}$; $-0{,}5 = -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $-0{,}(6) = -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$ și $1{,}(3) = \frac{8}{6}$ vom alege ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 3 cm pe care îl împărțim în șase părți egale. Prin urmare unitatea fracționară este $\frac{1}{6}$. Rezultă următoarea reprezentare grafică :



5. a) $2 \in \mathbb{Q}_+$ (A) b) $0 \in \mathbb{Q}_-$ (F) c) $0 \in \mathbb{Q}_+$ (F) d) $-7 \in \mathbb{Q}_-$ (A)

e) $\frac{-1}{-2}\in\mathbb{Q}_+$ (A) f) $\frac{-7}{+3}\in\mathbb{Q}_-$ (A) g) $\frac{+9}{-7}\in\mathbb{Q}_+$ (F) h) $\frac{-3}{-4}\in\mathbb{Q}_-$ (F) i) $1,7\in\mathbb{Q}_+$ (A) j) $-1,(3)\in\mathbb{Q}_-$ (A)
k) $2,1(2)\in\mathbb{Q}_+$ (A) l) $1,(4)\in\mathbb{Q}_-$ (F) .

Activități de învățare

1. Se consideră mulțimile $A=\{-4,\ 0,\ 2\}$ și $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 4\}$.

a) Determinați mulțimea $C=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in A \text{ si } b\in B\right\}$.

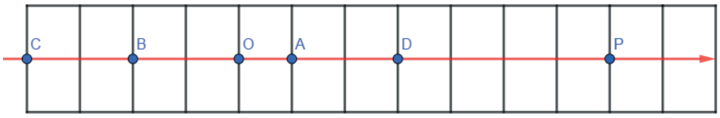
b) Determinați numărul elementelor mulțimilor $C\cap\mathbb{Q}_+$ și $C\cap\mathbb{Q}_-$.

2. Reprezentați pe axa numerelor punctele care au coordonatele:

a) $-2;\ 0,5;\ -\frac{7}{4},\ +1,25;\ -1,(3)$; c) $+10;\ -20;\ -5;\ +7,5$.

b) $0,1;\ -0,2;\ +0,(3);\ -1,1;\ +1;\ 0$;

3. Precizați coordonatele punctelor B,C,D,P, din figura alăturată, știind că punctul O este originea axei de coordonate iar punctul A are abscisa 1.



4. Reprezentați pe axa numerelor, cu unitatea de măsură $1cm$, punctele $A(-1)$ și $B(-3)$. Pe segmentul AB, reprezentați punctele M,N,P, astfel ca $AM\equiv MN\equiv NP\equiv PB$. Scrieți apoi, coordonatele punctelor M,N respectiv P.

5. Enumerați numerele întregi care au proprietatea:

a) Au valoarea absolută egală cu 2.

b) Au modulul mai mic decât 3.

c) Au valoarea absolută cuprinsă între 2 și 5.

6. Completați spațiile libere astfel încât să aibă loc egalitățile:

a) $|-7|=\ldots$; b) $|+1,76|=\ldots$; c) $|-2,0(4)|=\ldots$;

d) $\left|-3\frac{1}{5}\right|=\ldots$; e) $\left|\frac{-8}{-4}\right|=\ldots$; f) $|0|=\ldots$;

g) $|a+b|=\ldots$ cu $a,b\in\mathbb{N}$; h) $|-a-1|=\ldots$ cu $a\in\mathbb{N}$; i) $|-a|=\ldots$ cu $a\in\mathbb{N}$.

7. Comparați numerele și completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile $<,>,=$, astfel ca afirmațiile să fie adevărate.

a) $\frac{1}{6}\ldots\frac{3}{19}$; b) $\frac{4}{9}\ldots\frac{7}{6}$; c) $-\frac{1}{8}\ldots 0$;

d) $\frac{8}{3}\ldots-\frac{11}{4}$; e) $\frac{9}{2}\ldots\frac{18}{4}$; f) $-\frac{4}{2}\ldots-6$;

g) $-\frac{4}{3}\ldots\frac{5}{4}$; h) $-2\frac{1}{3}\ldots-3\frac{1}{2}$; i) $0\ldots-2^2$.

8. a) Scrieți în ordine crescătoare numerele: $-2,4;+3,2;\ -3,8;\ +1,(3);\ 0;\ -4\frac{1}{2};-\frac{100}{20}$.

b)Scrieți în ordine descrescătoare numerele: $-2,13; -2,31; -3,12;\ \ 1,32;\ +3,21;\ -1,23$.

9. Determinați numerele întregi n pentru care au loc inegalitățile:

a) $\frac{1}{5} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{2} < \frac{n}{2} < \frac{22}{4}$;

c) $-\frac{1}{3} < \frac{n+2}{6} < \frac{3}{2}$; d) $-\frac{8}{9} < \frac{2 \cdot n - 1}{18} < -1,(6)$.

10. Comparați numerele raționale și completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile $<, >, =$, astfel ca afirmațiile să fie adevărate.

a) $8,12 \ldots 8,21$; b) $-2,73 \ldots -2,7$; c) $6,7 \ldots 6,71$;

d) $-1,2(5) \ldots -1,(25)$; e) $2,4344 \ldots 2,(43)$; f) $-\frac{59}{17} \ldots -\frac{61}{19}$.

11. Scrieți trei numere raționale cuprinse între $-7,7$ și $-7,(7)$.

12. Pentru fiecare dintre numerele raționale următoare, găsiți două numere întregi consecutive, unul mai mic și altul mai mare decât numărul dat.

a) $2\frac{1}{7}$; b) $-3\frac{2}{5}$; c) $101,(02)$;

d) $-13,14$; e) $\frac{707}{31}$; f) $-\frac{6^3 + 6^2 + 6^1 + 6^0}{36}$.

13. Se consideră numărul rațional $a = \frac{2 \cdot n + 7}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $a > \frac{69}{18}$.

b) Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $a < 2$.

14. Se consideră numerele întregi a și b, cu proprietățile $|a| \leq 2$ și $|b| = 6$.

a) Determinați toate valorile numerelor întregi a și b, descrise mai sus.

b) Scrieți toate numerele raționale de forma $\frac{a}{b}$, apoi ordonați-le crescător.

15. Stabiliți care dintre numerele x respectiv $\frac{1}{x}$ este mai mare, pentru fiecare din situațiile:

a) $x \in \mathbb{N}^*$; b) $x \in \mathbb{Z}_-^*$.

4.4. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți

Observăm și demonstrăm

1. Adunarea numerelor raționale reprezentate sub formă de fracții ordinare, se reduce la operații cu numere întregi. Astfel:

Suma a două numere raţionale $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$, unde m, n, p, q sunt numere întregi $n \neq 0$ și $p \neq 0$, este un număr raţional, notat $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$, care se poate obţine astfel: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$. Este evident, că $mq + np$ și nq sunt numere întregi și $nq \neq 0$.

Exemple:

$$+\frac{6}{3}=\frac{2\cdot3+4\cdot6}{4\cdot3}=\frac{6+24}{12}=\frac{30}{12};$$

$$\frac{2}{4}\left(-\frac{2}{4}\right)+\frac{6}{3}=\frac{-2}{4}+\frac{6}{3}=\frac{(-2)\cdot3+4\cdot6}{4\cdot3}=\frac{-6+24}{12}=\frac{18}{12};$$

$$\frac{2}{4}+\left(-\frac{6}{3}\right)=\frac{2}{4}+\left(\frac{-6}{3}\right)=\frac{2\cdot3+4\cdot(-6)}{4\cdot3}=\frac{6-24}{12}=\frac{-18}{12}=-\frac{18}{12};$$

$$\left(-\frac{2}{4}\right)+\left(-\frac{6}{3}\right)=\frac{-2}{4}+\left(\frac{-6}{3}\right)=\frac{(-2)\cdot3+4\cdot(-6)}{4\cdot3}=\frac{-6-24}{12}=\frac{-30}{12}=-\frac{30}{12};$$

$$\frac{-2}{-4}+\frac{-6}{-3}=\frac{(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot(-6)}{4\cdot3}=\frac{6+24}{12}=\frac{30}{12}.$$

Operaţia prin care se obţine suma a două numere raţionale se numeşte *adunarea numerelor raţionale*. Numerele care se adună se numesc *termenii sumei*.

Deoarece adunarea numerelor raţionale se reduce la operaţii cu numere întregi, pentru a aduna două numere raţionale procedăm astfel:

1) scriem cele două numere raţionale sub formă de fracţii ordinare, precedate sau nu de semnul – , numărătorii și numitorii, fiind numere naturale;
2) fracțiile ordinare precedate de semnul –, de forma $-\frac{m}{n}$, se vor scrie sub forma $\frac{-m}{n}$;
3) dacă este posibil, simplificăm fracțiile ordinare;
4) aducem fracțiile la același numitor;
5) numitorul sumei va fi numitorul comun, iar numărătorul sumei este suma numărătorilor.

Exemplu:

$\left(\frac{4}{-6}\right)+\left(\frac{-14}{-4}\right)=$	1) scriem cele două numere raţionale sub formă de fracţii ordinare precedate sau nu de semnul – şi cu numărătorii şi numitorii numere naturale $\frac{4}{-6}=-\frac{4}{6}$ şi $\frac{-14}{-4}=\frac{14}{4}$;
$=\left(-\frac{4}{6}\right)+\frac{14}{4}=$	2) fracția ordinară $-\frac{4}{6}$ o scriem sub forma $\frac{-4}{6}$;
$=\frac{-2}{3}+\frac{7}{2}=$	3) simplificăm fracțiile ordinare: $\frac{-4}{6}^{(2}=\frac{-2}{3}$ și $\frac{14}{4}^{(2}=\frac{7}{2}$;
$=\frac{-2}{3}+\frac{7}{2}=$	4) aducem la același numitor;
$=\frac{-4}{6}+\frac{21}{6}=$	5) scriem numitorul comun, iar la numărător scriem suma numărătorilor;
$=\frac{-4+21}{6}=\frac{17}{6}$	Deci $\left(\frac{4}{-6}\right)+\left(\frac{-14}{-4}\right)=\frac{17}{6}$.

2. Dacă termenii unei sumesunt numere raționale, reprezentate prin fracţii zecimale finite, precedate sau nu de semnul – , procedăm exact ca în cazul numerelor întregi: operaţiile le se fac între modulele celor două numere raţionale, iar semnul se stabileşte după regulile cunoscute de la numere întregi, după cum numerele au sau nu acelaşi semn.

Exemple

(–2,7) + (–1,4) = –(2,7 + 1,4) = –4,1;
5,25 + 6,75 = 12;

– dacă numerele au acelaşi semn, suma va avea semnul lor;
– dacă numerele au semne diferite, suma va avea semnul numărului care are modul mai mare.

$(-2{,}3) + 3 = 3 - 2{,}3 = 0{,}7$;
$(-3{,}1) + 2{,}9 = -(3{,}1 - 2{,}9) = -0{,}2$.

3.Dacă termenii unei sumesunt numere raționale, reprezentate prin fracţii zecimale finite sau prin fracţii ordinare,procedăm la scrierea lor fie numai sub formă de fracţii ordinare, fie numai sub formă de fracţii zecimale (precedate sau nu de semnul –). Opţiunea pentru una din forme este în funcţie de dificultatea efectuării calculelor şi de experiența celui care efectuează calculele.

Exemplu: $\left(-\frac{3}{2}\right) + 0{,}5 = (-1{,}5) + 0{,}5 = -(1{,}5 - 0{,}5) = -1$.

4. Dacă cel puțin unul dintre termenii unei sumeeste un număr rațional, reprezentat printr-o fracție zecimală periodică, este obligatoriu să reprezentăm numerele raționale prin fracții raționale.

Exemplu:

$$\left(-\frac{2}{7}\right) + 2{,}(18) = \frac{-2}{7} + 2\frac{18}{99} = \frac{-2}{7} + 2\frac{2}{11} = \frac{-2}{7} + \frac{24}{11} = \frac{(-2)\cdot 11 + 7\cdot 24}{77} = \frac{-22+168}{77} = \frac{146}{77}.$$

5. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale, se defineşte*diferența a două numere raționale*:pentru a se obţine diferenţa dintre numărul raţional a şi numărul raţional b se efectuează suma numărului a cu opusul numărului b, adică: $a - b = a + (-b)$

Operația prin care se obține diferența a două numere raționale se numește *scăderea numerelor raționale*.Regulile de calcul rămân aceleaşi ca la adunare.

Exemple:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{7} = \frac{3}{2} + \frac{-5}{7} = {}^{7)}\frac{3}{2} + {}^{2)}\frac{-5}{7} = \frac{21}{14} + \frac{-10}{14} = \frac{21-10}{14} = \frac{-11}{14} = -\frac{11}{14};$$

$$\left(-\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{22}{-3}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{22}{3}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{22}{3} = \frac{-5}{4} + \frac{22}{3} = \frac{(-5)\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{22\cdot 4}{3\cdot 4} = \frac{-15}{12} + \frac{88}{12} = \frac{-15+88}{12}$$

$$= \frac{73}{12} = 6\frac{1}{12}.$$

Rezumăm cunoştinţele

•Pe mulţimea $\mathbb{Q}$, a numerelor raţionale, se defineşte *suma a două numere raționale*

•*Suma* a două numere raţionale a şi b este un număr raţional, notat $a + b$. Numerele a şi b se numesc *termenii sumei*. Termenii unei sume de pot fi reprezentați prin fracții ordinare sau fracții zecimale.

•Operaţia prin care se obţine suma a două numere raţionale se numeşte *adunarea numerelor raţionale*.

•Pe mulţimea $\mathbb{Q}$, a numerelor raţionale, se defineşte *diferența a două numere raționale*: pentru a se obţine diferenţa dintre numărul raţional a şi numărul raţional b se efectuează suma numărului a cu opusul numărului b, adică: $a - b = a + (-b)$

• Operația prin care se obține diferența a două numere raționale se numește *scăderea numerelor raționale*.

• Deoarece adunarea şi scăderea numerelor raţionale se reduc la operaţii cu numere întregi, *proprietăţile adunării numerelor raţionale* sunt similare proprietăților adunării numerelor întregi:

1)Adunarea numerelor raţionale este *asociativă*:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele raţionale a, b şi c.

2)Numărul raţional 0 este *element neutru*la adunarea numerelor raţionale:

$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul raţional a.

3) Orice număr raţional a are un*opus* notat $-a$.

- $a + (-a) = (-a) + a = 0$, oricare ar fi numărul raţional a.
- Opusul numărului raţional $-a$ este numărul raţional a, adică $-(-a) = a$.

- Adunarea numerelor raţionale este *comutativă*:
- $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele raţionale a şi b

•Definiția opusului unui număr rațional, definiția diferenței a două numere raționale și proprietatea de asociativitate permit simplificarea scrierii prin eliminarea unor paranteze:

$$-(-a)=a \qquad (a+b)+c=a+b+c$$

$$a-b=a+(-b) \qquad a+(b+c)=a+b+c$$

•Dacă o paranteză este precedată de semnul + se renunţă la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semnele lor, iar dacă este precedată de semnul – se renunţă la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semne schimbate.

•Utile în calcule sunt şi următoarele proprietăţi:

1) dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$;

2) dacă $a + c = b + c$, atunci $a = b$ (reducerea lui c);

3) dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a + c = b + d$.

Aceste proprietăţi se denumesc astfel: *adunarea unui termen la o egalitate*, *reducerea unui termen dintr-o egalitate,* respectiv *adunarea a două egalităţi***.**

Aplicăm cunoştinţele

1. Simplificaţi scrierea prin renunţarea la paranteze:

a) $\left[\frac{1}{3}+(-5)\right]-\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $-\frac{1}{5}-\left[-\frac{1}{5}+(-3)\right]$; c) $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left[\frac{1}{3}+(-5)\right]-\left[-\frac{1}{5}+(-3)\right]$.

2. Simplificaţi scrierea şi apoi calculaţi: $(-0,5)-\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{4}\right)\right]$.

Ne verificăm

1. a) $\frac{1}{3}-5+\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+3$; c) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+5+\frac{1}{5}+3$.

2. $(-0,5)-\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{4}\right)\right]=-0,5-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{2^{(2}}{4}=$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

Activităţi de învăţare

1. Scrieți sub formă de fracții ordinare cu același numitor: $0,2;1,15;2,(3);3,1(6)$.

2. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt naturale: $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{31}{36}$,

$c=\frac{1}{20}+\frac{11}{25}+\frac{111}{50}$, $d=\frac{17}{30}+\frac{13}{45}$, $e=\frac{25}{24}+\frac{11}{18}$.

3. Fie $A=\left\{\frac{1}{12},1,\frac{7}{6},\frac{31}{18},\frac{54}{27}\right\}$. Determinaţi suma elementelor mulţimii $A\setminus\mathbb{N}$

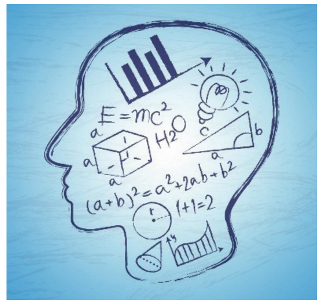
4. Efectuați calculele:

a) $-\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$; b) $-\frac{7}{9}+\left(-\frac{2}{9}\right)$; c) $+\frac{1}{10}+\left(-\frac{31}{10}\right)$;

d) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)$; e) $-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{8}\right)$; f) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{18}\right)$;

g) $-0,75+1,25$; h) $-2,6+(-1,4)$; i) $-\frac{1}{4}+0,125$;

j) $0,6+\left(-\frac{1}{5}\right)+(-1,25)$; k) $-\frac{3}{8}+0,25-1$; l) $-0,125+\frac{2}{8}-\frac{0}{15}$.



5. Efectuați calculele următoare și enumerați literele care le identifică pe cele la care ați obținut ca rezultat un număr rațional negativ.

a) $-1+\left(-\frac{5}{9}\right)$; b) $\frac{7}{2}+\left(-\frac{5}{7}\right)$;

c) $-4\frac{1}{5}+\left(+4\frac{1}{15}\right)$; d) $\frac{5}{18}+\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{1}{9}\right)$;

e) $-\frac{1}{5}+\left(-\frac{3}{10}\right)+\left(-\frac{7}{15}\right)+\left(+\frac{19}{20}\right)$; f) $-1\frac{7}{12}+\left[-\frac{5}{8}+\left(-\frac{7}{24}\right)\right]$;

g) $-\frac{8}{5}+0,3+\left(-\frac{72}{60}\right)+1,0(3)$; h) $4,(2)+\left(-4\frac{1}{9}\right)+\left(-3\frac{5}{6}\right)+\frac{100}{27}$.

6. Pentru fiecare din situațiile următoare, calculați suma $a+b+c$ în două moduri, folosind asociativitatea adunării numerelor raționale, adică:

$(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi numerele raționale a, b, c.

a) $a=-\frac{9}{4}$; $b=\frac{7}{6}$; $c=\frac{13}{12}$; b) $a=-1+\frac{1}{2}$; $b=-2+\frac{2}{3}$; $c=-3+\frac{3}{4}$.

7. Calculați suma dintre numărul x și opusul numărului y, pentru fiecare din situațiile:

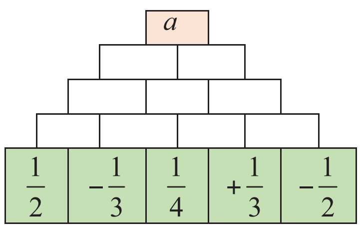
a) $x=-\frac{3}{4}$ și $y=-0.2$; $x=\frac{11}{9}$ și $y=1,25$; $x=1+2\frac{3}{4}$ și $y=4\frac{3}{2}-1$;

b) $x=1,2+2,3+3,4+...+7,8$ și $y=1,(2)+2,(3)+...+7,(8)$.

8. După efectuarea calculelor necesare, scrieți în ordine crescătoare numerele a, b și c:

$a=\left|-\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{2}{3}\right|+|0|+|-1|+|+1|$, $b=\left|1-\frac{5}{3}\right|+\left(-2\frac{3}{5}\right)$, $c=\frac{13}{27}+\left(-\frac{11}{24}\right)+\left(-\frac{37}{54}\right)$.

9. Completați căsuțele libere din imaginea alăturată respectând următoarea regulă: suma a două numere vecine, situate într-o aceeași linie (în același rând), se completează în căsuța de deasupra acestora. Aflați numărul a, efectuând toate calculele necesare.



10. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) $-5\frac{1}{3}=-5+\left(-\frac{1}{3}\right)$; □ b) $-2+8\frac{1}{3}<8\frac{1}{2}+(-2)$; □

c) $1+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\right]=6+\left(-\frac{3}{1}\right)+\left(-\frac{2}{1}\right)+(-1)$. □

11. Determinați cel mai mic număr natural nenul a, pentru care suma $S=a+\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{3}+\left(-\frac{a}{5}\right)+\frac{a}{2\cdot 3\cdot 5}$ este număr natural.

12. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$; b) $\frac{5}{6}+\left(-\frac{7}{2}\right)+\left[\left(-\frac{10}{3}+\frac{11}{6}+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{13}{5}+\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$;

c) $-\frac{1}{3}+\left[-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{9}\right)\right]$; d) $\frac{19}{36}+\left\{\left[0,(4)+\left(-\frac{37}{24}\right)\right]+\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$.

13. Efectuați calculele:

a) $1,8(3)+\left(-5,2+\frac{5}{6}\right)+\left[-0,41(6)+(-2)\right]$; c) $-\frac{11}{101}+\left(-\frac{37}{110}\right)+\left(+\frac{112}{101}\right)+\left(-\frac{346}{220}\right)$;

b) $-\frac{13}{24}+\left[\left(+\frac{11}{36}\right)+\left(-\frac{1}{48}\right)\right]+\frac{7}{40}$; d) $\left[\left(-\frac{24}{35}\right)+\left(-1\frac{3}{14}\right)\right]+\left[-1+\left(-\frac{16}{15}\right)+\frac{189}{45}\right]$.

14. Determinați cea mai mică valoare a numărului natural n, pentru care suma $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{n}{10}$ este un număr prim.

15. Efectuați calculele:

a) $-\frac{2}{7}-\left(-\frac{5}{7}\right)$; b) $-\frac{4}{3}-\left(+\frac{70}{3}\right)$; c) $\frac{9}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)$;

d) $+\frac{1}{3}-\left(+\frac{1}{6}\right)$; e) $-\frac{2}{5}-\left(-\frac{7}{10}\right)$; f) $\frac{5}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)$;

g) $-\frac{1}{24}-\left(+\frac{9}{8}\right)$; h) $4,5-(4,5-3)$; i) $-7,7-(-2,8)-9$.

16. Calculați diferența dintre numărul x și opusul numărului y, pentru fiecare din situațiile:

a) $x=\frac{7}{5}$ și $y=-1,2$; b) $x=\frac{2}{3}$ și y este opusul numărului $\left|-\frac{2}{3}\right|$;

c) $x=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ și $y=-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$; d) $x=\frac{2}{3}$ și $y=-\left(\frac{-1}{-3}\right)$.

17. Determinați numărul rațional care corespunde descrierii, pentru fiecare situație:

a) este cu 3 mai mic decât $-\frac{7}{2}$; b) este opusul numărului $-\frac{7}{3}-\left(\frac{-5}{3}\right)$;

c) este cu $\frac{11}{3}$ mai mic decât -2; d) adunat cu $-\frac{4}{15}$ dă suma $-\frac{7}{30}$.

18. Efectuați calculele următoare și enumerați literele care le identifică pe cele la care ați obținut ca rezultat un număr rațional negativ.

a) $-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{1}{8}\right)$; b) $1\frac{5}{7}-\left(\frac{11}{14}-\frac{3}{28}\right)$;

c) $-\frac{7}{18}-\left(-\frac{11}{12}\right)-0,25$; d) $-\frac{16}{5}-0-(-1,2)$;

e) $5-\left(\frac{1}{11}-\frac{3}{22}-\frac{2}{33}\right)$; f) $\frac{1}{5}-\left(\frac{4}{13}-\frac{7}{65}\right)$;

g) $3,(5)-\frac{5}{9}-\left(-1,1(6)+\frac{2}{3}\right)$; h) $4\frac{5}{7}-\frac{1}{14}-\left(-\frac{3}{56}+\frac{1}{8}\right)$.

19. Efectuați calculele următoare în două moduri. Identificați varianta avantajoasă, pentru fiecare.

a) $\left(\frac{4}{15}+1,9\right)-\left(\frac{1}{15}+0,9\right)$; b) $\left(\frac{1}{7}-0,3\right)-\left(-\frac{6}{7}+0,7\right)$;

c) $-10-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$; d) $-0,19-\left(-1,19-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$;

e) $-2,15-\left(-\frac{4}{13}\right)-0,85-\left(-\frac{9}{13}\right)$; f) $\left(\frac{3}{5}+0,2-2\frac{1}{10}\right)-\left(0,6+\frac{1}{5}-\frac{79}{10}\right)$.

20. Andreea, Mihaela și Ana sunt trei prietene. Andreea are înălțimea de $171\,\text{cm}$, Mihaela este mai înaltă decât Andreea cu $0,06\text{ m}$ iar Ana este mai scundă decât Mihaela cu $1,4\,\text{dm}$. Cu cât este mai înaltă Andreea decât Ana?

21. Mara își cumpără un penar, un caiet și un stilou. Penarul costă 18,5 lei, un caiet costă cu 14,9 lei mai puțin iar un stilou costă cu 6,4 lei mai mult decât caietul și penarul, împreună. Care este suma pe care o va plăti Mara pe cele trei obiecte?

22. Determinați numărul $\overline{ab}$, pentru fiecare din situațiile următoare, știind că egalitățile sunt adevărate:

a) $4,5+\overline{a,b}=\frac{43}{5}$; b) $\overline{b,a}-2\frac{1}{8}=-0,625$.

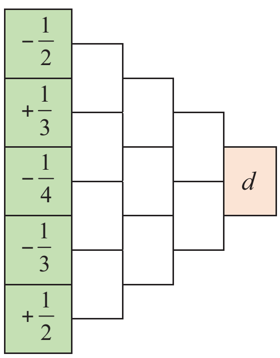
23. Scrieți în ordine crescătoare numerele x, y, z, date prin:

24. Comparați numerele raționale și completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile $<, >, =$, astfel ca afirmațiile să fie adevărate.

a) $-3\frac{1}{5}\ldots\left[-3-\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$; b) $\left(-\frac{7}{3}-1,6\right)\ldots-\frac{7}{3}$;

c) $\left(2-5\frac{1}{3}\right)\ldots\left(2-5\frac{1}{2}\right)$; d) $-101-(1-10+100)=-(-1+10-100)-101$.

25. Completați căsuțele libere din imaginea alăturată, respectând următoarea regula:
Diferența a două numere vecine, situate într-o aceeași coloană, se completează în căsuța situată în dreapta acestora.
Aflați numărul d, efectuând toate calculele necesare.



26. Efectuați calculele:

a) $\left|\frac{3}{4}-\frac{4}{3}\right|-\frac{3}{20}$; b) $-1\frac{1}{6}-\left(-2\frac{1}{8}+\frac{7}{2}\right)-1,0(6)$;

c) $-\frac{6}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)$; d) $-\frac{7}{8}-\left[-2\frac{1}{9}-\left(-3\frac{1}{2}+4\right)\right]$;

e) $-\frac{18}{35}-\left(\frac{8}{15}-\frac{3}{14}\right)$; f) $\left[-\frac{19}{30}-0,2(5)\right]-\left[-\frac{27}{5}+0,3(1)\right]$.

4.5. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți

1. La fel ca adunarea numerelor raționale, înmulțirea numerelor raționale, reprezentate sub formă de fracții ordinare, se reduce la operații cu numere întregi. Astfel:

Produsul a două numere raționale $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$, unde m, n, p, q sun numere întregi $n \neq 0$ și $p \neq 0$, este un număr rațional, notat $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$, care se obţine astfel: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$. Este evident că mp și nq sunt numere întregi și $nq \neq 0$

Exemple:

$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{2\cdot7}=\frac{15}{14}$;	$\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{-7}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{(-7)\cdot4}{2\cdot5}=\frac{-28}{10}=-\frac{14}{5}$;
$\frac{-4}{-5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{(-4)\cdot7}{(-5)\cdot3}=\frac{-28}{-15}=\frac{28}{15}$;	$\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)=\frac{9}{4}\cdot\frac{-5}{18}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-5}{2}=\frac{-5}{8}=-\frac{5}{8}$;
$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)=\frac{(-1)\cdot(-5)}{3\cdot2}=\frac{5}{6}$;	$\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{(-2)\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-2}{15}=-\frac{2}{5}$;
$\frac{3}{-7}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(\frac{3}{-7}\right)\cdot\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{3\cdot(-2)}{(-7)\cdot7}=\frac{-6}{-49}=\frac{6}{49}$;	$\frac{-3}{-2}\cdot\frac{5}{-7}=\frac{(-3)\cdot5}{(-2)\cdot(-7)}=\frac{-15}{14}=-\frac{15}{14}$.

Operaţia prin care se obţine produsul a două numere raţionale se numeşte *înmulţirea numerelor raţionale*. Cele două numere raţionale care se înmulţesc se numesc *factorii produsului.*

B. Din definiţia produsului a două numere raţionale rezultă următoarele reguli de calcul:

1) $a\cdot0=0\cdot a=0$, oricare ar fi numărul raţional a.

Exemple:

$\frac{2}{3}\cdot0$; $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot0=0$; $0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$; $0\cdot\frac{7}{8}=0$.

2) $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$, oricare ar fi numărul raţional a.

Exemple:

$\frac{7}{9}\cdot(-1)=-\frac{7}{9}$; $\quad \left(\frac{-3}{-2}\right)\cdot(-1)=-\frac{-3}{-2}=-\frac{3}{2}$; $\quad (-1)\cdot\frac{5}{-4}=-\frac{5}{-4}=-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}$;

$(-1)\cdot 2{,}3=-2{,}3$; $\quad 4{,}(7)\cdot(-1)=-4{,}7$.

Regula semnelor:

3) $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-a\cdot b$; $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$. oricare ar fi numerele raţionale a şi b

Exemple:

$\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{9}=-\frac{3\cdot 8}{2\cdot 9}=-\frac{4}{3}$; $\quad \left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{14}{15}\right)=\frac{5\cdot 14}{7\cdot 15}=\frac{2}{3}$; $\quad 1{,}5\cdot\left[-2{,}(3)\right]=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{7}{2}=-3{,}5$.

4. Înmulțirea numerelor raționale are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor întregi: este *asociativă*; numărul rațional 1 *este element neutru la înmulțire*; este *comutativă*; este *distributivă față de adunare și scădere*. De asemenea relațiile de ordine <, >, $\le$, $\ge$ au *proprietatea de monotonie*. În plus, un număr rațional nenul, notat cu a^{-1}, care proprietatea că $a^{-1}\cdot a=1$ se numește *inversul numărului rațional nenul,a*. Deoarece înmulțirea numerelor raționale este comutativă, rezultă că $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.

Exemplu: Inversul numărului rațional nenul reprezentat de fracția ordinară $\frac{m}{n}$ este numărul rațional nenul $\frac{n}{m}$ deoarece $\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}=1$. Așadar $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{m}$ (citim „inversul numărului rațional $\frac{m}{n}$ este numărul rațional egal cu $\frac{n}{m}$” sau „$\frac{m}{n}$ la minus 1 este egal cu $\frac{n}{m}$”)

Inversul unui număr rațional nenul,$a$este numărul rațional $\frac{1}{a}$. Așadar, $a^{-1}=\frac{1}{a}$ și $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{m}{n}}=\frac{n}{m}$.

Exemple:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$; $\quad \left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}=-\frac{2}{5}$; $\quad (1{,}2)^{-1}=\left(\frac{12}{10}\right)^{-1}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=0{,}8(3)$;

$[-1{,}1(6)]^{-1}=\left[-\left(1+\frac{16-1}{90}\right)\right]^{-1}=\left[-\left(1+\frac{15}{90}\right)\right]^{-1}=\left[-\left(1+\frac{1}{6}\right)\right]^{-1}=\left(-\frac{7}{6}\right)^{-1}=-\frac{6}{7}=-0{,}(857142)$;

$1^{-1}=\left(\frac{1}{1}\right)^{-1}=\frac{1}{1}=1$; $(-1)^{-1}=\left(-\frac{1}{1}\right)^{-1}=-\frac{1}{1}=-1$.

5. Noţiunea de „invers al unui număr raţional” permite definirea *câtului a două numere raţionale, a operaţiei de împărţire şi a raportului a două numere raţionale***:**

Câtul dintre numărul raţionala şi numărul raţional $b\neq 0$, notat $a:b$ sau $\frac{a}{b}$ este produsul lui a cu inversul lui: $a:b=\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$.

Numărul raţional a se numeşte *deîmpărţit*, iar numărul raţional b se numeşte *împărţitor*.

Operaţia prin care se obţine câtul a două numere raţionale se numeşte *împărţirea numerelor raţionale*. Cele două numere raţionale se numesc *factorii împărţirii* (deîmpărţitul şi împărţitorul). Câtul a două numere raţionale a şi $b, b \neq 0$, scris sub forma $\frac{a}{b}$, se numeşte *raport de numere raţionale.*

Exemple:

$\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1\cdot 4^{(2}}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$;	
$(-2):(-3)=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$;	$(-5):4=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}$;
$(-3):4=(-3)\cdot 4^{-1}=(-3)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$;	$\left(\frac{3}{2}\right):(-1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)^{-1}=\frac{3}{2}\cdot(-1)=-\frac{3}{2}$.

• Operaţia prin care se obţine produsul a două numere raţionale se numeşte *înmulţirea numerelor raţionale*. Cele două numere raţionale, care se înmulţesc, se numesc *factorii produsului*.

• Operaţia prin care se obţine câtul a două numere raţionale se numeşte *împărţirea numerelor raţionale*. Cele două numere raţionale se numesc *factorii împărţirii* (deîmpărţitul şi împărţitorul).

$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$ $(n\neq 0$ și $q\neq 0)$;	$\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{m}$ $(m\neq 0$ și $n\neq 0)$;
$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$ $(b\neq 0)$;	

• Înmulțirea numerelor raționale are următoarele proprietăți: *este asociativă*; numărul rațional 1 este *element neutru la înmulțire*; este *comutativă;* este *distributivă față de adunarea și scăderea numerelor raționale*.

Dacă a, b și c sunt numere raționale, aceste proprietăți se reformulează astfel:

asociativitate	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
numărul 1 este element neutru pentru înmulțire	$1\cdot a=a\cdot 1=a$
comutativitate	$a\cdot b=b\cdot a$
distributivitate față de adunare și scădere	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

Proprietatea de monotonie

Prin înmulțirea unei inegalități cu un număr pozitiv se păstrează semnul inegalității	$a<b \mid \cdot c>0 \Rightarrow a\cdot c<a\cdot c$
Prin înmulțirea unei inegalități cu un număr negativ, semnul inegalității se schimbă.	$a<b \mid \cdot c<0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

Observaţii. În calcule sunt utile şi următoarele proprietăţi: Oricare ar fi numerele raţionale a, b, c şi d:

1) dacă $a = b$, atunci $a\cdot c = b\cdot c$ (*înmulţirea unei egalităţi cu un factor*);

2) dacă $c\neq 0$ şi $a\cdot c = b\cdot c$, atunci $a = b$ (*simplificarea cu un factor nenul*);

3) dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a\cdot c = b\cdot d$.

Aplicăm cunoştinţele

1. $\frac{0,2}{1,5}$ este raportul numerelor raţionale $a = 0,2$ şi $b = 1,5$ sau al numerelor $a = \frac{2}{10}$ şi $b = \frac{15}{10}$. Arătaţi că $\frac{a}{b} = 0,1(3)$.

2. Calculaţi în două moduri:

a) $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\right)$; b) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}-\frac{5}{24}\right)$; c) $-\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{7}{15}+\frac{3}{10}\right)$.

Ne verificăm

1. $\frac{a}{b}=\frac{0,2}{1,5}=0,2:1,5=\frac{2}{10}:\frac{15}{10}=\frac{2}{10}\cdot\frac{10^{(10}}{15}=\frac{2}{15}=0,1(3)$. **2.** a) $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{9}=$ $=-\frac{1}{15}+\frac{4}{15}=\frac{-1+4}{15}=\frac{1}{5}$; $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1-4}{9}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{-3}{9}\right)=\frac{3\cdot 3^{(9}}{5\cdot 9}=\frac{1}{5}$;

b) efectuând calculele obţinem: $-\frac{1}{4}$; c) efectuând calculele obţinem: $\frac{1}{42}$.

Activităţi de învăţare

1. Efectuaţi calculele, folosind operaţia de înmulţire:

a) $\underbrace{7+7+7+...+7}_{15\ \text{termeni}}$; b) $\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{3}}_{30\ \text{termeni}}$; c) $\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+...+\left(-\frac{2}{5}\right)}_{45\ \text{termeni}}$.

2. Efectuaţi calculele:

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{16}{9}\right)$; b) $\frac{2}{15}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$;

c) $\frac{-7}{5}\cdot\frac{-25}{28}$; d) $-\frac{8}{21}\cdot(-9)$;

e) $-7\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{31}$; f) $\frac{-55}{17}\cdot\frac{34}{15}\cdot\left(-\frac{9}{22}\right)$;

g) $-4\cdot\frac{3}{16}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$; h) $\frac{11}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{13}{14}\right)\cdot\left(+\frac{14}{15}\right)$.

3. Efectuaţi calculele:

a) $5\cdot(-1,5)$; b) $-0,25\cdot 3,6$;

c) $-0,031\cdot 1000$; $-1,25\cdot 0,4\cdot(-0,2)$;

d) $-0,6\cdot\frac{20}{3}$; e) $2\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{16}{27}\right)$;

f) $-2,5\cdot\left(-\frac{3}{46}\right)$; g) $-1,2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot(+2,1)\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)$.

4. Pentru fiecare din situațiile următoare, calculați produsul $a \cdot b \cdot c$ în două moduri, folosind asociativitatea înmulțirii numerelor raționale, adică:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele raționale $a,\ b,\ c$.

a) $a = -\frac{3}{4}$; $b = \frac{8}{15}$; $c = -\frac{5}{2}$ b) $a = -\frac{1}{10}$; $b = -\frac{1}{20}$; $c = -300$.
;

5. Folosind valorile de mai jos, verificați distributivitatea înmulțirii față de adunare, adică: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi numerele raționale $a,\ b,\ c$.

a) $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{3}{4}$; $c = \frac{11}{4}$; b) $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{5}{18}$, $c = -\frac{1}{6}$.

6. Folosind valorile de mai jos, verificați distributivitatea înmulțirii față de scădere, adică: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele raționale $a,\ b,\ c$.

a) $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = -\frac{2}{9}$; b) $a = -\frac{7}{4}$, $b = -\frac{1}{21}$, $c = -\frac{3}{28}$.

7. Efectuați calculele, folosind ordinea efectuării operațiilor:

a) $\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{27}{8}\right)$; b) $-\frac{1}{7} \cdot 8 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 6$;

c) $-\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$; d) $\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{5}{24}\right) \cdot \left(-7 - \frac{1}{5}\right)$;

e) $\left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{12}\right) \cdot 1\frac{1}{3}$; f) $-\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{4}{49} + 1\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{7}\right)$;

g) $-\frac{3}{8} - \left(-\frac{14}{25}\right) \cdot \left(+\frac{75}{28}\right)$; h) $0,5 + \frac{4}{33} \cdot \left(-0,25 + 13\frac{1}{2}\right)$;

i) $\frac{-1}{-2} \cdot \left(3,(2) - \frac{5}{27}\right)$; j) $\left[\left(2^3 - 3\frac{1}{5}\right) \cdot 0,625 + 1,2\right] \cdot \frac{5}{7}$.

8. Identificați factorul comun și efectuați calculele, folosindu-l:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$; b) $1,5 \cdot (-5,1) + 1,5 \cdot (-4,2) + 1,5 \cdot (-3,3)$
;

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 8,3 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 2,3$; d) $\frac{4}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9}$.

9. Efectuați calculele:

a) $\left|-\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right| \cdot |-3,4|$; b) $\frac{-27}{|-8|} \cdot \frac{2^2}{5^3 - 17}$;

c) $\left(-8 + 4\frac{2}{3} - 5\frac{1}{6}\right) \cdot \left|-\frac{18}{17}\right|$; d) $\left|\frac{900}{-27}\right| \cdot (1,36 - 6,76)$.

10. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{a,b} \cdot \frac{a}{b} = 13$.

11. Completați căsuțele libere din tabelul următor folosind faptul că a^{-1} este inversul numărului rațional a:

a	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{9}$			7	-10	$0,1$	$-2\frac{1}{4}$		
a^{-1}			$\frac{1}{6}$	$-\frac{25}{22}$					$-0,2$	$\frac{7}{3}$

12. Se consideră mulțimea $A=\left\{2;-4;-\frac{2}{3};0,(6);\frac{-5}{12};1;-1\right\}$.

Scrieți elementele mulțimii $B=\left\{a^{-1} \mid a\in A\right\}$.

13. Efectuați calculele:

a) $\frac{20}{9}:\frac{8}{3}$; b) $-\frac{10}{7}:\frac{25}{21}$; c) $-\frac{16}{27}:\left(-\frac{4}{9}\right)$;

d) $\frac{125}{12}:\left(-\frac{100}{9}\right)$; e) $-3\frac{3}{15}:\left(-1\frac{2}{25}\right)$; f) $24:\left(-\frac{36}{7}\right)$;

g) $-\frac{57}{3}:(-19)$; h) $2\frac{1}{10}:42$; i) $0:\frac{8}{3}$.

14. Efectuați calculele:

a) $-3,6:1,2$; b) $-3,6:1,(2)$; c) $-0,01:(-0,1)$;

d) $1,5:\left(-\frac{1}{4}\right)$; e) $-7,(7):6,(6)$; f) $-32:(-3,(5))$;

g) $5,5:\frac{-1}{5}$; h) $\frac{-10}{9}:\frac{20}{-63}$; i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}:\frac{3}{2}$.

15. Efectuați calculele și scrieți rezultatele sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}}$; c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}}$; d) $\dfrac{-\frac{5}{2}}{-\frac{15}{4}}$;

e) $\frac{-3,6}{-1,5}$; f) $\dfrac{-\frac{3}{8}}{0,1}$; g) $\dfrac{1\frac{3}{2}}{1\frac{1}{4}}$; h) $\dfrac{-2,4}{\frac{3}{5}}$.

16. Scrieți numărul rațional corespunzător descrierii, pentru fiecare din situațiile:

a) este de trei ori mai mic decât $-10,5$;

b) este de $4,5$ ori mai mic decât $\frac{99}{22}$;

c) inversul dublului său este numărul $11,55$.

17. Efectuați calculele:

a) $-\frac{11}{3}:\left(-\frac{22}{9}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)$; b) $\frac{50}{9}:(-0,(5)):\frac{55}{7}$;

c) $\dfrac{\frac{7}{6}}{-28}:\dfrac{\frac{-1}{2}}{21}:\dfrac{-\frac{9}{2}}{-27}$; d) $-1\frac{7}{18}:(-9,75):\frac{-49}{8}$.

18. Scrieți numărul rațional a, corespunzător descrierii, pentru fiecare din situațiile:

a) $\frac{7}{8}$ din a este -140; b) $\frac{5}{4}$ din a este $-0,05$; c) 30% din jumătatea lui a este 30.

19. Efectuați calculele:

a) $-\frac{4}{9}:\left(-\frac{2}{3}\right)$;

b) $\frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{9}\right):\left(+\frac{10}{3}\right)$;

c) $\left(\frac{1}{4}:5\right):\left(5:\frac{50}{3}\right)$;

d) $-\frac{3}{5}:0,2:\frac{9}{5}:0,5$;

e) $-\frac{35}{16}:14:\frac{3}{8}:(-12)$;

f) $\left(\frac{-3}{5}:\frac{2}{-7}\right):\frac{1,2}{-5}$;

g) $-1,75:\frac{5}{9}+\left(-\frac{7}{20}\right)$;

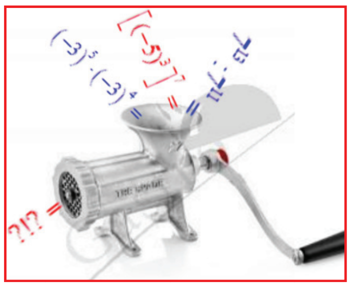
h) $14,4:\left(\frac{13}{2}:\frac{13}{3}:\frac{13}{12}\right)$.

20. Efectuați împărțirea $a:b$, unde

$$a=\frac{1}{1+2+3+...+2018} \text{ iar } b=\frac{1}{1+2+3+...+2019}.$$

4.6. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr raţional nenul. Reguli de calcul cu puteri

Ne amintim



1. a) Scrieți $(-3)^5$ ca un produs de numere întregi.

b) Scrieți $(-3)^5\cdot(-3)^4$ ca a putere a numărului întreg -3.

c) Scrieți câtul $7^{13}:7^{11}$ ca putere a numărului întreg 7

d) Scrieți $\left[(-5)^3\right]^7$ ca o putere cu un singur exponent.

e) Scrieți produsul $(-2)^5\cdot(-2)^8$ ca o putere.

Puterea cu exponent număr natural a unui număr raţional nenul se definește la fel ca puterea cu exponent natural a unui număr întreg. De exemplu:

1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; 2) $(-1,5)^4=(-1,5)\cdot(-1,5)\cdot(-1,5)\cdot(-1,5)$.

Se definește și puterea cu exponent întreg negativ: dacă a este un număr rațional nenul și m este un număr natural nenul, atunci: $a^{-m}=\left(a^{-1}\right)^m$ sau $a^{-m}=\left(\frac{1}{a}\right)^m$, unde, a^{-1} este inversul numărului rațional nenul, *a*.

Exemple: 1) $0,8(3)^{-3}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}=\left(\frac{6}{5}\right)^{3}=1,2^{3}=1,728$;

2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(-\frac{2}{1}\right)^{3}=\left(-2\right)^{3}=-8$.

Proprietățile puterilor numerelor raționale, cu exponent întreg, sunt *analoage* proprietăților puterilor numerelor întregi, cu exponent natural

Dicționar
analoage = care prezintă o analogie, asemănătoare, corespondente.

Rezumăm cunoștințele

•*Pentru orice număr rațional a, nenul și pentru orice număr natural $n\geq 2$, „a la puterea n" este produsul în care factorul a apare de n ori. Acest produs se notează cu a^n și avem:*

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{de\ n\ ori}$, unde a este baza puterii și *n* este exponentul puterii.

Convenții: $a^0=1$; $a^1=a$; 0^0 nu se definește.

•Dacă *a* este un număr rațional nenul și *m* este un număr natural nenul atunci se definește

$$a^{-m}=\left(a^{-1}\right)^m \qquad \text{sau} \qquad a^{-m}=\left(\frac{1}{a}\right)^m$$

•Reguli de calcul cu puteri

1)	*Înmulțirea puterilor care au aceeași bază*	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	*Se scrie baza și se adună exponenții*
2)	*Împărțirea puterilor care au aceeași bază*	$a:a^m=a^{m+n}$	*Se scrie baza și se scad exponenții*
3)	*Puterea unei puteri*	$a^m:a^n=a^{m-n}$	*Se scrie baza și se înmulțesc exponenții*
4)	*Puterea unui produs*	$\left(a\cdot b\right)^n=a^m\cdot b^n$	*Se ridică fiecare factor al produsului la puterea respectivă*
5)	*Puterea unui cât*	$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^2}, b\neq 0$	*Se ridică fiecare factor al câtului la puterea respectivă*

Aplicăm cunoștințele

1. Scrieţi ca putere a lui $-\frac{2}{3}$ numerele: $-\frac{8}{27}$; $\frac{64}{729}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{-32}{243}$; $\frac{16}{81}$.

2. Scrieţi sub formă de putere: a) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3$; b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{-8}{125}\right)\cdot\frac{4}{25}\cdot\left(-\frac{32}{625}\right)$.

3. Calculaţi: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4:\left(-\frac{3}{5}\right)^3\right]^2$; c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3:\left(-\frac{1}{2}\right)^8$.

Ne verificăm

1. $-\frac{8}{27}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$; $\frac{64}{729}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{6}$; $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}$; $\frac{-32}{243}=-\frac{32}{243}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{5}$; $\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{4}$

2. a) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{1+2+0+3}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{6}$ b) Fiecare fracție este o putere a numărului rațional $-\frac{2}{5}$ și rezultă: $\frac{-8}{125}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}$, $\frac{4}{25}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{2}$, $-\frac{32}{625}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{5}$. Se obține: $\left(-\frac{2}{5}\right)^{0}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^{2}$
$\left(-\frac{2}{5}\right)^{5}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{0+3+2+5}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{10}$.

3. a) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}=-\frac{8}{27}$; b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{4}:\left(-\frac{3}{5}\right)^{3}\right]^{2}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{(4-3)\cdot 2}=\frac{9}{25}$;

c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{(1+2)*3-8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}$.

Activități de învățare

1. Efectuați calculele:

a) 2^3; b) $-1,2^2$; c) $(-1,2)^2$; d) $(-1)^{10}$.

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; f) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; g) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; h) $\left(\frac{7}{8}\right)^0$;

i) $\left(-\frac{3}{11}\right)^1$; j) $\left(-\frac{200}{199}\right)^0$; k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; l) $-\frac{1}{2^5}$;

m) $\left(-\frac{2}{6}\right)^4$; n) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; o) $(0,(3))^4$; p) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$.

2. Scrieți următoarele produse, ca puteri de numere raționale:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; b) $\left(-\frac{3}{11}\right)\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)$; c) $(-1,8)\cdot(-1,8)\cdot(-1,8)$;

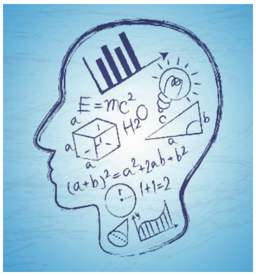
d) $-\frac{17}{5}$; e) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{-1}{3}$; f) $(-2,(3))\cdot(-2,(3))\cdot(-2,(3))\cdot(-2,(3))\cdot$

3. Efectuați operațiile necesare pentru a scrie rezultatele sub formă de puteri ale unor numere raționale:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^5$; b) $1,5^4\cdot 1,5^3$;

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^3$; d) $\frac{3^{20}}{2^{20}}$;

e) $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^4:\left(\frac{4}{3}\right)^3$; f) $\left[\left(-\frac{1}{7}\right)^{10}:\left(-\frac{1}{7}\right)^8\right]\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^3$.



4. Efectuați calculele și scrieți rezultatele sub formă de fracție ordinară ireductibilă:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$; b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$; c) $(0,(6))^{-3}$;

d) $(-1)^{-4}$; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; f) 3^{-6};

g) $(1,2)^{-3}$; h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-10}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{8}$;

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot(-1,5)^{2}$; k) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{0}\cdot(-1,5)^{0}$; l) $0^{101}\cdot 101^{0}$.

5. Efectuați calculele necesare și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Pentru fiecare, completați în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) $(2+3)^{2}=2^{2}+3^{2}$; □ b) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{10}:\left(-\frac{1}{6}\right)^{7}=\left(-\frac{1}{6}\right)^{3}$; □

c) $(3+4)^{-3}=3^{-3}-4^{-3}$; □ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{3}-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)^{3}$; □

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$; □ f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}$; □

g) $(-0,2)^{13}:(-0,2)^{9}=-0,2^{4}$; □ h) $(-7)\cdot(-7)^{2}\cdot(-7)^{3}=(-7)^{1+2+3}=(-7)^{1\cdot 2\cdot 3}$. □

6. Comparați numerele și scrieți în spațiile libere unul dintre simbolurile $<, >, =$, astfel ca afirmațiile să fie adevărate;

a) $2^{10}\ldots 2^{7}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$;

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{5}\ldots\left(\frac{4}{3}\right)^{4}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$;

e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}\ldots\left(-\frac{1}{3}\right)^{5}$; f) $1,5^{20}\ldots 2,25^{10}$;

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{40}\ldots\left(-\frac{9}{4}\right)^{18}$; h) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{5}\ldots\left(-\frac{1}{25}\right)^{3}$;

i) $-0,3^{4}\ldots -0,3^{3}$; j) $0,04\ldots\left(-\frac{1}{5}\right)^{2}$.

7. Efectuați calculele:

a) $\left[\frac{1}{5}\cdot(-5)\right]^{2}$; b) $\frac{2^{3}}{3^{4}}\cdot\frac{3^{5}}{2^{6}}$;

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{10}:\left(\frac{3}{5}\right)^{11}:0,6$; d) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{3}:\left(-\frac{1}{6}\right)^{4}$;

e) $\frac{5^{10}}{9^{4}}:\left(-\frac{5}{3}\right)^{8}$; f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}:\frac{4}{25}\cdot 0,4^{2}$.

8. Determinați valorile numărului întreg x pentru care au loc egalitățile:

a) $2^{x+3}=64$; b) $(-3)^{x-2}=-27$; c) $\left(\frac{7}{2}\right)^{x-3}=1$.

9. Determinați cifra a, pentru care $\overline{2,a}^{\,2}=6\frac{1}{4}$.

4.7. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

Ne amintim

Ca şi în cazul numerelor întregi, într-un şir de operaţii cu numere raţionale, se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulţirile şi împărţirile, în ordinea în care apar şi apoi se efectuează adunările şi scăderile, în ordinea în care apar.

În exerciţiile de calcul cu paranteze, se efectuează calculele din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate şi apoi calculele din acolade.

Vom avea grijă ca fracțiile rezultate în urma calculelor să fie ireductibile. Dacă o fracție nu este ireductibilă, atunci prin simplificare, se transformă în fracție ireductibilă.

Exemplu: $a=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(-\frac{108}{25}\right)$:

1) ridicările la putere: $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\left(-\frac{5}{6}\right)^3=-\frac{125}{216}\Rightarrow a=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3}-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{125}{216}\right)\cdot\left(-\frac{108}{25}\right)$

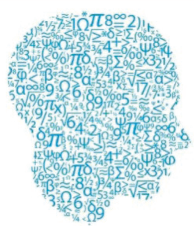
2) transformarea împărţirii în înmulţire: $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{125}{216}\right)\cdot\left(-\frac{108}{25}\right)$

3) înmulţirile: $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15^{(3}}{12}=\frac{5}{4}$, $\left(-\frac{125}{216}\right)\cdot\left(-\frac{108}{25}\right)=\frac{125\cdot108^{(108\cdot25}}{216\cdot25}=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\frac{5}{6}-\frac{5}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

4) adunările, scăderile şi finalizarea calculelor: $a=\frac{5}{6}-\frac{5}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{5}{6}-\frac{14^{(2}}{4}+\frac{6^{(2}}{2}=$

$=\,^{1)}\frac{5}{6}-\,^{3)}\frac{7}{2}+\,^{6)}\frac{3}{1}=\frac{5-21+18}{6}=\frac{2^{(2}}{6}=\frac{1}{3}$. Rezultat final: $a=\frac{1}{3}$.

Aplicăm cunoștințele



Calculați: $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-1}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\left[0,25+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):1,1(6)\right]\right\}^{-1}$

Ne verificăm

Deoarece exercițiul propus conține fracții zecimale periodice, este obligatorie transformarea acestora în fracții ordinare: $0,25=\frac{25^{(25}}{100}=\frac{1}{4}$; $1,1(6)=1\frac{16-1}{90}=1\frac{15^{(15}}{90}=1\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$. Rezultă:

$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-1}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\left[0,25+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):1,1(6)\right]\right\}^{-1}=\left(-\frac{7}{3}\right)^{1}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{14-3}{72}:\frac{7}{6}\right]\right\}^{-1}=$

$$=\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{7}{6}:\left\{6\left[\frac{1}{4}+\frac{11}{72}\cdot\frac{6}{7}\right]\right\}^{-1}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{11}{84}\right]\right\}^{-1}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\frac{21+11}{84}\right\}^{-1}=$$

$$=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\left\{6\cdot\frac{32}{84}\right\}^{-1}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\left\{\frac{6\cdot 8}{21}\right\}^{-1}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\left\{\frac{16}{7}\right\}^{-1}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}:\frac{7}{16}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{6}\cdot\frac{16}{7}=-5.$$

Activități de învățare

1. Efectuați calculele, ținând cont de ordinea efectuării operațiilor:

a) $\frac{2}{7}-\left(-\frac{3}{4}\right):\frac{7}{8}$; b) $-\frac{1}{8}\cdot\frac{32}{3}-\frac{5}{6}:\frac{5}{2}$;

c) $\frac{8}{13}\cdot\left(-2\frac{4}{11}\right)-\left(-1+\frac{6}{11}\right)$; d) $\left(\frac{13}{10}-2\frac{3}{5}\right):\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{3}:3\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\right)$;

e) $\left(-\frac{5}{12}+\frac{7}{8}-\frac{1}{24}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)^2$; f) $\left[\frac{7}{24}\cdot\left(\frac{5}{24}-\frac{9}{32}+\frac{7}{36}\right)+0,(6)\right]:(-10)^{-1}$.

2. Efectuați operațiile:

a) $\left(-\frac{5}{12}+\frac{7}{8}-\frac{1}{24}\right)^0\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2$; b) $\frac{7}{3}\cdot 0-5\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{5}-17\cdot\frac{3}{34}\right)$;

c) $\frac{1}{4}:\left[1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\left(1,5^2-1,5\right)\right]$; d) $\left(2-\frac{39}{20}\right)\cdot(-5)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{8}{9}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)$;

e) $\frac{7}{3}\cdot 6-5\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{5}-19\cdot\frac{3}{38}\right)$; f) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]:(-0,0625)$

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-10}:\left(\frac{5}{3}\right)^{-11}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; h) $(-2,5)^5:(-2,5)^2+6:1,5-4,5^0\cdot(-4,5)^2$

i) $17-\frac{11}{2}\cdot\frac{2^3}{33}+3^{-1}$; j) $(-1)^9\cdot\frac{9}{5}-(-1)^8\cdot\frac{8}{5}+(-1)^7\cdot\frac{7}{5}-\left(-2^2\cdot 3\right)^2:720$.

3. Calculați:

a) raportul numerelor $a=\frac{1}{22}-\frac{1}{33}+\frac{1}{44}-\frac{1}{55}$ și $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

b) media aritmetică a numerelor $-\frac{36}{48}, \left|+\frac{17}{34}\right|, \left(-\frac{65}{26}\right)^2$.

4. Se consideră numerele raționale $a=-1\frac{3}{14}+\frac{8}{21}$ și $b=2-21\cdot\left(\frac{41}{42}-\frac{5}{3}\cdot\frac{11}{14}\right)$. Demonstrați că numărul $c=-\frac{2}{3}\cdot a\cdot b$ este număr natural.

5. Se consideră numerele raționale a,b,c, date de:

$$a=0,2(5)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{5}\cdot\left[1,73+(-1,4)^2-19,7\cdot 0,2\right],$$

$$b=-\frac{16}{75}+\left\{\frac{28}{25}:\left[\frac{5}{3}\cdot 2\frac{2}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]\right\} \text{ și } c=\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}}\right)+0,13.$$

a) Efectuați calculele pentru a scrie numerele a, b, c sub formă de fracții ordinare cu numitorul 200.
b) Scrieți în ordine crescătoare cele trei numere.

6. Sanda lucrează la matematică cu fratele ei, David, care este în clasa a VI-a. Ea spune: Aș vrea să aflu valoarea numărul rațional a, despre care știu că se obține astfel: suma numerelor $0,(8)$ și $\frac{1}{4}$ se împarte. la inversul numărului $-20,5$, iar rezultatul se înmulțește cu cubul numărului -3. Care este numărul căutat?
David trebuie să scrie matematic exercițiul (procedeul) prin care se calculează numărul a, apoi să efectueze calculele. Transpuneți-vă în situația lui David și găsiți numărul a.

7. Numerele a, b, c sunt numere raționale.
a) Dacă $a \cdot b + a \cdot c = \frac{36}{25}$ și $b + c = -12$, calculați numărul a.
b) Dacă $a^2 + a \cdot b + a \cdot c = \frac{2}{3}$ și $a + b + c = -2$, calculați $b + c$.
c) Dacă $a^2 \cdot b - a^2 \cdot c = 9$ și $b - c = 4$, calculați numărul a.

8. Se consideră numărul $a = 5^{-2} \cdot \left(-1 - \frac{2}{3}\right)^3 + (-3)^5 \cdot (-27)^{-2} + 0,(185)$ și mulțimea $A = \{a; 2 \cdot a; 3 \cdot a; ...; n \cdot a\}, n \in \mathbb{N}^*$.
a) Efectuați calculele necesare și aflați numărul a.
b) Determinați valorile numărului n astfel încât mulțimea A să conțină exact 7 numere întregi.

9. Pentru $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ și $a \neq 1$, se consideră numerele raționale: $b = \frac{1}{a}$, $c = a^2$, $d = \frac{1}{a^2}$.
a) Ordonați crescător numerele a, b, c, d, pentru $a = 2$.
b) Ordonați crescător numerele a, b, c, d, pentru $a = \frac{1}{3}$.

10. Calculați numărul $A = \dfrac{3^2 \cdot \left(2^{50} + \left|2^{50} - 3^{34}\right|\right) : (-9)^{16}}{3^7 - 2 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^5}$, scriind rezultatul sub formă de fracție zecimală.

11. Demonstrați că dacă $B = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{23} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{22} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-21}\right] : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{23} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-22}\right]$, atunci $2 \cdot B$ este un număr natural.

12. Calculați numărul rațional $a = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^{n^2+n} + \frac{1}{4} \cdot (-1)^{4m+3} - \frac{1}{6} \cdot (-1)^{p^2-3p}$, știind că m, n, p sunt numere naturale.

4.8. Ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Ne amintim

1. De multe ori, în activitatea curentă, oamenii soluționează unele probleme practice cu ajutorul ecuațiilor.
a) Rezolvarea unei ecuații se bazează pe proprietățile ecuațiilor. Enunțați aceste proprietăți.
b) Enunțați etapele de rezolvare ale unei ecuații în mulțimea numerelor întregi.

2. Etapele de rezolvare ale unei ecuații în mulțimea numerelor raționale sunt analoage etapelor rezolvării unei ecuații în mulțimea numerelor întregi. Observați și analizați cu atenție rezolvarea următoarelor două ecuații:

(1) $3x+10=2-x,\ x\in\mathbb{Z}$	(2) $\frac{3}{2}\cdot x+10=\frac{1}{4}-x,\ x\in\mathbb{Q}$

Nr. crt.	Ecuația (1)	Ecuația (2)	Etapele rezolvării
1)	$3x+10=2-x$	$\frac{3}{2}\cdot x+10=\frac{1}{4}-x$	Trecem termenul +10 din membrul I în membrul II și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația 2)
2)	$3x=2-x-10$	$\frac{3}{2}\cdot x=\frac{1}{4}-x-10$	Trecem termenul $-x$ din membrul II în membrul I și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația 3)
3)	$3x+x=2-10$ $3x+x=4x$ $2-10=-8$	$\frac{3}{2}\cdot x+x=\frac{1}{4}-10$ $\frac{3}{2}\cdot x+x=\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot x=\frac{5}{2}\cdot x$ $\frac{1}{4}-10=\frac{1-40}{4}=-\frac{39}{4}$	Efectuăm calculele. Rezultă ecuația 4)
4)	$4x=-8$	$\frac{5}{2}\cdot x=-\frac{39}{4}$	Împărțim ambii membri ai ecuației prin coeficientul termenului liber. Rezultă 5)
5)	$x=(-8):4$	$x=-\frac{39}{4}:\frac{5}{2}$	Efectuăm calculele.
6)	$x=-2,\ x\in\mathbb{Z}$	$x=-\frac{39}{10}=-3,9,\ x\in\mathbb{Q}$	Soluția fiecărei ecuații

3. O scândură, cu lungimea de 23,6 cm, trebuie tăiată în bucăți. Lățimea tăieturii este de 0,4 cm. Din motive de economisire a materialelor, scândura va fi tăiată de tâmplar, numai dacă prin tăiere se obțin 11 bucăți, fiecare cu lungimea de 2 cm. Ajutați tâmplarul să decidă dacă taie sau nu, scândura.

Rezolvare:	*Etapele rezolvării*
Notăm cu x numărul bucăților de scândură care ar rezulta în urma tăierii	**1.** stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor
• lungimea celor x bucăți de scândură, exprimată în centimetri, este egală cu $2\cdot x$; • cele x bucăți de scândură rezultă în urma a $x-1$ tăieturi, fiecare cu lățimea de 0,4 cm; • lungimea scândurii distrusă prin tăiere, transformată în rumeguş, este egală cu $0,4\cdot(x-1)$. Rezultă ecuația: $2\cdot x+0,4\cdot(x-1)=23,6$	**2.** obținerea ecuației
$2\cdot x+0,4\cdot(x-1)=23,6 \mid \cdot 10$ $20\cdot x+4\cdot(x-1)=236$ $20\cdot x+4\cdot x-4=236$ $24\cdot x=240 \Rightarrow x=10$ (bucăți de scândură)	**3.** rezolvarea ecuației
Deoarece rezultă numai 10 bucăți, tâmplarul nu va tăia scândura.	**4.** interpretarea rezultatelor

4. În zeci și sute, poate chiar milioane de situații, la locul lor de muncă, casierii rezolvă cea mai simplă ecuație în mulțimea numerelor raționale. Este vorba despre ecuația $x + a = b$, unde a și b sunt numere raționale pozitive, reprezentate prin fracții zecimale finite. Cel care rezolvă ecuația este un casier, iar cel care verifică soluția, sau are obligația de a verifica soluția, este persoana care plătește o sumă de bani la casierie.

Societățile comerciale au în dotare instrumente electronice care stabilesc cu mare precizie cantitățile cumpărate și suma care trebuie plătită de cumpărător, indiferent de natura cumpărăturilor. Printr-un *bon fiscal*, cumpărătorul este informat despre cantitățile cumpărate, despre valoarea fiecărei cumpărături în parte și despre totalul sumei pe care o are de achitat la casierie. În situația în care cumpărătorul plătește în numerar, vânzătorul este obligat să rezolve o ecuație de felul celei de mai sus.

Exemplu: O gospodină este informată de casier și prin bonul fiscal că are de plătit suma de 38,09 lei. Gospodina oferă vânzătorului o bancnotă de 50 lei. Care este restul pe care gospodina îl va primi de la casier?

Dacă x este restul care se cuvine gospodinei, atunci rezultă ecuația $x + 38,09 = 50$

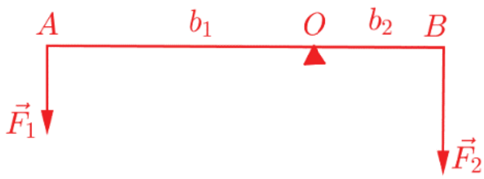
Casierul oferă restul gospodinei în monede sau bancnote până la obținerea sumei de 50 lei, după cum urmează: 99 de bani, 1 leu plus 10 lei, conform modelului de mai jos

$$\overbrace{\underbrace{38,01\text{ lei} + 99\text{ bani}}_{39\text{ lei}} + 1\text{ leu}}^{40\text{ lei}} + 10\text{ lei} = 50\text{ lei}$$

Deci, soluția ecuației $x + 38,09 = 50$ este $x = 11,99$ (lei)

5. La fizică, toate formulele prin care se exprimă legi ale fizicii sunt, de fapt, ecuații.

Exemplu: Se consideră o pârghie, adică o bară rigidă, AB care se poate roti in jurul unui punct fix O, numit punct de sprijin. Bara,de masă neglijabilă și cu lungimea 4,5 m, are punctul de sprijin la distanța b_1= 3 m, față de capătul A. La capătul barei, acționează forțele $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$. Știind că F_1 = 1 N, calculați mărimea forței $\vec{F_2}$ atunci când bara este în echilibru.



Potrivit legilor fizicii, mărimile F_1, F_2 și b_1, b_2 sunt invers proporționale. $F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$. Deoarece b_2 = 4,5 –3 =1,5 (m), rezultă ecuația 3 = $F_2 \cdot 1,5$ din care rezultă F_2 = 2. Deci mărimea forței $\vec{F_2}$ atunci, când bara este în echilibru, este de 2 N și s-a obținut rezolvând o ecuație..

6. Alte ecuații simple, în mulțimea numerelor raționale, sunt :

$$x + a = b\,, \qquad x \cdot a = \text{b}\,, \qquad x : a = b\ (a \neq 0)\,, \qquad a \cdot x + b = c\,,$$

unde a , b și c sunt numere raţionale cu soluțiile $x = b - a$, $x = b : a$ $(a \neq 0)$, respectiv $x = (\text{c} - b) : a (a \neq 0)$

Rezolvarea unei ecuaţii se bazează pe proprietățile ecuaţiilor, care la rândul lor se sprijină pe utilizarea corectă a regulilor de calcul, inclusiv ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor, după cum urmează:

Temă de portofoliu. Realizați o lucrare cu titlul „*Operații cu numere raționale. Proprietăți și reguli de calcul*”. Ilustrați fiecare proprietate sau regulă de calcul printr-un exemplu.

Activități de învățare

1. Scrieți ecuația $a \cdot x + b = c$, cu necunoscuta x, pentru fiecare dintre tripletele (a, b, c):

a) $a = 2,\ b = 6,\ c = 0$; b) $a = -2,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4}$; c) $a = -\frac{3}{5},\ b = 0,\ c = -0{,}8$.

2. Identificați, prin verificare, ecuația pentru care numărul $x = 3$ este soluție.

a) $-2 \cdot x + 3 = 9$; b) $-4 \cdot x + 5 = -7$ c) $\frac{1}{3} \cdot x - 8 = 9$.

3. Se consideră ecuația $\frac{1}{2} \cdot x + 1 = 2$.

a) Stabiliți dacă ecuația dată are soluții în mulțimea $A = \left\{-2;\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$.

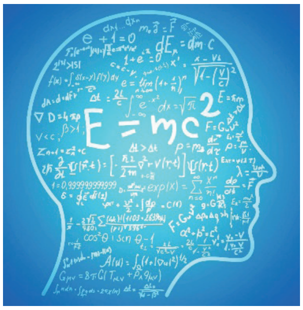
b) Stabiliți dacă ecuația dată are soluții în mulțimea numerelor întregi.

4. Rezolvați, în mulțimea numerelor naturale, ecuațiile:

a) $6 \cdot x - 12 = 0$; b) $3 \cdot x + 1 = 10$; c) $-x + 5 = 0$;
d) $4 \cdot x + 7 = 17$; e) $x : 5 + 1 = 11$; f) $3 \cdot x - 8 = x$;
g) $2{,}1 \cdot x - 4{,}2 = 6{,}3$; h) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3} + 1$; i) $x + 3^2 = x - 2$.

5. Rezolvați, în mulțimea numerelor raționale, ecuațiile:

a) $3 \cdot x + 7 = -2 \cdot x - 8$; b) $6 \cdot x - 2 = 4 \cdot x + 5$;
c) $2 \cdot (x + 7) = 3 \cdot (4 - x) - 8$; d) $2 + 3 \cdot (x + 4) = x + 5 \cdot (x - 5)$.
e) $9 \cdot x - \frac{1}{7} = \frac{10}{14} + 4 \cdot x$; f) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot x = -1$;
g) $1{,}25 \cdot x - \frac{1}{8} = -0{,}225$; h) $6 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 8$;
i) $\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{3} = 8$; j) $5 - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 15$.



6. Pentru fiecare dintre perechile de fracții date, determinați numărul rațional x pentru care acestea sunt echivalente:

a) $\frac{x}{4}$ și $\frac{1}{2}$; b) $\frac{x+2}{x+3}$ și $\frac{2}{3}$;
c) $\frac{x}{8}$ și $\frac{x+1}{9}$; d) $\frac{x+1}{3}$ și $\frac{x+5}{4}$;
e) $\frac{3-2x}{5}$ și $\frac{x+1}{9}$; f) $\frac{6}{x-1}$ și $\frac{7}{x+2}$.

7. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; b) $\frac{x-4}{5} + \frac{x+3}{4} = -\frac{1}{10}$;

c) $\frac{3+2\cdot x}{3}+\frac{x-1}{6}=\frac{2\cdot x-3}{9}$; d) $5\cdot\left[35-5\cdot(5-2\cdot x)+9\cdot x\right]=1$;

e) $1-\left\{2-\left[3-(4-x)\right]\right\}=5$; f) $-4,5+\frac{2}{5}\cdot\left[1+3\cdot(2\cdot x-1)\right]=-3-\frac{7}{5}\cdot x$;

g) $\frac{3\cdot x-1}{4}-\frac{6\cdot x+1}{6}=\frac{1-x}{24}$; h) $\frac{4}{5}\cdot(3\cdot x-4)+\frac{3\cdot x+2}{2}=1\frac{1}{2}\cdot(x-3)+\frac{4\cdot x+7}{5}$.

8. Completați în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă:

a) Pentru orice număr rațional m, există un număr rațional x astfel încât $m\cdot x-1=2$ (Pentru orice valoare a numărului rațional m, ecuația $m\cdot x-1=2$ are soluție în mulțimea numerelor raționale) ☐

b) Există $m\in\mathbb{Q}$ și există $x\in\mathbb{Q}$ astfel încât $m\cdot x-11=22$. ☐

c) Există $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$ are loc relația $m\cdot x-11=-11$. (Există valori raționale ale lui m pentru care oricare ar fi numărul rațional x, acesta verifică egalitatea, adică toate numerele raționale sunt soluții ale ecuației). ☐

d) Justificați, prin exemple, răspunsul dat la subpunctele anterioare.

9. Scrieți o ecuație echivalentă cu ecuația $-2\cdot x+3=5$.

10. Se consideră mulțimea $A=\{-2, -1, 1, 2\}$ și ecuațiile $x-2=0$ și $x^2-4=0$.

a) Rezolvați, în mulțimea A, cele două ecuații.

b) Decideți dacă ecuațiile sunt echivalente; justificați răspunsul dat.

11. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ și numărul natural n, pentru care are loc egalitatea: $\overline{ab}+\frac{\overline{ab}}{3}+\frac{\overline{ab}}{3^2}+\frac{\overline{ab}}{3^3}=120$.

12. Dublul unui număr a este cu $1,2$ mai mare decât $\frac{1}{2}$. Aflați numărul a.

13. Aflați un număr rațional știind că, înmulțindu-l cu $4,5$, obținem același rezultat ca atunci când îl adunăm cu $6,3$.

14. Adrian dorește să-și cumpere un telefon. Studiind ofertele, constată că are doar jumătate din banii necesari. Andreea, sora lui, se oferă să contribuie cu o treime din prețul telefonului, iar bunica lor îi dă restul de 100 de lei.

a) Exprimați suma cu care contribuie Adrian, în funcție de prețul p al telefonului.

b) Exprimați suma cu care contribuie Andreea, în funcție de prețul p al telefonului.

c) Stabilind ca necunoscută prețul p al telefonului, scrieți o ecuație care să corespundă datelor problemei.

d) Rezolvați ecuația și determinați prețul telefonului pe care îl dorește Adrian.

15. Calculați măsurile a două unghiuri complementare, pentru fiecare din situațiile:

a) Diferența măsurilor lor este 18°; b) Raportul măsurilor lor este $\frac{7}{3}$.

16. Dintre locutorii unui oraș, 32% sunt elevi. Calculați numărul locuitorilor acelui oraș știind că dintre elevi, 1009 sunt preşcolari, 2018 sunt în învățământul gimnazial iar 1563 sunt liceeni.

17. Într-o clasă sunt 24 de elevi, băieți și fete. Dacă ar mai veni 3 fete, atunci numărul băieților ar fi jumătate din numărul fetelor. Aflați numărul fetelor din acea clasă.

18. Distanța de la Timișoara la Brașov este cu 260 km mai mare decât distanța de la Brașov la București. Voicu se deplasează pe traseul București-Brașov-Timișoara și retur (adică se întoarce la București pe același traseu, Timișoara-Brașov-București), parcurgând, în total, 1206 km. Determinați distanța de la București la Brașov și distanța de la Brașov la Timișoara.

19. Părinții Soniei au aceeași vârstă (exprimată în ani). Vârsta Soniei este o cincime din vârsta mamei ei. Peste doi ani, suma vârstelor tuturor celor trei membri ai familiei, va fi 94 de ani. Ce vârstă are acum Sonia?

20. Calculați numărul rațional x, știind că media aritmetică a numerelor 12; $9+x$; 15 și $3 \cdot x$ este 16.

21. Bogdan și-a dat seama că, în acest semestru, n-a prea învățat la fizică. El face niște calcule pentru a vedea ce medie ar putea obține. Știe că are două note de 7, un 6, un 9 și că mai poate lua o singură notă. Ce notă ar trebui să primescă la ultima evaluare, pentru a obține media 8? E posibil să obțină media 9 în acest semestru?

22. Lui Sergiu îi place să călătorească și să viziteze obiective istorice și culturale. Pleacă împreuna cu Andreea și cu fiica lor, Sonia, într-o excursie. Ei își propun să împartă traseul în trei etape, astfel încât să parcurgă, în fiecare etapă, aceeași distanță. Datorită condițiilor meteorologice și a numărului mare de obiective de vizitat, nu reușesc să respecte planul. Ei parcurg în prima etapă doar jumătate din cât și-au propus, iar în a doua etapă cu 15 km mai puțin decât își propuseseră. Știind că până la destinație mai au de parcurs 70,5 km, aflați lungimea totală a traseului.

23. Bisectoarele a două unghiuri ale unui triunghi formează un unghi de $110°$. Determinați măsura celui de-al treilea unghi al acestui triunghi.

24. Tatăl lui Alex schimbă apa în piscină și îi cere fiului său să calculeze capacitatea piscinei. El spune: Piscina a fost plină. Am eliminat o treime din apă. După ce voi mai elimina două treimi din apa rămasă, în piscină vor mai fi 60 kl de apă. La final, Alex spune că piscina are capacitatea de 270 kl. Scrieți o ecuație care să corespundă datelor problemei, rezolvați-o și decideți dacă Alex are dreptate.

25. Delia și Irina au împreună 120 de lei. Dacă Delia ar avea o sumă de două ori mai mare, iar Irina ar avea o sumă de două ori mai mică, atunci ele ar avea împreună 165 de lei. Determinați suma de bani pe care o are fiecare.

26. Dacă la un număr se adună, pe rând, numerele 2,3; 3,7 respectiv 7,2, se obțin trei numere a căror sumă este chiar numărul inițial. Aflați numărul de la care s-a pornit.

27. Un pătrat are latura de lungime x cm iar un dreptunghi are dimensiunile laturilor $\frac{x}{2}$ cm și $(2 \cdot x + 3)$ cm. Aflați lungimea laturii pătratului, știind că aria dreptunghiului este cu 24 cm^2 mai mare decât aria pătratului.

28. Sandu își planifică vacanța și își repartizează banii de care dispune astfel: 20% din suma totală sunt pentru transport, 60% din restul sumei pentru masă și cazare iar banii rămași, 576 de lei, vor fi folosiți pentru eventuale cadouri sau alte cheltuieli neprevăzute. Aflați suma de bani pe care o are Sandu pentru vacanță.

29. De obicei, elevii clasei a VI-a dintr-o școală, se așează câte doi în bancă și rămân două bănci libere. În ziua în care s-a desfășurat faza pe școală a olimpiadei de matematică, au lipsit de la ultima oră 11 elevi (participau la olimpiadă). Elevii rămași s-au așezat câte unul în bancă și au ocupat toate băncile. Aflați efectivul clasei (numărul elevilor din clasă) și numărul băncilor din sala de clasă.

30. Doi frați, Marius și Sorin, au împreună 28 de lei. Ei vor să cumpere o carte, la plata căreia să participe cu sume egale. Sorin este nevoit să împrumute de la Marius 2 lei iar, după cumpărarea cărții, Marius rămâne cu 4 lei. Câți lei a avut fiecare dintre cei doi frați?

31. Răspunzând la toate cele 100 de cerințe ale unui test, Ștefan a obținut 356 de puncte.

Pentru fiecare răspuns corect, s-au acordat 5 puncte iar pentru un răspuns greșit s-au scăzut 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat Ștefan? Care este numărul minim de răspusuri corecte pe care ar trebui să le dea un participant pentru a obține cel puțin 430 de puncte?

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 *p* **1.** Orice fracție zecimală finită reprezintă un număr rațional. ☐

5 *p* **2.** Orice număr rațional este număr natural. ☐

5 *p* **3.** Opusul numărului rațional $-0{,}5+0{,}4$ este $\frac{1}{10}$ ☐

5 *p* **4.** Valoarea absolută a numărului $-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$ este $-\frac{1}{2}$. ☐

5 *p* **5.** Inversul numărului $-\frac{22}{33}$ este $+\frac{22}{33}$. ☐

5 *p* **6.** Dacă $x=0$, atunci fracția $\frac{-1}{x^2+1}$ reprezintă un număr întreg. ☐

II. Uniți, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana B.

	A	p
5 *p*	**1.** $-0{,}04\cdot 10^2+(-2)^2+1=$	**a.** $-\frac{1}{24}$
5 *p*	**2.** $-\frac{5}{12}-\frac{7}{8}-\left(-1\frac{1}{4}\right)=$	**b.** 0
5 *p*	**3.** $(-10)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):(0{,}1)^{-2}$	**c.** 1
5 *p*	**4.** Singurul număr natural din mulțimea este $A=\left\{\frac{n+36}{n+17} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$	**d.** 2 **e.** $\frac{15}{4}$

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 *p* **1.** Puterea a treia a numărului –0,1 este :

A. –0,3 B. 0,3 C. –0,01 D. –0,001.

10 *p* **2.** Suma dintre opusul lui –3 și inversul numărului $-\frac{1}{3}$ este:

A. $3\frac{1}{3}$; B. $-3\frac{1}{3}$; C. 0; D. $-\frac{4}{3}$.

10 *p* **3.** Numărul rațional, care adunat cu sfertul său, dă 55, este:

A. 44; B. 50; C. 25; D. 35.

10 *p* **4.** Media aritmetică a numerelor $22{,}8; x;$ și $17{,}2$ este 16. Numărul x este:

A. 6; B. 8; C. 12; D. 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

5 Noțiuni geometrice fundamentale

1. Recapitulare și completări
2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor
3. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor
4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente
5. Bisectoarea unui unghi. Construcţia bisectoarei unui unghi
6. Drepte paralele
7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă
8. Axioma paralelelor
9. Criterii de paralelism
10. Aplicaţii practice în poligoane și corpuri geometrice
11. Drepte perpendiculare în plan. Oblice
12. Aplicaţii practice în poligoane și corpuri geometrice
13. Distanţa de la un punct la o dreaptă
14. Mediatoarea unui segment. Simetria faţă de o dreaptă
15. Cerc. Definiţie. Construcţie. Elemente în cerc
16. Unghi la centru. Măsuri
17. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

5.1. Recapitulare și completări

Ne amintim

Cea mai simplă noțiune geometrică este *punctul*. *Dreapta*, *planul, semiplanul*, *semidreapta*, *segmentul* și multe altele sunt *noțiuni geometrice,* privite ca *mulțimi infinite de puncte*. Orice noțiune geometrică se poate reprezenta pe foaia de hârtie sau pe tabla din sala de clasă în care învățăm, cu ajutorul unui desen, numit *figură geometrică*.

De exemplu, figura 1, de mai jos, sugerează o mulțime de puncte. Dacă ne imaginăm mulțimea respectivă ca o mulțime infinită de puncte, obținem segmentul AB, reprezentat în figura 2.

Fig. 1.

Fig. 2.

Figurile geometrice au un rol însemnat în geometrie. Ele contribuie la dezvoltarea intuiției spațiale, a imaginației, creativității, inventivității. Prin urmare, o figură geometrică trebuie desenată cu multă grijă. Pentru desenarea unei figuri geometrice în codiții optime, este necesar să cunoașteți bine instrumentele de desen și modul de folosire a lor. Principalele instrumente de desen sunt: *creionul*, *rigla* (gradată sau negradată), *echerul*, *raportorul* și *compasul*.

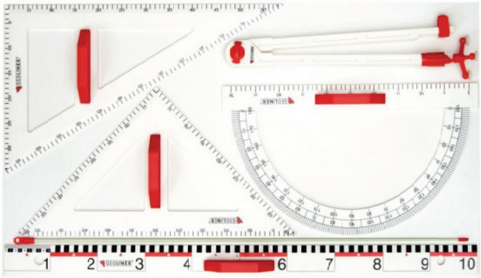


Foto 1. Instrumente de desen

Important

Creionul *trebuie să fie bine ascuțit.*

Rigla negradată *se folosește pentru desenarea dreptelor, semidreptelor și a segmentelor. Se respectă următoarele reguli:*

- vârful creionului, în permanență, se va sprijini pe muchia riglei și va fi înclinat față de direcția de trasare;

- trasarea se face, de regulă, de la stânga spre dreapta și de jos în sus.

Rigla gradată *se folosește pentru măsurarea lungimilor segmentelor sau pentru a calcula distanța dintre puncte.*

Echerul *se folosește pentru desenarea unghiurilor drepte.*

Raportorul *se folosește pentru măsurarea unghiurilor.*

Compasul *se folosește pentru desenarea unui cerc sau a unei părți dintr-un cerc, numită* ***arc de cerc****. La un compas, deosebim* ***vârful compasului*** *și* ***vârful port mină.*** *Pentru desenarea cercului sau a unui arc de cerc, vârful compasului se fixează în centrul cercului, iar cu vârful port mină se trasează cercul sau arcul de cerc.*

Un cerc de centru O și rază r cm sau un arc al acestui cerc se desenează având grijă ca vârful compasului să rămână fixat (în punctul O), iar vârful port mină să se miște pe suprafața de desen, fără ca, în timpul mișcării, compasul să se închidă sau să se deschidă.

De exemplu, să presupunem că dorim să desenăm un cerc cu centrul într-un punct O și cu raza $r = 1{,}5$ cm. Procedăm astfel:

- folosind rigla gradată, construim un segment OA, cu lungimea de $r = 1{,}5$ cm;
- prin fixarea vârfului compasului în punctul O și a vârfului port mină în punctul A, dăm deschiderii compasului lungimea de $r = 1{,}5\,\text{cm}$;
- cu vârful compasului în O, trasăm cercul sau un arc al acestuia.

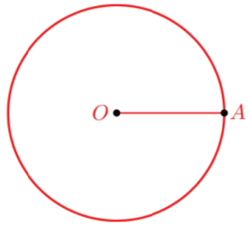
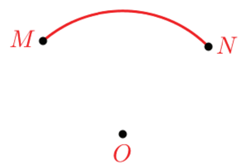


Fig. 3



arc de cerc = porțiunea de cerc limitată de punctele M și N

Fig. 4

Rezolvăm

1. Desenați:
a) două puncte A și B; b) o dreaptă AB; c) o semidreaptă AB;
d) o semidreaptă BA; e) un segment AB.

Este exactă măsurarea unui segment cu rigla gradată?

2. În figura 5, punctul P aparține segmentului MN.
a) Numiți toate segmentele din figură;
b) Măsurați aceste segmente și exprimați lungimile fiecăruia în milimetri, în centimetri și în decimetri. Măsurarea unui segment cu rigla gradată este exactă?

Fig. 5

3. a) Măsurați unghiul din figura 6.
b) Desenați un unghi cu măsura de 40°.

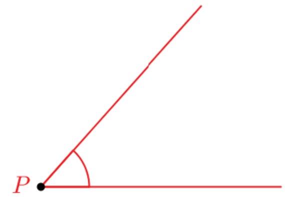


Fig. 6

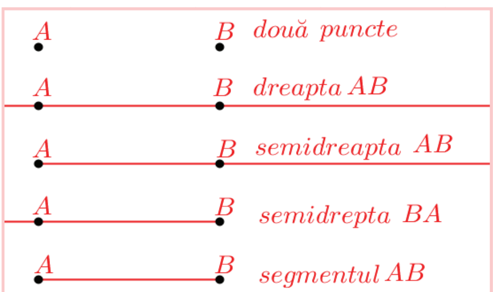
4. Folosind rigla gradată și un compas, desenați:
a) un segment $AB = 4$ cm și punctul M, pe segmentul AB, la distanța de 1,5 cm față de A.
b) cercul cu centrul M și cu raza de 1,5 cm;
c) cercul cu centrul B și cu raza de 1,5 cm.
Notați punctele comune ale celor două cercuri cu P, respectiv Q.

5. Desenați două puncte C și D. Folosind un compas:
a) desenați un arc de cerc cu centrul C;
b) desenați un alt arc de cerc, cu centrul D, astfel încât intersecția celor două arce să fie un punct E.

Ne verificăm

1. Desenele sunt cele din figura R1.
2. a) Segmentele sunt: MP, MN și PN.
b) $MP = 20$ mm $= 2$ cm $= 0{,}2$ dm;
$PN = 35$ mm $= 3{,}5$ cm $= 0{,}35$ dm și
$MN = 55$ mm $= 8{,}5$ cm $= 0{,}55$ dm.
3. a) $\sphericalangle P = 45^\circ$; b) $\sphericalangle AOB = 40^\circ$ (fig. R2).
4. Se obține figura R3:

Fig. R1



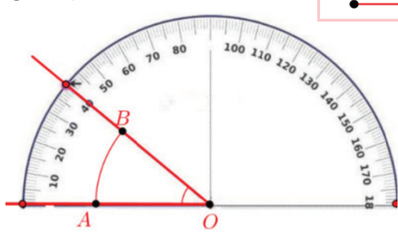


Fig. R2

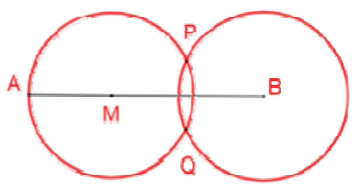


Fig. R3

Activități de învățare

1. Construiți punctele necoliniare A, B, C. Reprezentați apoi, simetricul punctului A față de B și simetricul punctului C față de A.

2. Un pătrat are latura de $2{,}15\,\text{cm}$. Calculați perimetrul și aria pătratului.

3. În figura 1, sunt reprezentate puncte și drepte. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera *F*, dacă propoziția este falsă.

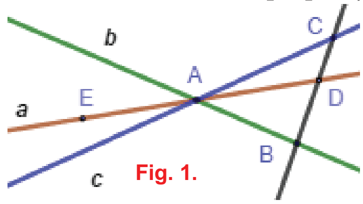


Fig. 1.

a) Punctele E, A, D sunt coliniare. □

b) Dreptele a, b, c sunt concurente. □

c) Dreptele AE și BC nu au puncte comune. □

4. Observați paralelipipedul dreptunghic din *figura 2* și scrieți:

a) trei drepte concurente;

b) trei perechi de drepte paralele;

c) o pereche de drepte necoplanare.

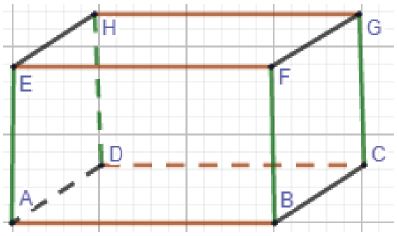


Fig. 2.

5. Vlad vopsește pereții și tavanul camerei sale, care are forma unui paralelipiped dreptunghic, folosind două culori.

a) Arătați că există două suprafețe vecine, vopsite cu aceeași culoare.

b) Arătați că dacă ar folosi trei culori, atunci ar exista cel puțin o combinație (variantă) în care oricare două suprafețe vecine sunt vopsite în culori diferite.

6. Segmentele AB și CD sunt situate pe aceeași dreaptă și au același mijloc, punctul M.

a) Demonstrați că $AC \equiv BD$.

b) Pentru $MC = 6$ cm și $MC = 6$ cm și $MB = 10$ cm, aflați lungimile segmentelor AB, AC și CD.

7. Desenați punctele coliniare A, B, C, D, în această ordine, astfel încât $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm. Se notează $CD = x$ cm.

a) Exprimați, în funcție de x, lungimile segmentelor AD și BD.

b) Determinați valoarea lui x, știind că $3 \cdot AD = 5 \cdot BD$.

8. Folosind instrumentele geometrice, reprezentați:

a) unghiul nul ABC;
b) unghiul ascuțit DEF;
c) unghiul drept GHI;
d) unghiul alungit MNP.

9. Observați *figura 3.*

a) Numiți toate unghiurile formate de semidreptele din figură.

b) Dacă $\sphericalangle AOB = 40^\circ$ și $\sphericalangle BOC = 55^\circ$, aflați măsura unghiului AOC.

c) Dacă $\sphericalangle AOB = 40^\circ$ și $\sphericalangle AOC = 107^\circ$, aflați măsura unghiului BOC.

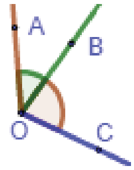


Fig. 3.

10. Realizați pe caiete, folosind rigla negradată, desenul din *figura 4*
Colorați, cu albastru, intersecția interioarelor celor două unghiuri din imagine.

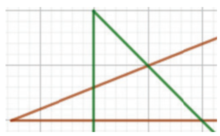
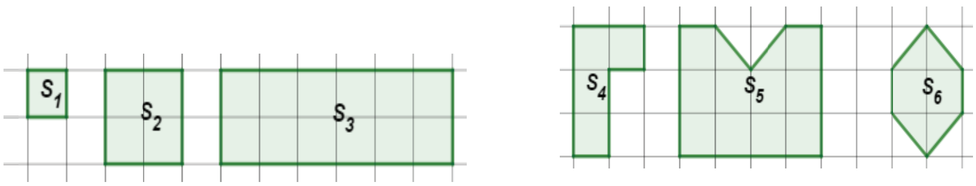


Fig. 4.

11. Exprimați în m^2:

a) 400 dm^2; b) 5 dam^2; c) 90,01 km^2; d) 2 ha; e) 1 000 000 mm^2.

12. Pătrățelele din *figura 5* au, în realitate, lungimile laturilor de $1\,cm$. Calculați aria fiecărei suprafețe hașurate.



13. Folosind rețeaua de pătrățele a foii caietului de matematică, desenați o dreaptă verticală d și figura F, pentru fiecare din situațiile de mai jos. Reprezentați apoi, simetrica figurii F față de dreapta d.

a) F este un punct oarecare, nesituat pe dreapta d.

b) F este un dreptunghi, situat de o parte a dreptei d.

c) F este un segment, cu capetele de aceeași parte a dreptei d.

d) F este un segment, cu capetele de o parte și de alta a dreptei d.

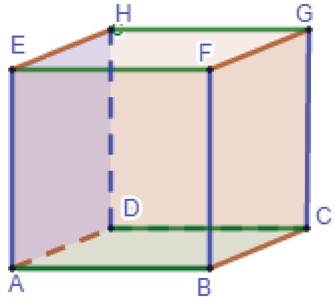


Fig. 6.

14. Ina se pregătește sa-i facă Silviei un cadou, de ziua ei. Are mai multe fotografii frumoase și decide că ar fi interesant să-i dăruiască un cub personalizat, realizat chiar de ea. Mai întâi va construi cubul iar apoi, pe fiecare față a cubului va atașa câte o fotografie. Observați *figura 6,* puneți-vă în situația Inei și răspundeți la câteva întrebări:

a) Câte fotografii va folosi Ina pentru cubul Silviei?

b) Ce formă au fotografiile, dacă acoperă întreaga suprafață a fețelor cubului?

c) Câte fotografii vor avea o latură comună? Numiți, folosind notațiile din figură, fețele care corespund fotografiilor, apoi numiți muchiile comune, corespunzătoare.

d) Câte fotografii se vor întâlni în fiecare vârf al cubului?

e) Câte perechi de fotografii care nu se ating există? Exemplificați, folosind notațiile din figură.

15. Un rezervor are forma unui cub, cu latura de 1,2 m.

a) Calculați volumul cubului și exprimați rezultatul în dm^3.

b) Calculați cantitatea de apă, exprimată în l, care se află în rezervor, dacă acesta este plin.

16. În figura 7, este reprezentat podiumul pentru premierea unor sportivi.

Calculați volumul de material necesar construcției lui, știind că: AG = 4,2 m, AB = 1,2 m, BC = 40 cm, CD = 1,4 m, $DE = BC$, $EF = CD$ și GH = 30 cm.

Indicație: Podiumul se obține prin alăturarea a trei paralelipipede dreptunghice.

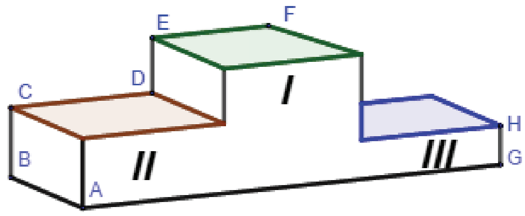


Fig. 7.

17. Sandu trebuie să acopere cu faianță suprafața reprezentată în figura 8. Știind că o placă de faianță are formă de pătrat cu latura 10 cm, aflați numărul plăcilor necesare pentru întreaga suprafață, folosind dimensiunile înscrise pe desen.

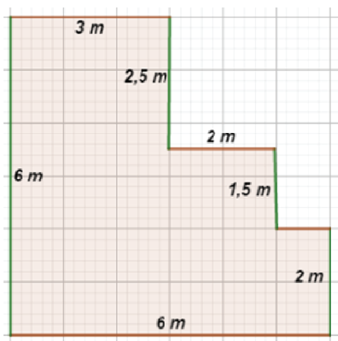


Fig. 8

18. Desenați pe câte o foaie volantă:

a) un segment și axa lui de simetrie;

b) un unghi și axa lui de simetrie;

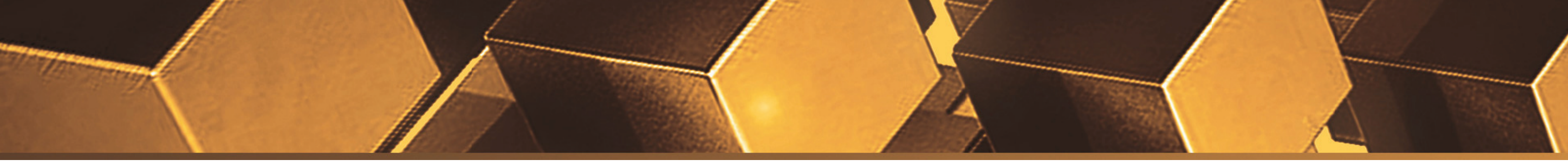
c) un dreptunghi și cele două axe de simetrie ale acestuia.

d) Verificați corectitudinea desenelor realizate, prin plierea foii, după dreptele pe care le considerați axe de simetrie.

19. Reprezentați un punct O, apoi desenați, cu ajutorul compasului, cercul cu centrul O și de rază 3 cm. Completați spațiile libere cu termeni matematici referitori la cerc, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) Toate punctele unui cerc sunt... depărtate de un punct fix, numit ... cercului.

b) Dacă A este un punct situat pe cercul desenat, atunci $OA = \ldots \text{cm}$.



5.2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor

1. a) Desenați o pereche de semidrepte opuse.

b) Desenați perechi de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi să nu formeze nicio pereche de semidrepte opuse.

c) Desenați perechi de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi să formeze o singură pereche de semidrepte opuse.

d) Desenați perechi de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi să formeze două perechi de semidrepte opuse.

Reținem

Unghiurile opuse la vârf sunt unghiuri cu laturile în prelungire

Unghiurile *MON* și *POQ* din figura 1, sunt *unghiuri opuse la vârf,* deoarece laturile lor, *OM* și *OQ* respectiv *ON* și *OP* sunt în prelungire (perechi de semidrepte opuse).

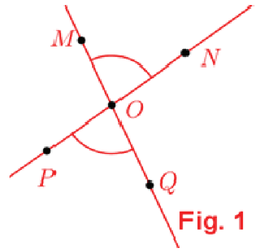


Fig. 1

Unghiurile *MOP* și *NOQ* sunt, de asemenea, opuse la vârf.

Cum desenați repede două unghiuri opuse la vârf?

2. Desenați două drepte concurente.

a) Câte unghiuri formează cele două drepte?

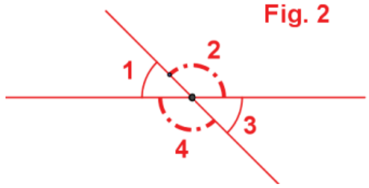
b) Câte perechi de unghiuri opuse la vârf formează cele două drepte?

c) Numiți unghiurile opuse la vârf, formate de cele două drepte concurente din figura 2.

d) Folosind un raportor, comparați unghiurile 1 și 3 din figura 2, apoi comparați unghiurile 2 și 4.

e) Numiți perechile de unghiuri suplementare din figura 2.

Fig. 2



Reținem

Unghiurile opuse la vârf sunt unghiuri congruente.

Desenând oricare alte două unghiuri opuse la vârf, folosind un raportor, vom constata că ele sunt congruente. În continuare, vom *demonstra* aceasta, folosind *raționamentul*. Raționamentul joacă un rol foarte important în matematică. Cu ajutorul lui se obțin proprietățile figurilor, care, de cele mai multe ori, nu pot fi deduse din desen prin folosirea instrumentelor geometrice.

Vocabular

a demonstra = a dovedi, a proba;
raționament = înlănțuire logică de judecăți;
demonstrație = dovedire prin raționament.

Demonstrație. Ne folosim de figura 2.

Suma unghiurilor 1 și 2 este un unghi alungit. La fel este și suma unghiurilor 2 ş 3.

Prin urmare:

$$\begin{cases} \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \sphericalangle 1 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 3 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \end{cases} \quad \text{Rezultă } \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3.$$

Asemănător se demonstrează că $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$. *Demonstrați!*

Rezumăm cunoștințele

***Unghiuri opuse la vârf** sunt două unghiuri ale căror laturi sunt perechi de semidrepte opuse.*

***Unghiurile opuse la vârf** sunt unghiuri congruente.*

3. Se consideră două drepte concurente. Dacă unul dintre cele patru unghiuri determinate de cele două drepte concurente are 28°, calculați măsurile celorlalte unghiuri.

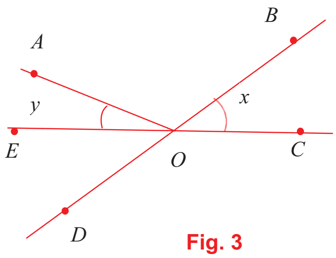


Fig. 3

4. În figura 3 se consideră $x = 48^\circ$ și $y = 32^\circ$.

a) Numiți perechile de unghiuri proprii congruente.
b) Aflați măsurile unghiurilor AOB, AOD și DOC.

Ne verificăm

1. a) Semidreptele OA și OB sunt opuse

Fig. 1.a.

b)

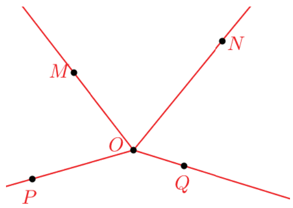


Fig. 1.b.

c) Semidreptele OM și OQ sunt opuse

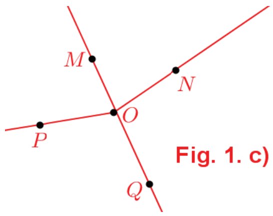


Fig. 1. c)

d) Perechi de semidrepte opuse:
OM și OQ; OP și ON.

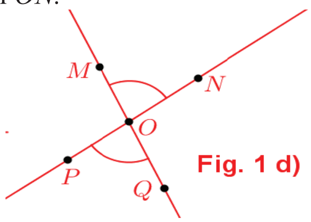


Fig. 1 d)

2. a) Patru unghiuri; b) Două perechi; c) $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 4$; d) $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$.
Desenăm două drepte concurente.

3. Cele două drepte concurente formează patru unghiuri, câte două opuse la vârf, deci câte două congruente. Atunci măsurile celor patru unghiuri sunt: x, x, y, y, unde, de exemplu, $x = 28^\circ$. Perechile de unghiuri care nu sunt opuse la vârf sunt adiacente și suplementare, adică $x + y = 180^\circ$. Cum $x = 28^\circ$ rezultă $y = 152^\circ$. Prin urmare, măsurile celor patru unghiuri determinate de cele două drepte concurente sunt de: 28°, 152°, 28°, 152°.

4. a) Folosind proprietatea unghiurilor opuse la vârf, rezultă perechile de unghiuri congruente: $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle DOE$;

b) Deoarece $\sphericalangle BOC = x = 48^\circ$, folosind rezultatele de la punctul a), rezultă $\sphericalangle DOE = 48^\circ$. Suma dintre unghiurile DOE și DOC este un unghi alungit, deci $\sphericalangle DOC = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$, iar din $\sphericalangle EOB \equiv \sphericalangle DOC$ rezultă $\sphericalangle EOB = 132^\circ$.

Apoi: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle EOB - \sphericalangle AOE = 100^\circ$ și $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOE + \sphericalangle DOE = y + x = 80^\circ$.

Activități de învățare

1. Două dintre cele patru unghiuri, formate de două drepte secante, au suma măsurilor egală cu 160°. Calculați măsurile unghiurilor.

2. Unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf, $O \in AC$, $\sphericalangle AOB = 2 \cdot x^\circ - 24^\circ$ și $\sphericalangle COD = 98^\circ$. Determinați valoarea lui x.

3. Observați *figura 1* și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Dreptele AC și DE sunt .... în punctul ......;
b) Semidreptele BA și BC sunt..........................;
c) Semidreptele BD și BE sunt..........................;
d) Unghiurile ABD și ....sunt opuse la vârf;
e) Unghiurile ABE și ....sunt congruente;

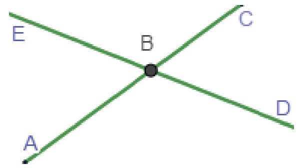


Fig.1

4. Observați configurația din *figura 2* și precizați, discutând cu colegul/colega de bancă:
a) trei perechi de semidrepte opuse;
b) trei unghiuri alungite;
c) trei perechi de unghiuri opuse la vârf.

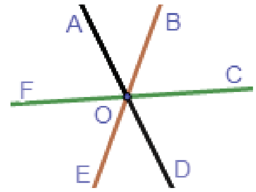


Fig.2

5. Pentru fiecare din situațiile următoare, folosind instrumentele geometrice, construiți și notați corespunzător:
a) unghiurile AOB și COD opuse la vârf;
b) unghiurile AOB și MON care nu sunt opuse la vârf;
c) unghiurile ABC și DBE opuse la vârf, cu $\sphericalangle ABC = 50°$;
d) unghiurile AOB și COD opuse la vârf, cu $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$.

6. În *figura 3,* dreptele AB și CD sunt secante în O, iar măsura unghiului AOC este 58°. Aflați măsurile unghiurilor BOD și AOD.

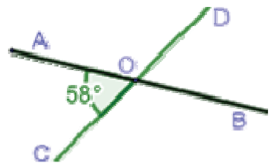
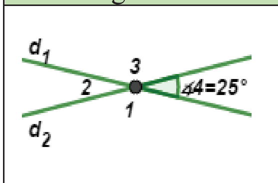
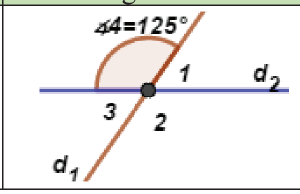
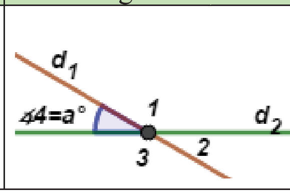
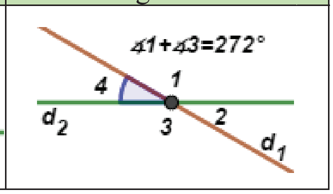
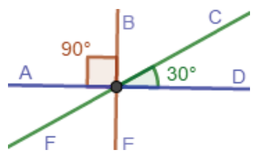


Fig. 3

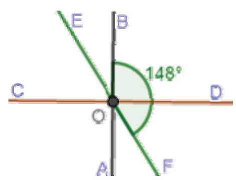
7. În fiecare dintre configurațiile din *figura 4*, dreptele d_1 și d_2 sunt secante.
Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle 1, \sphericalangle 2, \sphericalangle 3$. Alegeți unul din cele patru desene și realizați-l, cu ajutorul instrumentelor geometrice, pe caiet.

Figura 4a	Figura 4b	Figura 4c	Figura 4d
			

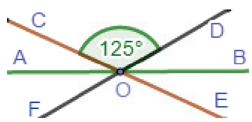
8. În *figura 5*, dreptele AD, BE și CF sunt concurente în punctul O.
Se știe că $\sphericalangle AOB = 90°$ și $\sphericalangle COD = 30°$.
a) Calculați măsurile unghiurilor DOE, AOF.
b) Calculați măsurile unghiurilor AOD, BOD.
c) Calculați măsurile unghiurilor BOC, DOF.

Fig. 5


9. În *figura 6,* dreptele AB, CD și EF sunt concurente în punctul O, unghiul AOC este unghi drept și $\sphericalangle BOF = 148°$. Calculați măsurile unghiurilor BOD, AOE, DOF, EOC, DOE.

Fig. 6


10. În *figura 7*, punctul O este situat în interiorul segmentului AB.
De aceeași parte a dreptei AB, se consideră semidreptele OC și OD astfel încât C se află în interiorul unghiului AOD și $\sphericalangle COD = 125°$. Semidreapta OE este opusă semidreptei OC iar semidreapta OF este opusă semidreptei OD.
a) Calculați măsura unghiului EOF;
b) Știind că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOE = 50°$, calculați măsurile unghiurilor AOF și DOE.

Fig. 7


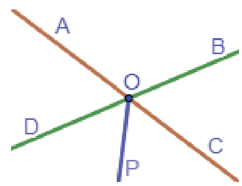
11. Construiți 5 drepte concurente. Determinați, folosindu-vă de notații potrivite, numărul perechilor de unghiuri opuse la vârf, pe care configurația realizată le conține.

12. În *figura 8* $AC \cap BD = \{O\}$, iar semidreapta OP formează unghiuri congruente cu laturile unghiului COD. Se știe, de asemenea că $\sphericalangle COP = 60^\circ$.

a) Calculați măsurile unghiurilor DOP, AOB și BOC.

b) Demonstrați că $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOP$.

Fig. 8

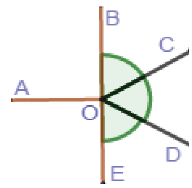


13. În *figura 9* se știe că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOE$ și $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE$ iar semidreptele OB și OE sunt opuse.

a) Calculați măsurile unghiurilor AOB, COD, AOC;

b) Demonstrați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle AOD$.

Fig. 9



14. Punctele A, O, B sunt coliniare, iar punctele C și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\sphericalangle AOB$ este unghi alungit, iar $\sphericalangle COD$ este unghi drept. Se știe că $\sphericalangle COB = \sphericalangle BOD - 16^\circ$, iar OE este semidreapta opusă semidreptei OD. Determinați măsurile unghiurilor COB, BOD, AOE și AOD.

15. Se consideră unghiul alungit AOB și semidreapta OC astfel încât $\sphericalangle AOC = 4 \cdot \sphericalangle COB$.

a) Calculați măsurile unghiurilor AOC și COB.

b) Desenați semidreapta OD, opusă semidreptei OC.

c) Determinați măsurile unghiurilor AOD și BOD.

5.3. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor

Rezolvăm și descoperim

1. Despre cele trei unghiuri marcate în figura 1 se știe că $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $\sphericalangle BOC = 120^\circ$ și $\sphericalangle DOA = 150^\circ$.

a) Numiți vârful celor trei unghiuri.

b) Câte perechi de unghiuri se pot forma cu cele trei unghiuri? Cercetați dacă, printre acestea, există o pereche de unghiuri care nu au interioarele disjuncte.

c) Calculați suma măsurilor celor trei unghiuri.

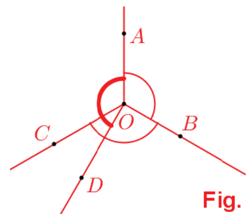


Fig. 1

2. Reluați rezolvarea cerințelor problemei **1.** știind că cele trei unghiuri sunt cele din figura 2 și $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $\sphericalangle BOC = 120^\circ$ și $\sphericalangle COA = 120^\circ$.

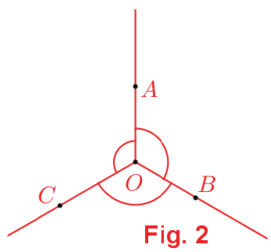


Fig. 2

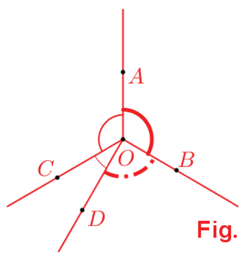


Fig. 3

3. Reluați rezolvarea cerințelor problemei **1.** știind că, în loc de trei unghiuri, sunt patru unghiuri date: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle COA$ cărora nu le cunoaștem măsurile (fig.3).

Reținem

Unghiuri în jurul unui punct = un număr finit de unghiuri, cu următoarele proprietăți:
1) au vârful comun;
2) oricare două dintre ele au interioarele disjuncte;
3) suma măsurilor unghiurilor este egală cu 360°.

Unghiurile *AOB*, *BOC* și *COA* din figura 2 sunt *unghiuri în jurul punctului O*. La fel sunt și cele patru unghiuri din figura 3. Cele trei unghiuri din figura 1 (unghiurile *AOB*, *BOC* și *DOA*) nu sunt unghiuri în jurul punctului *O* deoarece există două unghiuri, *BOC* și *DOA,* care nu au interioarele disjuncte.

Rezumăm cunoștințele

Unghiuri în jurul unui punct *sunt un număr finit de unghiuri, care au următoarele proprietăți:*
1) au vârful comun;
2) oricare două dintre ele au interioarele disjuncte;
3) suma măsurilor lor este egală cu 360°.

Aplicăm cunoștințele

4. Desenați patru unghiuri *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* cu vârful comun într-un punct *O*, astfel încât oricare două să aibă interioarele disjuncte, iar unghiurile să aibă măsurile, în această ordine: 25°, 95°, 60° și 45°.
a) Sunt cele patru unghiuri în jurul punctului *O*?
b) Pe figura realizată, identificați un al cincilea unghi, astfel încât cele cinci unghiuri să fie unghiuri în jurul punctului *O* și explicați răspunsul dat.
c) Pe figura realizată, identificați un al cincilea unghi astfel încât cele cinci unghiuri să nu fie unghiuri în jurul punctului *O* și explicați răspunsul dat.

Ne verificăm

1. a) Vârful comun al celor trei unghiuri este punctul *O*.
b) Se pot forma următoarele perechi de unghiuri: $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOA$; $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle DOA$. Dintre acestea, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle DOA$ nu au interioarele disjuncte.
c) Suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 390°.

2. a) Vârful comun este punctul *O*. b) Se pot forma următoarele perechi de unghiuri: $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COA$; $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$. Oricare două dintre acestea au interioarele disjuncte, deci nu există, printre cele trei unghiuri date, două unghiuri care să nu aibă interioarele disjuncte. c) Suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 360°.

3. a) Vârful comun este punctul *O*.
b) Se pot forma șase perechi de unghiuri.
Oricare două dintre aceste perechi au interioarele disjuncte, deci nu există, printre cele patru unghiuri date, două unghiuri care să nu aibă interioarele disjuncte.
c) Suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 360°.

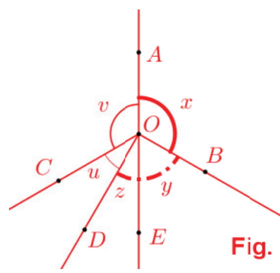


Fig. 4

Demonstrație. Desenăm semidreapta *OE*, opusă semidreptei *OA*. Notăm măsurile unghiurilor: $\sphericalangle AOB = x$, $\sphericalangle BOE = y$ și așa mai departe (figura 4). Observăm că $\sphericalangle BOD = y + z$.
Atunci, suma măsurilor unghiurilor *AOB*, *BOD*, *DOC* și *COA* este egală cu

$$\underbrace{x + y}_{180^\circ} + \underbrace{z + u + v}_{180^\circ} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

4. a) Unghiurile AOB, BOC, COD, DOE nu sunt unghiuri în jurul punctului O, deoarece suma lor este de 225°.

b) Identificăm unghiul EOA. Deoarece unghiurile EOA și DOE sunt adiacente suplementare și $\sphericalangle DOE = 45^\circ$ rezultă $\sphericalangle EOA = 135^\circ$.

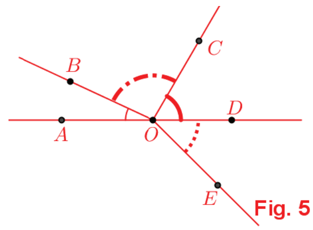


Fig. 5

Cele cinci unghiuri AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt unghiuri în jurul punctului O deoarece au vârful comun, oricare două au interioarele disjuncte, iar suma lor este egală cu 360°.

c) Identificăm unghiul EOB. Cele cinci unghiuri AOB, BOC, COD, DOE și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O deoarece: au vârful comun, dar două unghiuri AOB și EOB nu au interioarele disjuncte, iar suma lor este mai mare de 360°. Într-adevăr, cum $\sphericalangle EOA = 135^\circ$ și $\sphericalangle AOB = 25^\circ$, rezultă $\sphericalangle EOB = 135^\circ + 25^\circ = 160^\circ$, deci suma măsurilor celor cinci unghiuri este egală cu 385°.

Activități de învățare

1. Ceasul de pe peretele din camera lui Darius s-a oprit la ora 10, 10 minute și 35 secunde *(figura 1)*. Darius observă că *orarul, minutarul și secundarul* ceasului formează unghiuri, două câte două și se întreabă câte unghiuri se formează în total și ce măsuri au aceste unghiuri.

Fig. 1.

Observați cu atenție *figura 1* și deduceți numărul unghiurilor care au ca laturi, semidreptele determinate de acele de ceasornic, în poziția fixă din imagine.

a) Realizați un desen, folosind instrumentele geometrice, prin care să evidențiați unghiurile observate.

b) Măsurați, cu ajutorul unui raportor, unghiurile din desenul realizat și calculați suma lor.

2. Construiți 8 drepte distincte concurente. Demonstrați că cel puțin unul dintre unghiurile formate are măsura mai mică de 23°.

3. Observați *figura 2* și argumentați, împreună cu colega/colegul de bancă, corectitudinea afirmațiilor:

a) Unghiurile AOB, BOC și COA sunt unghiuri în jurul punctului O.

b) Unghiurile AOB, BOC și COA nu au puncte interioare comune.

c) Are loc relația: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COA = 360^\circ$.

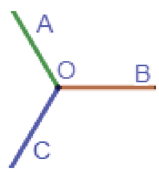


Fig. 2.

4. Desenați un unghi obtuz AOB. Reprezentați apoi semidreapta OC, în interiorul unghiului și semidreapta OD, opusă acesteia.

4.1. Referindu-vă la desenul realizat, numiți:

a) seturi de unghiuri în jurul punctului O;

b) seturi de unghiuri care nu sunt unghiuri în jurul punctului O;

c) seturi de unghiuri care nu au puncte interioare comune;

d) unghiuri care au puncte interioare comune.

4.2. Calculați: a) $\sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD$; b) $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD + \sphericalangle DOA$.

5. Unghiurile AOB și AOC nu au puncte interioare comune, iar măsurile lor sunt: $\sphericalangle AOB = 130^\circ$, $\sphericalangle AOC = 85^\circ$. Determinați măsura unghiului BOC.

6. În *figura 3*, $\sphericalangle AOB$ este unghi drept, $\sphericalangle BOC = 60^\circ$, $\sphericalangle COD = x^\circ$.

a) Pentru $x = 72$, calculați măsura unghiului AOD.

b) Pentru $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD$, aflați valoarea lui x și măsura unghiului AOD.

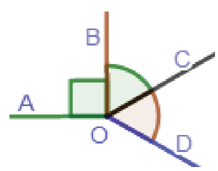


Fig. 3.

7. În jurul unui punct sau format n unghiuri congruente.

a) Pentru $n = 5$, determinați măsurile celor n unghiuri.

b) Determinați numărul n, știind că suma a trei dintre unghiurile formate în jurul punctului, formează, împreună, un unghi alungit.

8. Unghiurile AOB, BOC, COD, DOA sunt unghiuri în jurul punctului O și satisfac relațiile: $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle COA$ și $\sphericalangle AOD = 108^\circ$. Calculați măsurile celor patru unghiuri.

9. Unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt unghiuri în jurul punctului O și satisfac relațiile: $\sphericalangle AOB = 76^\circ$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB + 13^\circ$, $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOA$.

a) Aflați măsurile celor cinci unghiuri.

b) Realizați un desen, folosind rezultatele obținute.

10. Folosind informațiile din imaginile următoare (*figura* 4), determinați valorile lui x și măsurile unghiurilor formate în jurul punctului M, în fiecare caz.

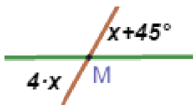


Fig. 4.a.

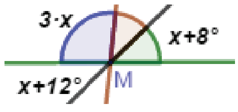


Fig. 4.b.

Fig. 4.c.

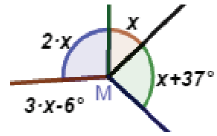


Fig. 4.d.

Alegeți apoi unul dintre cele patru desene, pe care îl veți realiza pe caiet, colaborând cu colegii din imediata vecinătate.

11. Desenați unghiurile AOD și BOC, opuse la vârf, $O \in AB$, unghiul drept DOE, E fiind situat în interiorul unghiului BOD și semidreapta OP, interioară unghiului BOC, astfel încât $\sphericalangle BOP \equiv \sphericalangle COP$. Știind că $\sphericalangle BOP = 34^\circ$, calculați măsurile unghiurilor BOC, BOD, AOD, AOP.

12. Unghiul MON are măsura 60°, iar semidreptele OP și OQ formează cu laturile OM, respectiv ON, unghiuri drepte. Calculați măsura unghiului POQ, analizând toate cazurile posibile.

13. Laturile unghiului drept POQ se află în interiorul unghiului propriu AOB astfel încât $\sphericalangle AOP = 20^\circ, \sphericalangle BOQ = 30^\circ$. Se consideră OC, semidreapta opusă semidreptei OA și DOQ unghi alungit. Determinați măsurile unghiurilor AOD, BOC și COD.

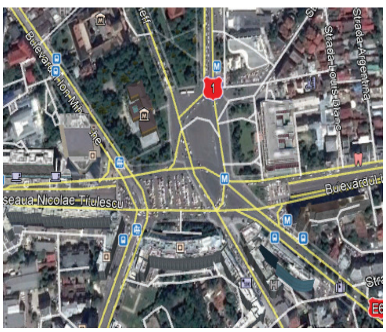
14. Imaginea de mai jos (captură Google Earth) redă Piața Victoriei din București.

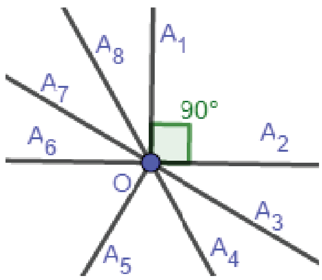
Notăm centrul pieței cu O și observăm că acesta este punctul de întâlnire a opt bulevarde (studiați harta!) pe care le vom nota $OA_1, OA_2, ..., OA_8$. Marin observă că $\sphericalangle A_1OA_2 = 90^\circ$,

$$\sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_3OA_4 = \sphericalangle A_6OA_7 = \sphericalangle A_7OA_8 = \sphericalangle A_8OA_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle A_4OA_5 = \frac{1}{2}\sphericalangle A_5OA_6 = x^\circ.$$

a) Determinați valoarea lui x și măsurile unghiurilor A_2OA_3, A_4OA_5 și A_1OA_5.

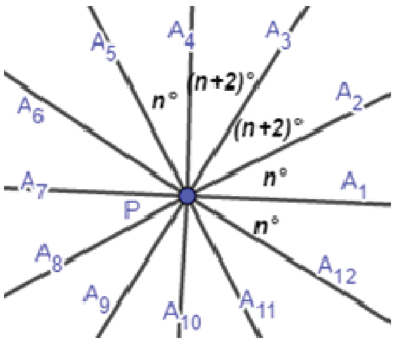
b) Verificați dacă, printre cele opt bulevarde, există două în prelungire.





15. Măsura unui unghi format de două drepte, concurente într-un punct Q, este media aritmetică a celorlalte unghiuri care se formează în jurul punctului Q. Calculați măsura celor patru unghiuri.

16. Imaginea alăturată (captură Google Earth) redă Piața Charles de Gaulle din Paris. Notăm centrul pieței cu P și observăm că acesta este punctul de întâlnire a 12 bulevarde (studiați harta!) pe care le vom nota $PA_1, PA_2, ..., PA_{12}$. Mara observă cu atenție, face măsurători și constată că fiecare bulevard formează, cu cele învecinate, unghiuri cu măsura de $n°$, respectiv $(n + 2)°$ și că $\sphericalangle A_1PA_{12} = n°$.



a) Determinați valoarea lui n și măsurile unghiurilor A_1PA_2, A_2PA_3 și A_1PA_5 .

b) Verificați dacă, printre cele douăsprezece bulevarde, există două în prelungire.

17. Imaginea alăturată reprezintă un evantai japonez cu zece nervuri. Unghiul dintre oricare două nervuri alăturate (presupunem că nervurile nu au grosime) are măsura de 15°.

a) Determinați măsura unghiului format de cele două nervuri extreme. Această măsură se numește *deschiderea evantaiului.* Câte nervuri are un evantai japonez cu aceeași deschidere ca evantaiul din imagine, dacă măsura unghiului dintre oricare două nervuri alăturate este de 11°15′?

b) Câte nervuri poate avea un evantai japonez cu proprietatea ca, la o deschidere în semicerc (unghiul format de nervurile extreme este alungit), măsura unghiului dintre oricare două nervuri alăturate, exprimată în grade sexagesimale, este un număr întreg cuprins între 16 și 32?

Etapa locală, Brașov 2016, enunț modificat

5.4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente.

Rezolvăm

1. Folosind un raportor:

a) desenați două unghiuri M și N astfel încât $\sphericalangle M = 145^\circ$ și $\sphericalangle N = 35^\circ$, apoi calculați suma acestora.

b) desenați două unghiuri A și B astfel încât $\sphericalangle A = 30^\circ$ și $\sphericalangle B = 60^\circ$, apoi calculați suma acestora.

a)

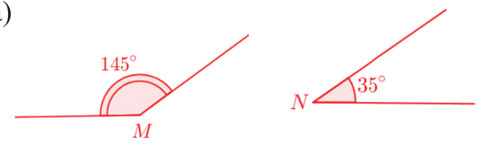


Fig. 1.1

$\sphericalangle M + \sphericalangle N = 145^\circ + 35^\circ = 180^\circ$

b)

Fig. 1.2

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

Reținem

Unghiurile suplementare au suma măsurilor egală cu 180°.
Unghiurile complementare au suma măsurilor egală cu 90°.

Prin urmare:
- deoarece suma măsurilor unghiurilor M și N din figura 1.1 este egală cu 180°, unghiurile M și N sunt *unghiuri suplementare*;
- deoarece suma măsurilor unghiurilor A și B din figura 1.2 este egală cu 90°, unghiurile A și B sunt *unghiuri complementare.*

Vocabular
Interioare disjuncte = interioare fără puncte comune;
Unghiuri adiacente = au vârful comun, o latură comună și interioarele disjuncte

2. a) Desenați un unghi AOB și hașurați interiorul acestuia.

b) Desenați două unghiuri AOB și BOC cu o latură comună și cu interioarele fără puncte comune (interioarele disjuncte).

a)

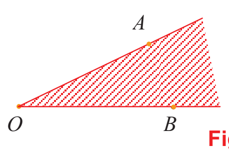


Fig.2.1

b)

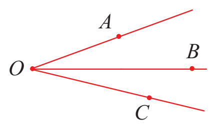


Fig. 2

Prin urmare, unghiurile AOB și BOC din figura 2.2 sunt *unghiuri adiacente,* deoarece ele au vârful O comun, latura OB comună și interioarele disjuncte.

Rezumăm cunoștințele

Unghiuri suplementare *sunt două unghiuri care au suma măsurilor egală cu* 180°, *fiecare fiind suplementul celuilalt.*

Unghiuri complementare *sunt două unghiuri care au suma măsurilor egală cu* 90°, *fiecare fiind complementul celuilalt.*

Unghiuri adiacente *sunt două unghiuri care au vârful comun, o latură comună și interioarele disjuncte.*

Aplicăm cunoștințele

3. a) Folosind o riglă și un echer, desenați două unghiuri adiacente complementare.

b) Folosind o riglă, desenați două unghiuri adiacente suplementare.

4. Explicați, pentru fiecare pereche de unghiuri din figura 3, de ce nu sunt unghiuri adiacente.

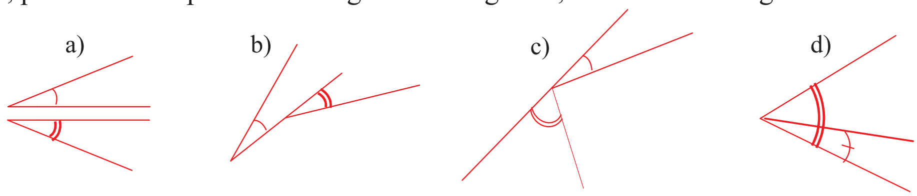
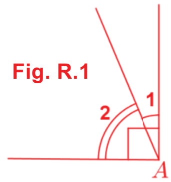


Fig. 3

Ne verificăm

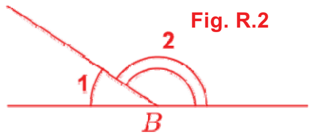
3. a) Cu echerul desenăm un unghi drept cu vârful în punctul A. În interiorul unghiului drept desenăm o semidreaptă cu originea în A, care formează cu laturile unghiului două unghiuri: unghiul 1 și unghiul 2. Cele două unghiuri sunt adiacente complementare (figura R.1).

Fig. R.1



b) Cu o riglă, desenăm un unghi alungit cu vârful într-un punct B și o semidreaptă oarecare, cu originea în punctul B și care să nu coincidă cu laturile unghiului alungit. Rezultă trei unghiuri cu originea în punctul B: unghiul alungit, unghiul 1 și unghiul 2. Unghiurile 1 și 2 sunt unghiuri adiacente suplementare (figura R.2).

Fig. R.2



4. a) unghiurile au interioarele disjuncte, dar nu au vârful comun și nici latură comună;
b) unghiurile au vârful comun, interioarele disjuncte, dar nu au latură comună;
c) unghiurile au vârful comun, o latură comună, dar interioarele lor nu sunt disjuncte.

Activități de învățare

1. Priviți desenul din *figura 1* și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Completați în căsuța alăturată litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

a) Unghiurile ABC și CBD sunt adiacente; ☐
b) Unghiurile ABD și CBE sunt adiacente; ☐
c) Unghiurile ABE și CBD sunt adiacente; ☐
d) Unghiurile ABD și DBE nu sunt adiacente. ☐

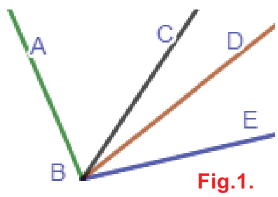


Fig.1.

2. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente.
a) Știind că $\sphericalangle AOB = 43°$ și $\sphericalangle BOC = 34°$, aflați măsura unghiului AOC.
b) Știind că $\sphericalangle AOC = 130°$ și $\sphericalangle BOC = 75°$, aflați măsura unghiului AOB.
c) Știind că $\sphericalangle AOC = 141°$ și $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$, aflați măsurile unghiurilor AOB și BOC.

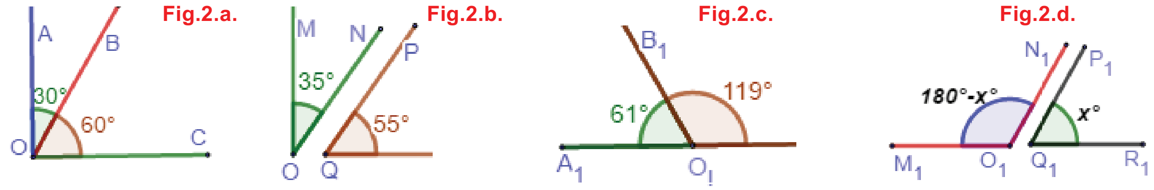
3. Realizați un desen în care unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, respectiv $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt două perechi de unghiuri adiacente.
a) Arătați că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOD - \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$.
b) Știind că măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ sunt exprimate prin numere naturale consecutive, ordonate crescător, iar $\sphericalangle AOC = 61°$, calculați $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$.

4. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a) Dacă două unghiuri au același complement, atunci ele sunt................ .
b) Dacă două unghiuri au același suplement, atunci ele sunt.................... .

5. Un unghi are măsura de 73°. Calculați:
a) măsura complementului său; b) măsura suplementului său.

6. Calculați diferența dintre suplementul unui unghi cu măsura de 65° și complementul unui unghi cu măsura de 38° .

7. Observând desenele din *figura 2,* completați spațiile libere cu unul dintre cuvintele *suplementare/complementare,* respectiv cu unul din cuvintele *adiacente/neadiacente* astfel încât să obțineți propoziții adevărate:



a) $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri.....................și unghiuri.......................;

b) $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle PQR$ sunt unghiuri.....................și unghiuri.......................;

c) $\sphericalangle A_1O_1B_1$ și $\sphericalangle B_1O_1C_1$ sunt unghiuri....................și unghiuri.......................;

d) $\sphericalangle M_1O_1N_1$ și $\sphericalangle P_1Q_1R_1$ sunt unghiuri....................și unghiuri..................... .

8. Diferența dintre măsurile a două unghiuri complementare este de 24°. Calculați măsurile celor două unghiuri.

9. În *figura 3*, unghiurile $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 4$ sunt complementare.

Alegeți răspunsul corect, apoi explicați colegului/colegei de bancă alegerea făcută; doar unul dintre răspunsuri este corect.

a) Unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 3$ sunt suplementare.

b) Unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 3$ sunt congruente.

c) Unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 3$ sunt drepte.

d) Unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 3$ sunt complementare.

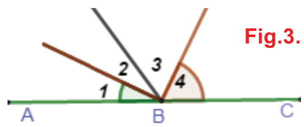


Fig.3.

10. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare, semidreapta OD este opusă semidreptei OB, iar semidreapta OE este opusă semidreptei OC (*figura 4*).

a) Demonstrați că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOE$ sunt unghiuri complementare.

b) Știind că $\sphericalangle DOC = 4 \cdot \sphericalangle AOB$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle AOD$.

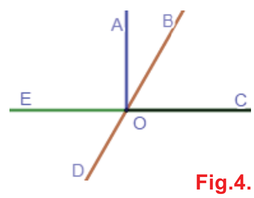


Fig.4.

11. Unghiurile AOC și COB sunt adiacente suplementare, iar punctele C și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\sphericalangle COD = 108^\circ$ și $\sphericalangle BOD = 3 \cdot \sphericalangle AOC$.
Determinați măsurile unghiurilor AOC, COB, BOD.

12. Desenați unghiurile adiacente complementare, AOB și BOC, apoi semidreapta OD astfel încât unghiurile BOC, COD să fie adiacente suplementare. Măsura unghiului AOB este x°.
Calculați, în funcție de x, măsurile unghiurilor BOC, COD și AOD. Dacă punctul E este situat în interiorul unghiului BOC și $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle EOC$, calculați măsurile unghiurilor AOB, COD.

5.5. Bisectoarea unui unghi. Construcţia bisectoarei unui unghi

Activități de învățare

1. Luați o coală de hârtie A4, având colțurile notate cu *A*, *B*, *C*, *D* și marcați un punct *M* oarecare pe latura *AB*. Urmărind indicațiile din figurile 1 a), b) și c), cu un foarfece, decupați după segmentul *DM*. Pliați bucata rămasă astfel încât punctul *B* să fie pe segmentul *DM*. Depliați bucata de hârtie și alegeți un punct oarecare *N* pe urma rămasă prin pliere.

a) Unghiurile *BMN* și *NMD* sunt adiacente. Justificați!

b) Cu ajutorul unui raportor, măsurați unghiule *BMD*, *BMN* și *NMD*. Ce constatați?

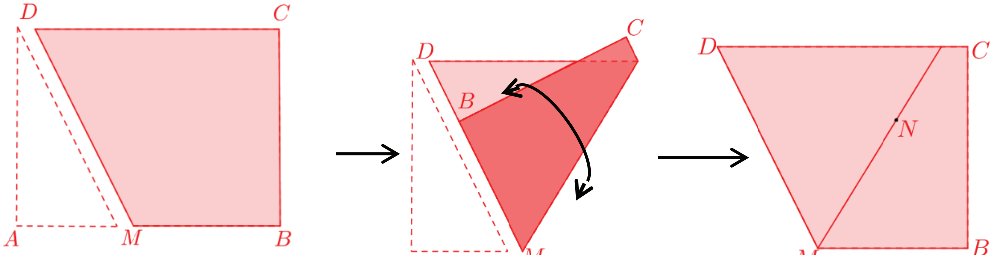


Fig. 1. a) Fig. 1.b) Fig. 1.c)

Deoarece unghiurile *BMN* și *NMD* sunt congruente, se spune că semidreapta *MN* este bisectoarea unghiului *BMD*.

Cum trebuie să pliem pentru a obține bisectoarea unghiului BMN?

***Bisectoarea unui unghi** este semidreapta care formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente congruente.*

2. Se desenează un unghi *AOB* cu măsura de 156° (figura 2). Se notează cu *OM* bisectoarea unghiului *AOB* și cu *ON* bisectoarea unghiului *AOM*.

a) Aflați măsura unghiului *MON*.

b) Construiți, apoi, cele două bisectoare, folosind un raportor; verificați măsura unghiului *MON*.

Fig. 2

3. Desenați un unghi *POR* cu măsura 28° (figura 3).

a) Desenați bisectoarea *OQ* a unghiului *POR*.

b) Identificați axa de simetrie a unghiului *POR*. Justificați răspunsul!

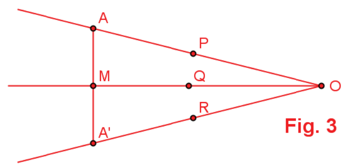


Fig. 3

Reținem

***Bisectoarea unui unghi** este axa de simetrie a unghiului.*

Bisectoarea este *axa de simetrie a unghiului* deoarece ea „înjumătățește unghiul”. Aceasta înseamnă că, dacă se ia un punct oarecare *A* pe o latură a unghiului, simetricul lui față de bisectoare, notat cu A', se găsește pe cealaltă latură a unghiului, deci M este mijlocul segmentului AA' (verificați cu compasul!), $OA = OA'$, iar unghiurile *OMA* și OMA' sunt drepte (verificați cu echerul!). Această observație sugerează *construcția bisectoarei unui unghi cu compasul și echerul*:

1) cu vârful compasului în *O*, trasăm un arc de cerc care intersectează laturile unghiului în două puncte, notate cu *A* și A'; atunci $OA = OA'$ (au lungimea egală cu lungimea deschiderii compasului);

2) plasăm echerul cu vârful unghiului drept în punctul *A*, astfel încât o latură a acestuia să se sprijine pe segmentul AA';

3) lăsăm echerul să alunece de-a lungul segmentului AA' până când cealaltă latură de echer a unghiului drept va trece prin punctul *O*; cu creionul în vârful unghiului drept al echerului marcăm pe segmentul AA', punctul *M*.

Bisectoarea unghiului este semidreapta *OM*.

Reținem

***Bisectoarea unui unghi** este semidreapta interioară unghiului, care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.*
***Bisectoarea unui unghi** este axa de simetrie a unghiului.*

4. Desenați un unghi AOB cu măsura de 80°.
a) Folosind echerul și compasul, construiți bisectoarea unghiului AOB și notați-o cu OS.
b) Folosind raportorul, arătați că OS este bisectoare.

Ne verificăm

1. a) Unghiurile BMN și NMD sunt adiacente deoarece au același vârf și interioarele disjuncte.
b) Constatăm că $\sphericalangle BMN = \dfrac{\sphericalangle BMD}{2}$ și $\sphericalangle NMD = \dfrac{\sphericalangle BMD}{2}$, deci $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle NMD$.
Pliem astfel ca punctul B să fie pe MN.

2. a) Bisectoarea OM a unghiului AOB „înjumătățește unghiul”, o jumătate având măsura $156^{\circ} : 2 = 78^{\circ}$ (figura R1). Aceasta permite construirea unghiului AOM și deci a bisectoarei OM. Bisectoarea ON a unghiului AOM „înjumătățește unghiul”, o jumătate având măsura $78^{\circ} : 2 = 39^{\circ}$. Aceasta permite construirea unghiului AON și deci a bisectoarei ON.
b) Măsurând cu raportorul, găsim $\sphericalangle MON = 39^{\circ}$

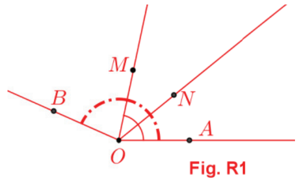


Fig. R1

4. a) În urma unei construcții corecte, rezultă figura R2. Măsurând cu raportorul direct pe figură, găsim $\sphericalangle AOS = 40^{\circ}$ și $\sphericalangle SOB = 40^{\circ}$, deci OS este bisectoarea unghiului AOB.

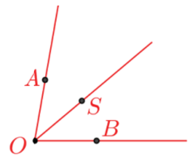


Fig. R2

Activități de învățare

1. Desenați, folosind rigla și raportorul, un unghi AOB cu măsura de 70°. În interiorul acestuia, reprezentați punctul C astfel încât $\sphericalangle AOC = 35^{\circ}$. Demonstrați că semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOB.

2. Pe o coală de hârtie, desenați un unghi MNP. Îndoiți coala de hârtie, așa încât cele două laturi ale unghiului să se suprapună. Pe îndoitura obținută, în interiorul unghiului dat, reprezentați punctul Q. Justificați afirmațiile:
a) $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNQ$;   b) Semidreapta NQ este bisectoarea unghiului MNP.

3. Desenați, folosind echerul, unghiul drept $\sphericalangle AOB$ și semidreapta OC, opusă semidreptei OB. Arătați că semidreapta OA este bisectoarea unghiului BOC.

4. Se consideră unghiul AOB și bisectoarea sa, OC.
a) Dacă $\sphericalangle AOB = 100^{\circ}40'$, aflați măsurile unghiurilor AOC și BOC.
b) Dacă $\sphericalangle BOC = 40^{\circ}50'$, aflați măsurile unghiurilor AOC și AOB.

5. În *figura 1*, semidreapta OP este bisectoarea unghiului AOB. Unghiul AOC este drept, iar $\sphericalangle BOC = 20^{\circ}$. Calculați măsurile unghiurilor AOP, BOP, POC.

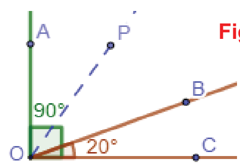


Fig. 1.

6. Folosind metoda reducerii la absurd, *lucrând împreună cu alți trei colegi*, demonstrați că un unghi are o singură bisectoare.

7. Dreptele AB și CD se intersectează în punctul O, semidreapta OP este bisectoarea unghiului AOC iar $\sphericalangle BOP = 120^\circ$ (*figura 2*).
a) Calculați măsurile unghiurilor AOP, BOD, AOD;
b) Arătați că semidreapta OA este bisectoarea unghiului DOP.

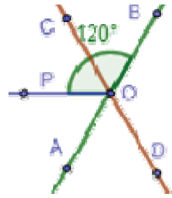


Fig. 2.

8. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, OB este bisectoarea unghiului AOC, iar OC este bisectoarea unghiului AOD.
a) Dacă $\sphericalangle AOB = 25^\circ$, calculați măsurile unghiurilor AOC și AOD.
b) Dacă $\sphericalangle AOD = 108^\circ$, calculați măsurile unghiurilor AOC și BOD.

9. Fie OA bisectoarea unghiului MON și OB semidreapta opusă ei. Demonstrați că $\sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle NOB$.

10. Unghiul AOB este alungit, iar ON este bisectoarea unghiului $BOM, M \notin AB$. Știind că $\sphericalangle MON = 43^\circ$, determinați măsura unghiului AON.

11. Unghiurile AOB, BOC și COD formează două perechi de unghiuri adiacente și $\sphericalangle BOC = 40^\circ$. Bisectoarele unghiurilor AOB și COD formează un unghi drept, iar $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$. Calculați $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ și AOD.

12. Desenați unghiurile adiacente suplementare ABC și CBD, apoi bisectoarea BM a unghiului ABC. Se știe că $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ABM$. Calculați:
a) măsurile unghiurilor ABM, ABC, DBM.
b) măsurile unghiului format de semidreapta opusă semidreptei BC și bisectoarea unghiului DBM.

13. Se consideră unghiurile adiacente AOB și BOC astfel încât raportul măsurilor lor să fie $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle BOC} = 0,6$. Dacă $\sphericalangle AOC = 144^\circ$, iar OD este bisectoarea unghiului AOB, determinați măsura unghiului COD.

14. În jurul punctului P se formează nouă unghiuri congruente. Demonstrați că, oricum am alege o bisectoare a unuia dintre ele, găsim o semidreaptă, latură a unui unghi dintre cele nouă, cu care să formeze un unghi alungit.

15. Semidreptele OZ și OT sunt interioare unghiului XOY și au loc relațiile: $\sphericalangle XOY = 118^\circ$, $\sphericalangle XOT = \sphericalangle YOZ = 80^\circ$. Demonstrați că unghiurile XOY și ZOT au aceeași bisectoare.

16. În interiorul unghiului drept AOB, se aleg punctele X și Z, iar în exteriorul său se aleg punctele Y și T astfel încât OA este bisectoarea unghiului XOY, OB este bisectoarea unghiului ZOT și $\sphericalangle XOY \equiv \sphericalangle ZOT$.
a) Demonstrați că unghiurile XOT și YOZ sunt congruente. Analizați toate cazurile posibile.
b) Demonstrați că unghiurile XOZ, AOB și YOT au aceeași bisectoare.

5.6. Drepte paralele

Observăm și demonstrăm

1. Figura 1 reprezintă liniatura unei porțiuni dintr-o pagină a unui caiet de matematică, pe care sunt desenate patru drepte *a*, *b*, *c* și *d*. Este intersecția dreptelor *a* și *b* mulțimea vidă? Dar a dreptelor *c* și *d*?

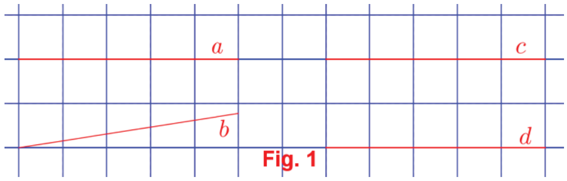


Fig. 1

2. Figura 2.1 reprezintă imaginea foto a unei cutii.

a) În geometrie, cutia se identifică cu un *corp geometric*. Cum se numește corpul geometric respectiv?

b) Câte vârfuri are cutia? Dar muchii?

Observați că orice muchie a cutiei determină o dreaptă (figura 2.2).


Fig. 2.1


Fig. 2.2

c) Stabiliți dacă există *muchii coplanare* care să determine o pereche de drepte cu intersecția nevidă.

d) Stabiliți dacă există *muchii necoplanare* care să determine o pereche de drepte cu intersecția vidă.

e) Stabiliți dacă există două *muchii coplanare* care să determine o pereche de drepte cu intersecția vidă.

> ***Dicționar***
> *muchii coplanare =*
> *muchii aflate pe aceeași față;*
> *muchii necoplanare =*
> *muchii aflate pe fețe distincte.*

Reținem

Două drepte oarecare pot fi:

- ***drepte necoplanare**, adică situate în planuri diferite;*
- ***drepte coplanare**, adică situate în același plan.*

Intersecția a două drepte necoplanare este mulțimea vidă.
Intersecția a două drepte coplanare poate fi mulțimea vidă sau poate conține un punct.

Despre două drepte din același plan, se spune că sunt *drepte paralele* dacă nu au puncte comune. În acest caz, intersecția lor este egală cu mulțimea vidă. Dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b,* se notează $a \parallel b$.

Dacă dreapta *a* nu este paralelă cu dreapta *b,* se notează $a \nparallel b$.

Reținem

*Oricare ar fi două drepte ale unui plan, acestea **sunt paralele** sau **se intersectează**:*

- *dacă **dreptele sunt paralele**, intersecția lor este mulțimea vidă;*
- *dacă **dreptele se intersectează** atunci intersecția lor este un punct și dreptele se mai numesc **drepte concurente.***

Construcția dreptelor paralele

3. Figura 1 arată cum se poate desena ușor, o dreapta *a* paralelă cu o dreaptă *b,* pe o pagină din caietul de matematică, folosind liniatura acestuia.

Mihai dispune de un echer, de o coală albă de hârtie și de un creion. Pe coala de hârtie este desenată o dreaptă d și un punct *A*, care nu aparține dreptei (figura 3). Dorind să deseneze o dreaptă *a* care să treacă prin *A* și să fie paralelă cu *d*, Mihai parcurge succesiv următoarele etape:

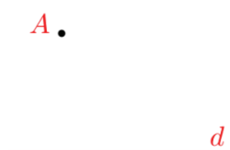


Fig. 3

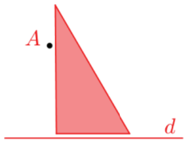


Fig. 3.1

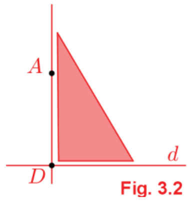


Fig. 3.2

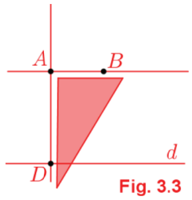


Fig. 3.3

1) plasează echerul astfel ca una dintre muchiile acestuia care conțin vârful unghiului drept să se sprijine pe dreapta *d*, iar cealaltă să treacă prin punctul *A* (figura 3.1).
2) în dreptul vârfului unghiului drept al echerului, marchează punctul *D* pe dreapta *d* și trasează dreapta *AD* (figura 3.2).
3) plasează echerul astfel ca una dintre muchiile acestuia care conțin vârful unghiului drept să se sprijine pe dreapta *AD*, iar pe cealaltă muchie a echerului marchează un punct *B*.
Mihai susține că $AB \parallel d$. Are dreptate?

4. Pentru a dovedi că Mihai are dreptate, mai întâi este necesar să observați figura 4.

Fig. 4

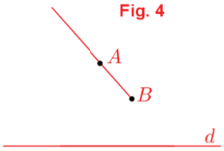


Fig. 4.1

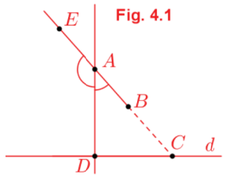
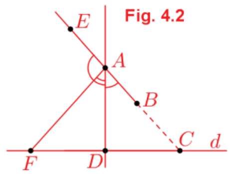


Fig. 4.2



Vom *demonstra* că Mihai are dreptate folosind *raționamentul* următor:

A. Presupunem că $AB \nparallel d$. Atunci *AB* intersectează dreapta *d* într-un punct *C* (figura 4.1).

B. Pe semidreapta opusă semidreptei *AB*, desenăm un punct *E* (figura 4.1) și observăm următoarele:

- $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = 90^\circ$ (din construcția cu echerul a acestui unghi, conform figurii 3.3);
- $\sphericalangle DAE = 90^\circ$, fiind adiacent unghiului $\sphericalangle BAD$ și suplementul acestuia.

Pliem desenul de-a lungul dreptei AD (figura 4.2), astfel încât punctul *C* să ajungă în punctul *F*. Atunci *AD* este axă de simetrie pentru unghiul *CAF*, deci *AD* va fi bisectoarea acestuia. Rezultă $\sphericalangle DAF = 90^\circ$.
Atunci: $\sphericalangle CAD + \sphericalangle DAF + \sphericalangle FAE = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$.
Pe de altă parte, suma măsurilor celor trei unghiuri este un unghi alungit.

Concluzie: presupunând că $AB \nparallel d$, putem proba cu argumente logice că există un unghi alungit cu măsura de 270°, ceea ce este absurd. Nu putem accepta că $AB \nparallel d$.

Rezultă $AB \parallel d$. Se spune că Mihai a construit, prin punctul *A*, exterior dreptei d, o paralelă la dreapta *d*.

Rezumăm cunoștințele

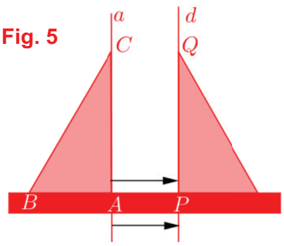
*Două drepte din același plan sunt **drepte paralele** dacă nu au puncte comune.*
Dacă dreapta a este paralelă cu dreapta b se notează $a \parallel b$. Dacă dreapta a nu este paralelă cu dreapta b se notează $a \nparallel b$.
*Oricare ar fi două drepte ale unui plan, **acestea sunt paralele** sau **se intersectează:***
• dacă dreptele sunt paralele, intersecția lor este mulțimea vidă;
*• dacă dreptele se intersectează, intersecția lor este un punct și dreptele se numesc **drepte concurente.***
Oricare ar fi două drepte a și b ale unui plan, $a \parallel b$ dacă și numai dacă $a \cap b = \varnothing$.

Aplicăm cunoştinţele

4. Folosind numai echerul, pe o coală albă de hârtie desenaţi o dreaptă *d* şi un punct *A* exterior dreptei (care nu aparţine dreptei). După modelul oferit de figurile 3.1, 3.2 şi 3.3, de mai sus, construiţi o dreaptă *a* paralelă cu dreapta *d* şi care să treacă prin punctul A.

5. *Construcţia dreptelor paralele cu rigla şi echerul prin translaţie.* Pe o coală albă de hârtie este desenată o dreaptă *a*. Figura 5 sugerează construcţia prin *translaţie* a unei drepte *d* paralelă cu dreapta *a* folosind rigla şi echerul.
a) Descrieţi cum se face construcţia dreptei *d*.
b) Desenaţi pe o coală albă de hârtie, sau pe tablă, o dreaptă. Folosind rigla şi echerul, construiţi o dreaptă paralelă cu aceasta prin translaţie.

Fig. 5



Ne verificăm

1. Pe figură, dreptele *a* şi *b* nu au nici un punct comun, dar ştim că trebuie să gândim dreapta ca fiind prelungită la nesfârşit. Prelungind dreptele *a* şi *b*, ele vor avea un punct comun, deci sunt drepte concurente, adică $a \cap b \neq \emptyset$.

Intuim că oricât am prelungi dreptele *c* şi *d,* ele nu se întâlnesc, adică intersecţia lor este vidă: $c \cap d = \emptyset$

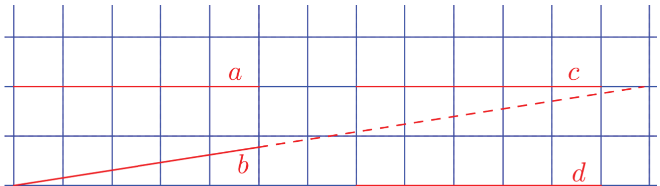


Fig. R1

2. Figura 2 reprezintă imaginea foto a unei cutii.
a) Cutia respectivă se identifică cu corpul geometric numit *paralelipiped.*
b) Cutia are 8 vârfuri şi 12 muchii.
c) Există muchii coplanare care determină o pereche de drepte cu intersecţia nevidă, de exemplu, muchiile *a* şi *d*, identificate conform figuri R2. c), d). Există muchii necoplanare care determină o pereche de drepte cu intersecţia vidă, de exemplu muchiile *d* şi *c*, identificate conform figuri R2 d), e). Există muchii coplanare care determină o pereche de drepte cu intersecţia vidă, de exemplu muchiile *a* şi *b*, identificate conform figuri R2. e).

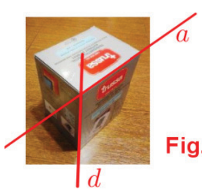


Fig. R2.c)

$a \cap d \neq \emptyset$

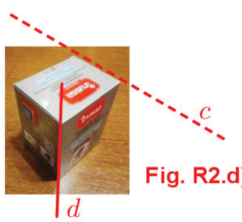


Fig. R2.d)

$d \cap c = \emptyset$

Fig. R2.e)

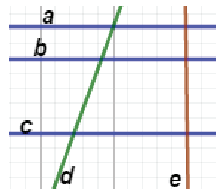
$a \cap b = \emptyset$

5. a) Plasăm echerul astfel încât muchia *AC* a acestuia să coincidă cu un segment al dreptei *a*, apoi aşezăm rigla lipită de muchia *AB*.
- Facem echerul să alunece de-a lungul riglei, care trebuie să rămână fixă până când vârful echerului ajunge din punctul *A* într-un punct *P*, ales arbitrar. Vârful *C*, al echerului, ajunge şi el într-un punct *Q*. Dreapta *PQ* este paralelă cu dreapta *a,* deci dreapta *d* căutată este dreapta *PQ*.

Activități de învățare

1. Observați configurația din *figura 1* și numiți:
a) perechi de drepte paralele;
b) perechi de drepte concurente.

Fig. 1.



2. Alegeți răspunsul corect și scrieți litera care identifică acest răspuns. Numai un răspuns este corect.

Printr-un punct exterior unei drepte, putem construi:
a) două drepte paralele cu dreapta dată; b) exact o dreaptă paralelă cu dreapta dată; c) oricât de multe drepte paralele cu dreapta dată.

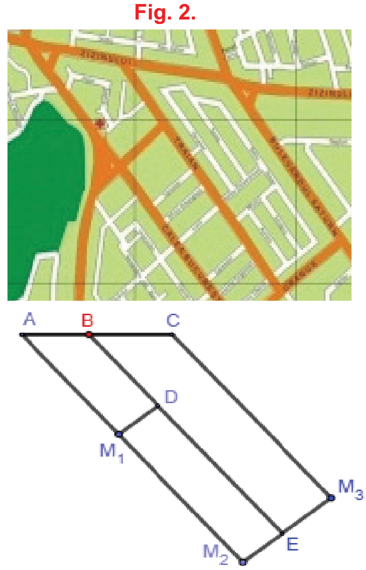
3. Se consideră o dreaptă a și un punct A, exterior dreptei. Desenați, folosind instrumentele geometrice, paralela, prin A, la dreapta a.

4. Se consideră punctele M și N situate de o parte și de alta a dreptei b. Construiți prin M, dreapta $d_1 \parallel b$, iar prin N, dreapta $d_2 \parallel b$. Stabiliți, cu justificare, poziția dreptelor d_1 și d_2.

5. Dreptele a, b, c, d sunt distincte, cu $a \parallel b, b \parallel c$ și $c \parallel d$. Completați spațiile libere cu unul din cuvintele *paralele, concurente,* pentru a obține propoziții adevărate.
a) Dreptele a și c sunt ....
b) Dreptele a și d sunt ....
c) Dreptele b și d nu sunt ....

6. Adrian merge cu plăcere la Brașov, orașul în care locuiește bunica lui. Uneori, o ajută la cumpărături și trebuie să cunoască amplasarea magazinelor preferate de aceasta. În *figura 2,* este reprezentată harta cartierului în care locuiește bunica lui Adrian, și schița matematică a hărții, casa bunicii fiind amplasată în punctul B. Magazinele preferate sunt notate cu M_1, M_2, M_3.

Fig. 2.

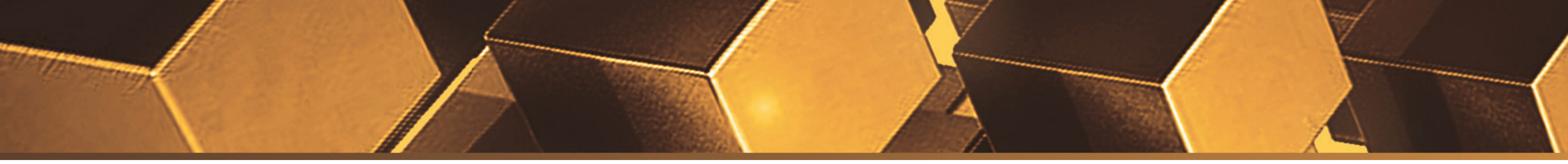


a) Observați harta și desenul realizat alături, apoi completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
1) Dreptele AM_1 și CM_3 sunt ....
2) Dreptele AC și BE sunt ....
3) Punctele B, D, E sunt ....
4) Dreptele DM_1 și M_2M_3 sunt ....

b) Folosind informațiile de la subpunctul anterior și eventuale măsurători, stabiliți care sunt traseele pe care ar trebui să le urmeze Adrian, pentru a merge la cumpărături, la fiecare din magazinele preferate, așa încât drumul să fie cel mai scurt posibil.

7. Punctul P aparține dreptei a, iar b este o dreaptă paralelă cu a.
a) Desenați o dreaptă c, care conține punctul P și nu se confundă cu a
b) Demonstrați că $c \nparallel b$.

8. Punctele M, N, P sunt distincte, iar d_1, d_2 sunt două drepte astfel încât $MN \parallel d_1$, $NP \parallel d_2$. Demonstrați că:
a) Dacă $d_1 \parallel d_2$, atunci punctele M, N și P sunt coliniare.
b) Dacă M, N, P sunt coliniare, atunci dreptele d_1 și d_2 sunt paralele sau confundate.



5.7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă

Observăm și demonstrăm

1. Despre trei drepte *a*, *b* și *c* se spune că sunt *drepte concurente* dacă intersecția lor este un punct. Dacă dreapta *c* intersectează dreptele *a* și *b* în puncte diferite, despre dreapta *c* se spune că este *secantă dreptelor a* și *b*.
Observând figurile 1 și 2:
a) numiți figura care ilustrează trei drepte concurente și folosiți notațiile învățate la mulțimi pentru a descrie concurența lor.
b) numiți figura în care dreapta *c* este secantă dreptelor *a* și *b*.

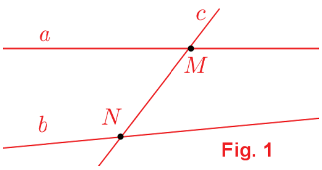


Fig. 1

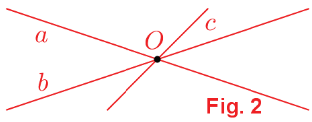


Fig. 2

2. Secanta c formează cu două drepte distincte *a* și *b* opt unghiuri (figura 3). Observați că:
- Unghiurile 3 și 5 sunt poziționate *de o parte și de alta* a secantei *c* și *între* dreptele *a* și *b*. Din acest motiv, despre perechea de unghiuri 3 și 5 se spune că sunt *unghiuri alterne interne*.
- Unghiurile 1 și 7 sunt poziționate *de o parte și de alta* a secantei *c*, dar nu mai sunt *interne* față de dreptele *a* și *b*, ci sunt *externe*. Din acest motiv, despre perechea de unghiuri 1 și 7 se spune că sunt *unghiuri alterne externe*.
- Poziția unghiului 1 în raport cu dreapta *a* și secanta *c* este asemănătoare cu poziția unghiului 5 în raport cu dreapta *b* și secanta *c*. Din acest motiv, despre perechea de unghiuri 1 și 5 se spune că sunt *unghiuri corespondente*.

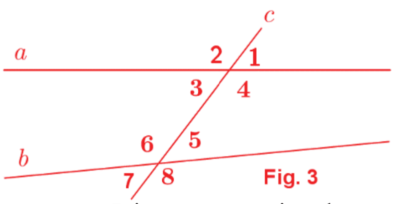


Fig. 3

Folosind figura 3, numiți:
a) toate perechile de unghiuri alterne interne; b) toate perechile de unghiuri alterne externe;
c) toate perechile de unghiuri corespondente; d) o pereche de unghiuri opuse la vârf;
e) o pereche de unghiuri adiacente suplementare.

Reținem

O secantă formează cu două drepte distincte opt unghiuri, care împerecheate într-un anumit fel, poartă diferite denumiri după poziția pe care o au față de drepte și de secantă:
- *unghiuri alterne interne*;
- *unghiuri alterne externe*;

unghiuri corespondente

Ne verificăm

1. a) Figura 2 ilustrează trei drepte concurente: $a \cap b \cap c = \{O\}$.
b) Figura 1 ilustrează două drepte *a*, *b* și secanta *c*: $a \cap c = \{M\}$ și $b \cap c = \{N\}$.

2. a) perechile de unghiuri alterne interne: 3 și 5; 4 și 6;
b) perechile de unghiuri alterne externe:1 și 7; 2 și 8;
c) perechile de unghiuri corespondente: 1 și 5; 2 și 6; 3 și 7; 4 și 8;
d) o pereche de unghiuri adiacente suplementare: 1 și 2;
e) o pereche de unghiuri opuse la vârf: 1și 3.

Activități de învățare

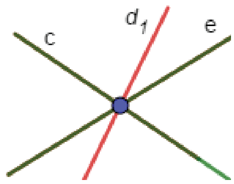


Fig. 1.

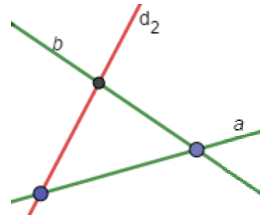
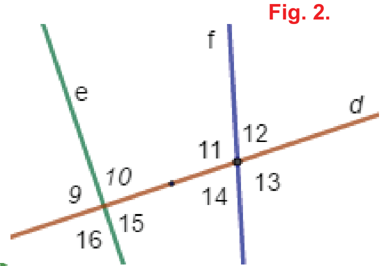


Fig. 2.

1. Observați cu atenție *figura* 1, apoi completați spațiile libere, folosind cuvintele *este* respectiv *nu este,* astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
Discutați cu colegul/colega de bancă argumentele răspunsului dat.

a) Dreapta d_1 ...... secantă dreptelor c și e .

b) Dreapta d_2 ..... secantă dreptelor a și b .



2. Observați cu atenție *figura* 2, apoi completați spațiile libere, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
Discutați cu colegul/colega de bancă argumentele răspunsului dat.

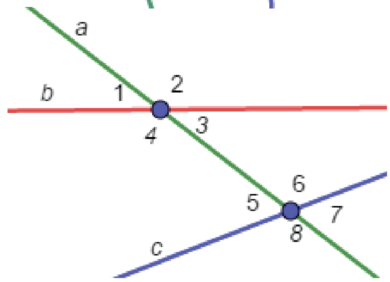
a) Unghiurile 2 și ...., respectiv 4 și .... sunt corespondente.

b) Unghiurile 8 și ...., respectiv 2 și .... sunt externe, de aceeași parte a secantei.

c) Unghiurile 9 și 13 sunt ....

d) Unghiurile 16 și 14 sunt ....

e) Unghiurile 10 și 11 sunt ....



3. Analizând *figura* 3 numiți câte o pereche de:

a) unghiuri corespondente, formate de secanta d cu dreptele a și b ;

b) unghiuri alterne interne, formate de secanta d cu dreptele b și c ;

c) unghiuri alterne externe, formate de secanta d cu dreptele a și c .

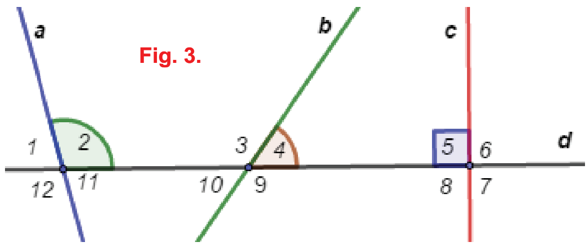


Fig. 3.

4. Realizați pe caiete, folosind instrumentele geometrice, configurația din *figura 3*.

a) Determinați măsurile unghiurilor 11 și 4 , știind că $\sphericalangle 1 = 70^\circ$ și $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 9 = 200^\circ$.

b) Determinați măsurile unghiurilor 5 și 9 , știind că $\sphericalangle 6 = 90^\circ$ și $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 4 = 150^\circ$.

5. Dreptele a și b formează cu secanta d unghiurile din *figura* 4, astfel încât $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$. Demonstrați că:

a) $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$; $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 6 \equiv \sphericalangle 2$;

b) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$; $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 + \sphericalangle 8 = 360^\circ$;

c) Știind că $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6 = 48^\circ$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle 1, \sphericalangle 2, \sphericalangle 3, \sphericalangle 5, \sphericalangle 7, \sphericalangle 8$.

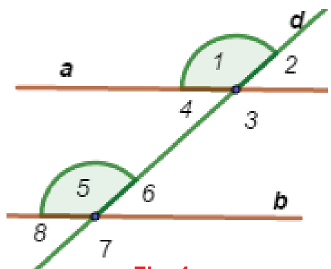


Fig. 4.

6. În *figura* 5, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6 = 130^\circ$.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle 1, \sphericalangle 3, \sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5$ și $\sphericalangle 7, \sphericalangle 8$;

b) Dacă x° este măsura unuia dintre unghiurile formate în jurul punctului A , iar y° este măsura unuia dintre unghiurile formate în jurul punctului B și că $x + y = 180^\circ$, scrieți toate perechile (x, y) posibile.

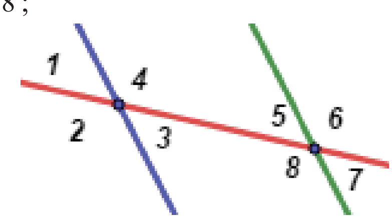


Fig. 5.

7. Laturile unghiului XOY sunt secante dreptelor d_1 și d_2 (*figura 6*).

a) Știind că $\sphericalangle OCD \equiv \sphericalangle OGH$, identificați:

a_1) trei unghiuri congruente cu $\sphericalangle OCB$;

a_2) două unghiuri suplementare cu $\sphericalangle OGF$.

b) Determinați $\sphericalangle OBA + \sphericalangle EFX$, știind că $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG = 70^\circ$.

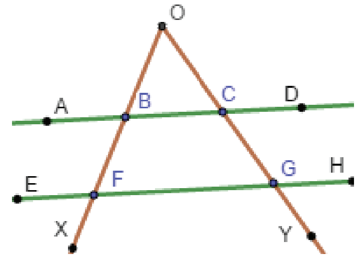


Fig. 6.

5.8. Axioma paralelelor

Aplicăm cunoștințele

1. a) Completați enunțul de mai jos cu *aparține* sau *nu aparține* astfel încât, enunțul rezultat, să fie corect din punct de vedere matematic:
Dacă un punct A este exterior unei drepte d, atunci punctul A .... *dreptei d*;
b) Pe o coală albă de hârtie, desenați o dreaptă *d* și *A* un punct exterior dreptei *d*. Folosind un creion și un echer, prin translația echerului, construiți o paralelă la dreapta *d* care să treacă prin punctul *A*. Mai puteți construi încă una?

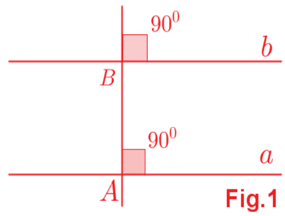


Fig.1

Reținem

c) În figura 1 unghiurile A și B sunt unghiuri drepte. Atunci, conform construcției cu echerul, dar și *demonstrației* făcute într-o lecție anterioară, dreptele a și b sunt paralele. În limbaj matematic, se spune că afirmația *„din $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 90^\circ$ rezultă $a \parallel b$”* este adevărată; ea poate fi reformulată și astfel: *„dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 90^\circ$, atunci rezultă $a \parallel b$”*.

Întrebarea este următoarea: este adevărat că dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $a \parallel b$ rezultă că $\sphericalangle B = 90^\circ$?

Istorie

Răspunsul la această întrebare este foarte interesant. Aproximativ două mii de ani i-au trebuit omenirii să răspundă la o întrebare asemănătoare, ale cărei rădăcini se pierd în negura istoriei, în jurul anilor 300 î.Hr. Răspunsul vine abia în secolul al XVIII-lea. Iată despre ce este vorba: În matematică o afirmație este *adevărată* sau *falsă*. Pentru a demonstra sau a dovedi că o afirmație este adevărată sau falsă, se aduc argumente (dovezi) logice. De exemplu, pentru a răspunde la întrebare, presupunem că $\sphericalangle A = 90^\circ$, $a \parallel b$ și că $\sphericalangle B \neq 90^\circ$. Rezultă figura 2, unde $\sphericalangle B \neq 90^\circ$. Folosind echerul construim dreapta c care să facă cu dreapta AB un unghi drept (figura 3). Conform construcției cu echerul dreapta c este paralelă cu dreapta a. Atunci, prin punctul B am avea două paralele la dreapta a: una este dreapta b (așa am presupus-o) și alta este dreapta c. Prin urmare, presupunerea făcută ne permite să demonstrăm, cu argumente logice, că printr-un punct se pot construi două drepte paralele cu o dreaptă dată. Dar acest fapt este în contradicție cu intuiția noastră, prin urmare este adevărat că dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $a \parallel b$ rezultă că $\sphericalangle B = 90^\circ$.

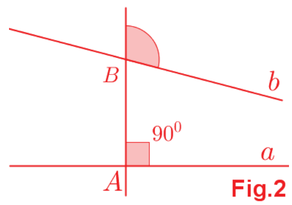


Fig.2

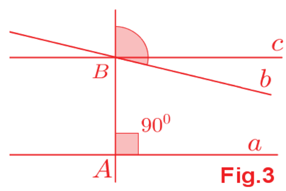


Fig.3

Observați că demonstrația se bazează pe constatarea intuitivă, numită *axioma paralelelor,* potrivit căreia *„printr-un punct exterior unei drepte date se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă”*. Din acest motiv, mari matematicieni ai lumii, de-a lungul a două mii de ani, s-au străduit să demonstreze această afirmație.

Vocabular

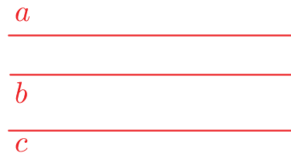
constatare empirică = bazată pe experiență, fără suport teoretic

axiomă = adevăr fundamental care se referă la noțiuni primare care nu sunt definite.

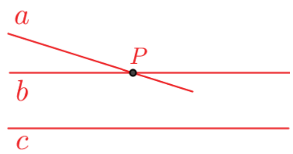
Răspunsul la întrebarea „câte paralele se pot duce printr-un punct exterior unei drepte la dreapta dată” a fost clarificat, în jurul anului 1800, de trei matematicieni celebri, care au demonstrat independent, că se poate construi o geometrie, care nu respectă *axioma paralelelor*. De exemplu, se acceptă că: pentru orice dreaptă dată și orice punct exterior dreptei, există cel puțin două drepte care trec prin acel punct și sunt paralele cu dreapta dată.

În *geometria euclidiană*, se acceptă axioma paralelelor, ca adevăr fundamental, admis fără demonstrație, foarte importantă deoarece stă la baza demonstrării altor adevăruri. Vă veți convinge că așa este după ce vom rezolva împreună următoarea problemă:

2. În figura alăturată sunt desenate trei drepte *a*, *b* și *c* despre care se știe că $a \parallel b$ și $b \parallel c$. Demonstrăm că $a \parallel c$.



Demonstrație. Admitem că dreptele *a* și *c* nu sunt paralele. Nefiind paralele, dreptele *a* și *c* se vor intersecta într-un punct P. Prin urmare, suntem în situația reprezentată în figură.



Ce rezultă? Rezultă că prin punctul *P* trec două paralele la dreapta c: conform datelor din enunțul problemei, una este dreapta *a* și alta este dreapta *c*. Dar acest rezultat, obținut prin deducție logică, este în contradicție cu axioma paralelelor pe care am admis-o ca adevăr fundamental. Prin urmare, nu putem accepta că $a \nparallel c$. Rezultă $a \parallel c$.

Așadar, bazându-ne pe axioma paralelelor am demonstrat următorul adevăr: *Două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.*

În matematică, o afirmație despre care se poate demonstra că este adevărată, se numește *teoremă,* se scrie sub forma „$p \Rightarrow q$” și se citește „dacă *p* rezultă *q*” sau „din *p* rezultă *q*” sau „*p* implică *q*”. Partea de afirmație notată cu *p* se numește *ipoteza teoremei*. Partea de afirmație notată cu *q* se numește *concluzia teoremei*. Constatarea adevărului exprimat de teoremă se face prin *demonstrație*. Aceasta presupune un șir de raționamente (judecăți logice) prin care, pe baza datelor din ipoteză și a altor afirmații, demonstrate anterior sau acceptate ca fiind adevărate, se deduce concluzia. Simbolul„$\Rightarrow$”, care se citește *rezultă* sau *implică* pune în evidență deductibilitatea logică a concluziei pe baza ipotezei și prin raționamente sau judecăți logice.

> **Vocabular**
>
> *teoremă* = afirmație demonstrabilă; afirmație al cărei adevăr se stabilește prin demonstrație
>
> *demonstrație* = șir de judecăți logice (raționamente) prin care se dovedește adevărul

Exemplu. Afirmația *„două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele*” fiind demonstrabilă (am demonstrat-o mai sus) este o *teoremă*. Ea poate fi reformulată astfel:

Dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b* și dreapta *b* este paralelă cu dreapta *c*, *atunci* dreptele *a* și *b* sunt paralele.

Ipoteza teoremei este: „dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b* și dreapta *b* este paralelă cu dreapta *c*”.

Concluzia teoremei este: „dreptele *a* și *c* sunt paralele”.

Folosind simbolurile și convențiile matematice

scriem:	citim:
$a \parallel b$ și $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$	dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$ rezultă $a \parallel c$; sau: din $a \parallel b$ și $b \parallel c$ rezultă $a \parallel c$; sau: $a \parallel b$ și $b \parallel c$ implică $a \parallel c$.

3. În figura 4 sunt desenate două drepte *a* și *b* paralele și trei secante d_1, d_2, d_3.

a) Identificați perechile de unghiuri alterne interne;

b) Măsurați cele șase unghiuri. Observând, cu atenție, care dintre unghiurile din figură sunt congruente precizați o concluzie logică ce se poate deduce.

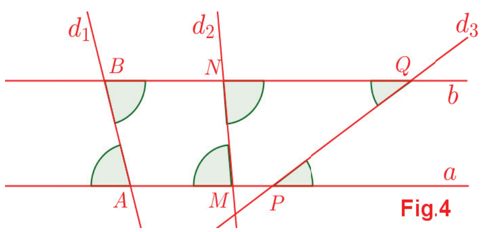
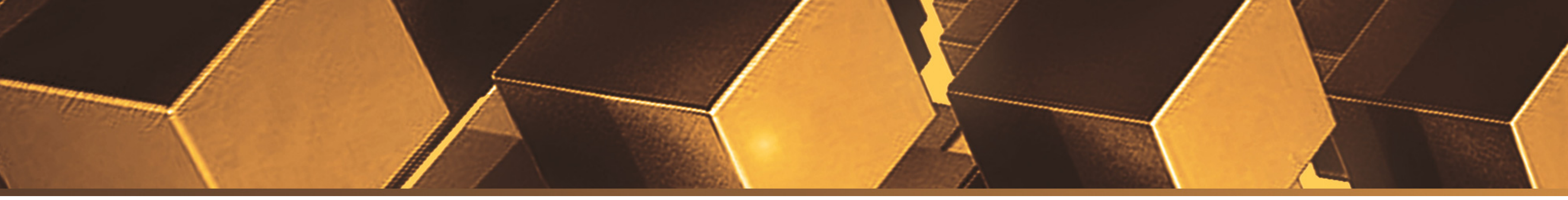


Fig.4



Reținem

1) *Orice două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.*
2) Dacă *două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente,* atunci *dreptele sunt paralele.*

Afirmația 1) este adevărată. Constatarea adevărului este fundamentată pentru rezolvarea problemei 2. Această rezolvare este una empirică, bazată pe experiență, pe construcții cu instrumente geometrice concrete și pe măsurare. Constatarea adevărului se poate face și prin *demonstrație*, adică prin argumente și raționamente logice. Aceleași mențiuni sunt valabile și pentru afirmația 2).
Folosind desenul și notațiile matematice, reformulăm cele două afirmații astfel:

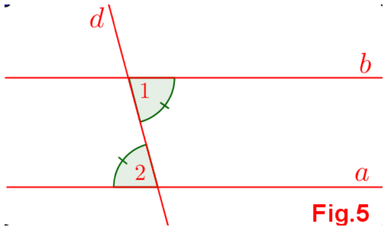


Fig.5

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2 \Rightarrow a \parallel b$

$a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$

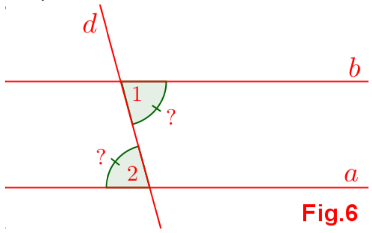


Fig.6

Prin urmare:
- în figura 5 unghiurile 1 și 2 fiind congruente, conform afirmației 1) va rezulta că dreptele *a* și *b* sunt paralele (dacă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$, rezultă $a \parallel b$);
- în figura 6 dreptele *a* și *b* fiind paralele, conform afirmației 2) va rezulta că unghiurile 1 și 2 sunt congruente (dacă $a \parallel b$, rezultă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$).

Am spus că în matematică o afirmație demonstrabilă ca fiind adevărată se numește *teoremă* și se scrie sub forma „$p \Rightarrow q$” unde *p* este *ipoteza teoremei*, iar *q* este *concluzia teoremei*. Dacă „$q \Rightarrow p$” este teoremă, atunci despre aceasta se spune că este *reciproca* teoremei „$p \Rightarrow q$”, iar cele două teoreme pot fi formulate împreună astfel: „$p \Leftrightarrow q$”.
Simbolul„$\Leftrightarrow$”, care se citește „*echivalent*”sau„*dacă și numai dacă*”, pune în evidență deductibilitatea logică a concluziei din ipoteză și a ipotezei din concluzie pe bază de raționamente sau judecăți logice.
Exemplu: Afirmațiile 1 și 2 de mai sus se pot formula împreună și sunt cunoscute sub denumirea de *teorema unghiurilor alterne interne:*
Fiind date două drepte a și b și o secantă d (figura7), atunci dreptele a și b sunt paralele, dacă și numai dacă, unghiurile 1 și 2 sunt congruente, adică: $a \parallel b \Leftrightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$.

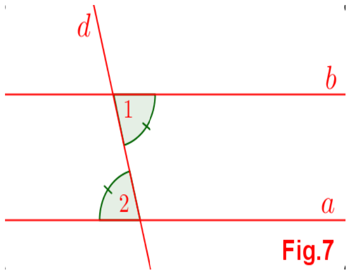


Fig.7

Rezumăm cunoștințele

Axioma paralelelor: *Printr-un punct exterior unei drepte date se poate duce o singură paralelă la aceasta.*
Teorema unghiurilor alterne*: Orice două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.*
Reciproc*: Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.*
Teoremă*: Două drepte paralele cu a treia dreaptă sunt paralele.*

Aplicăm cunoștințele

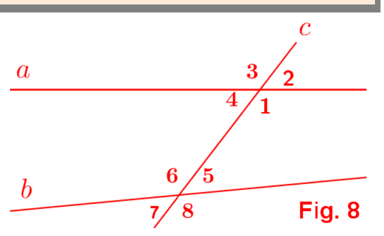


Fig. 8

4. În figura 8, se consideră că dreptele *a* și *b* sunt paralele și măsura unghiului 4 este de 52°.
a) Calculați măsura unghiului 5;

b) Calculați măsura unghiului 7.

5. În figura 8, se consideră că dreptele a și b sunt paralele și măsura unghiului 3 este de 128°.

a) Aflați celelalte unghiuri din figură care au măsura de 128°;

b) Calculați măsura unghiului 2;

c) Aflați care sunt celelalte unghiuri din figură care sunt congruente cu unghiul 2.

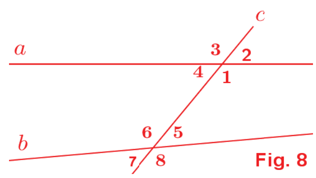


Fig. 8

6. În figura 9, se consideră că $\sphericalangle QBC = 137^\circ$ și $\sphericalangle MNB = 43^\circ$

a) Unghiurile ABQ și QBC sunt neadiacente sau sunt adiacente suplementare?

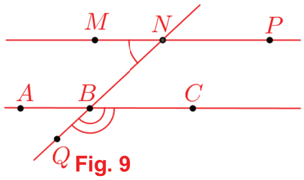


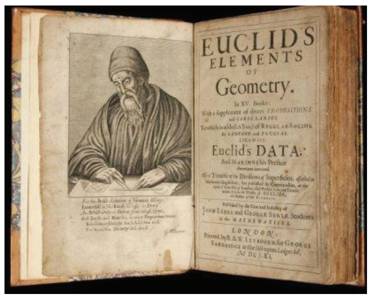
Fig. 9

b) Unghiurile ABQ și QNP sunt alterne interne sau alterne externe?

c) Calculați măsura unghiului CBN;

d) Se poate deduce că dreptele AB și MN sunt paralele? Enunțați partea din teorema unghiurilor alterne interne care permite această deducție.

Istorie Axioma paralelelor a fost prezentată pentru prima dată sub o altă formă, numită *postulatul lui Euclid*, în prima carte de geometrie cunoscută în istorie. Cartea este intitulată **Elemente,** iar autorul este matematicianul grec **Euclid**, care a trăit aproximativ între anii 325 și 265 î.Hr. și a predat în Egipt, în timpul domniei lui *Ptolemeu I*. Într-o anecdotă scrisă la 800 de ani de la moartea sa, se povestește că Ptolemeu I l-ar fi rugat pe Euclid să-i arate o cale mai ușoară ca să înțeleagă geometria, iar Euclid ar fi răspuns: „În geometrie nu există drumuri speciale pentru regi”.



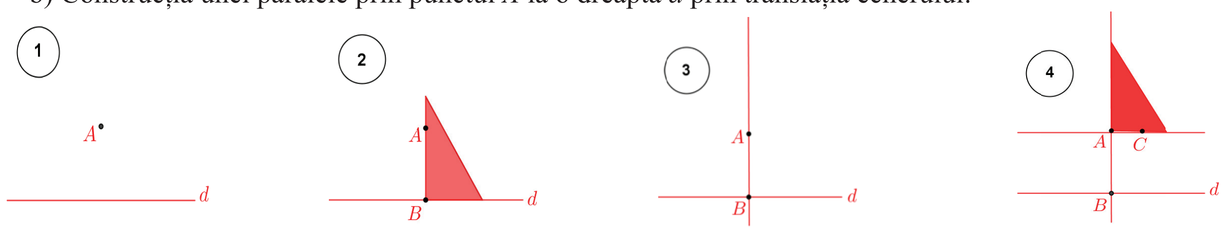
https://www.biographyonline.net

Portofoliu Caută pe pagina de internet http://stiintasitehnica.com/geometria-universului/informații informații despre geometrii neeuclidiene (geometria lui Reimann și geometria Bolyai-Lobacevski) și realizează un eseu despre importanța geometriei euclidiene și a geometriilor neeuclidiene.

Ne verificăm

1. a) *Dacă un punct A este exterior unei drepte d, atunci punctul A* ***nu aparține*** *dreptei d;*

b) Construcția unei paralele prin punctul A la o dreaptă d prin translația echerului:



Dreapta AC este paralelă cu d.

Conform modului de construcție prin translația echerului, rezultă că nu se poate desena decât o singură dreaptă care să treacă prin A și să fie paralelă cu dreapta d.

3. a) Perechile de unghiuri alterne interne sunt: A și B; M și N; P și Q. b) prin măsurare cu raportorul găsim: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 75^\circ$; $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 85^\circ$ și $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 35^\circ$. c) Concluzia logică care se poate deduce este următoarea: *două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.*

4. a) $a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$ (teorema unghiurilor alterne interne). Deci b) $\sphericalangle 5 \equiv \sphericalangle 7$ (ca unghiuri opuse la vârf). Rezultă $\sphericalangle 7 = 52^\circ$.

5. a) $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$ (unghiuri adiacente suplementare), deci $\sphericalangle 2 = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$.

b) $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 1$ (unghiuri opuse la vârf); Rezultă $\sphericalangle 1 = 128^\circ$. $a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 6$ (teorema unghiurilor alterne interne), deci $\sphericalangle 6 = 128^\circ$. $\sphericalangle 6 \equiv \sphericalangle 8$ (unghiuri opuse la vârf); Rezultă $\sphericalangle 8 = 128^\circ$. c) $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 5 \equiv \sphericalangle 7$ (unghiuri opuse la vârf). $a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$ (teorema unghiurilor alterne interne). Conform punctului a), $\sphericalangle 2 = 52^\circ$ și rezultă $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 52^\circ$.

6. a) Unghiurile ABQ și QBC sunt adiacente suplementare. b) Unghiurile ABQ și QNP nu sunt alterne interne și nici alterne externe. c) $\sphericalangle QBC + \sphericalangle CBN = 180^\circ$ (ca unghiuri adiacente suplementare). Cum $\sphericalangle QBC = 137^\circ$, rezultă $\sphericalangle CBN = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$. d) $\sphericalangle MNB = 43^\circ$ și $\sphericalangle CBN = 43^\circ \Rightarrow AB \parallel MN$ (reciproca teoremei unghiurilor alterne interne).

Activități de învățare

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Două drepte distincte, situate în același plan, se numesc drepte ...

b) Două drepte a și b, coplanare, cu $a \cap b = \varnothing$, se numesc drepte ...

c) Dacă dreptele a, b și c sunt distincte și $a \parallel b, b \parallel c$, atunci dreptele a și c sunt ....

d) Fie dreapta d și punctul $M \notin d$. Dacă $MN \parallel d$, $MP \parallel d, N \neq P$, atunci punctele M, N, P sunt ... .

2. Dreptele paralele a și b formează cu secanta d opt unghiuri, numerotate ca în *figura 1*.

a) Dacă $\sphericalangle 1 = 54^\circ$, calculați măsurile celorlalte unghiuri;

b) Dacă $\sphericalangle 6 = 120^\circ$, calculați măsurile celorlalte unghiuri;

c) Dacă $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = 112^\circ$, calculați măsura unghiului 7;

d) Dacă $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 244^\circ$, calculați măsurile unghiurilor 4 și 6.

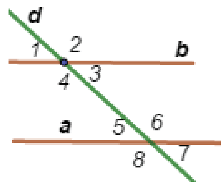


Fig. 1.

3. Desenați unghiul ABC cu măsura de 63°, prin punctul A, construiți dreapta d, paralelă cu dreapta BC. Calculați măsurile celor patru unghiuri formate de dreapta d cu dreapta AB.

4. Se consideră dreptele a și b, $a \parallel b$. Pentru fiecare din configurațiile următoare, determinați valorile numerelor x, y și z, corespunzătoare, apoi aflați măsurile unghiurilor formate de secanta d cu dreptele a și b. Realizați fiecare figură pe caiet și-i alăturați rezolvarea.

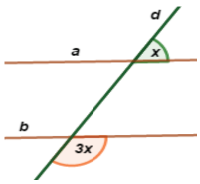


Fig. 2.a.

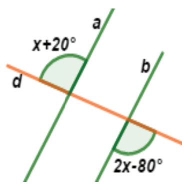


Fig. 2.b.

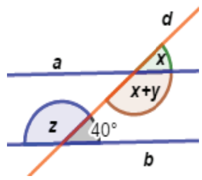


Fig. 2.c.

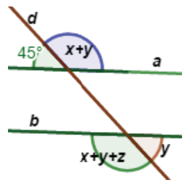


Fig. 2.d.

5. Dreptele paralele d_1 și d_2 formează cu o secantă d o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei, având raportul măsurilor egal cu $\frac{7}{2}$. Calculați măsurile tuturor unghiurilor formate.

6. În *figura* 3, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ iar $\sphericalangle BAD = 128^\circ$. Aflați măsurile unghiurile formate în jurul punctului C.

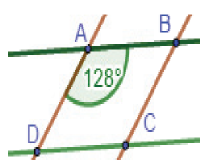


Fig.3.

7. Se consideră dreptele paralele a și b și secantele oarecare c respectiv d. Cele patru drepte se intersectează, două câte două, ca în *figura* 4.
Demonstrați că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 360^\circ$.

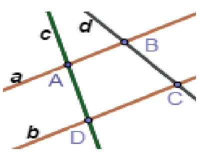


Fig.4.

8. Segmentele AB și CD se intersectează în punctul E. În interiorul unghiului BEC, care are măsura $\sphericalangle BEC = 70^\circ$, se consideră punctul F astfel încât $\sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle BEF$. Dreapta EF intersectează paralela prin D la dreapta AB în punctul G.

a) Realizați, folosind instrumentele geometrice, un desen care să corespundă datelor problemei;
b) Calculați măsurile unghiurilor BEF, DGE, EDG, AEG.

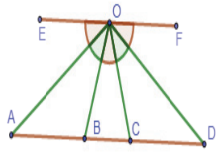


Fig.5.

9. În *figura* 5, dreptele AB și EF sunt paralele, O este mijlocul segmentului EF și au loc congruențele:
$\sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOF$.
Calculați măsurile unghiurilor OAD și OCA.

10. Printre cele opt unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă, se află două unghiuri complementare. Determinați măsurile celor opt unghiuri.

11. Se consideră dreptele paralele a, b și un punct A al dreptei a. Prin A, se construiesc secantele oarecare, c și d, care intersectează dreapta b în punctele C respectiv D.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că $\sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC = 180^\circ$;

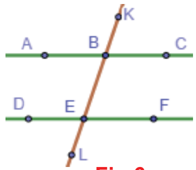
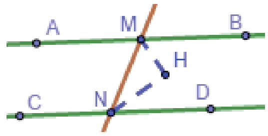


Fig.6.

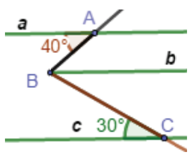
12. În *figura* 6, $AB \parallel DE$ și $2 \cdot \sphericalangle ABK = 3 \cdot \sphericalangle BEF$.
Calculați măsurile unghiurilor DEL și CBK.

13. Se consideră dreptele paralele a și b, punctele A și C situate pe dreapta a și punctele B și D situate pe dreapta b. Semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC și $\sphericalangle ADB = 34^\circ 30'$. Calculați măsurile unghiurilor formate de dreptele a și b cu secanta AB

14. Dreapta MN este o secantă oarecare a dreptelor paralele AB și CD, $M \in AB$ și $N \in CD$ (*figura* 7). Bisectoarele unghiurilor BMN și DNM se intersectează în punctul H. Calculați $\sphericalangle HMN + \sphericalangle HNM$.

Fig.7.


15. În desenul din *figura 8,* sunt date dreptele a, b și c astfel încât $a \parallel b$ și $a \parallel c$. Punctul A aparține dreptei a, B aparține dreptei B, iar C se află pe dreapta c, măsurile unghiurilor formate, fiind înscrise pe figură. Determinați măsura unghiului ABC.

Fig.8


5.9. Criterii de paralelism

Ne amintim

1. a) Enunțați teorema unghiurilor alterne interne;
b) În figura 1, unghiurile OCA și ODB sunt congruente. Sunt paralele dreptele AC și BD? Justificați răspunsul!
Putem afirma despre teorema unghiurilor alterne interne că este un instrument prin care, demonstrăm paralelismul a două drepte. De exemplu, faptul că dreptele AC și BD din figura 1 sunt paralele, se justifică folosind această teoremă. De aceea, spunem că această teoremă este un *criteriu de paralelism*.

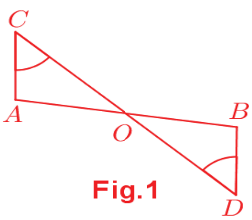


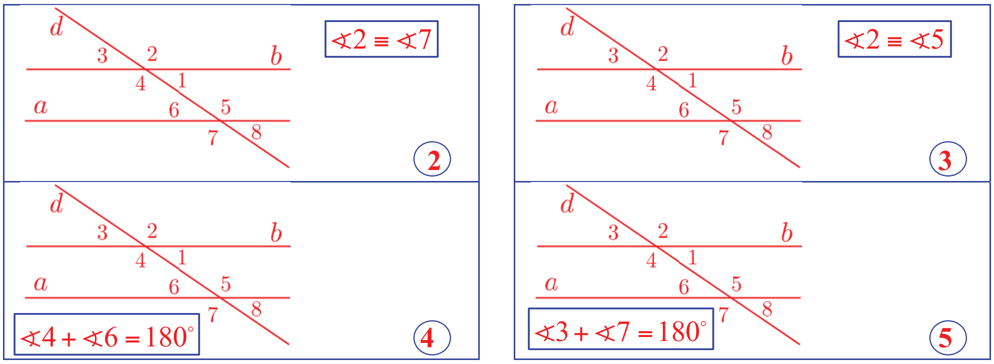
Fig.1

2. Celulele tabloului următor sunt numerotate de la 2 la 5. În fiecare celulă sunt desenate două drepte a și b și o secantă d care formează cu dreptele opt unghiuri. O pereche de unghiuri au proprietatea scrisă în celulă.
1) Pentru fiecare celulă;
a) completați în caietul vostru denumirea unghiurilor;

Vocabular
criteriu de paralelism = teoremă folosită pentru a demonstra că două drepte sunt paralele

b) justificați că $a \parallel b$.

2) Rezolvarea corectă a cerințelor a) și b) ale punctului precedent conduce la formularea unui criteriu de paralelism. Îl puteți enunța?



Exemplu: Celula 2: 1. a) Unghiurile $\sphericalangle 2$ *și* $\sphericalangle 7$ sunt unghiuri alterne externe.

b) $\left.\begin{array}{ll} \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 7 & \text{din enunț} \\ \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4 & \text{unghiuri opuse la vârf} \\ \sphericalangle 7 \equiv \sphericalangle 5 & \text{unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$

$\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5 \Rightarrow a \parallel b$ (teorema unghiurilor alterne interne).

Reținem

Criterii de paralelism:

1) *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.*

2) *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.*

3) *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.*

4) *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*

5) *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*

Observăm și demonstrăm

Primul criteriul de paralelism enunțat este teorema unghiurilor alterne interne.

Rezolvăm

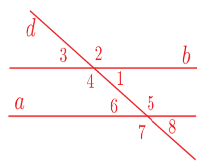


Fig. 3

3. 1) Enunțați reciproca teoremei unghiurilor alterne interne.

2) Dintre unghiurile formate de două drepte paralele a și b cu o secantă d (figura 3) se alege o singură pereche. Demonstrați că:

a) dacă unghiurile alese sunt unghiuri alterne externe sau sunt unghiuri corespondente, atunci ele sunt congruente;

b) dacă unghiurile alese sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei sau, externe de aceeași parte a secantei, atunci unghiurile sunt suplementare.

Aplicăm cunoștințele

Folosind ca model reciproca teoremei unghiurilor alterne interne, formulați afirmațiile demonstrate la punctul 2) sub forma unor teoreme.

Exemplu: b) Alegem perechea de unghiuri 1 și 5 (figura 3) care sunt interne de aceeași parte a secantei. Atunci:

$\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$ (conform reciprocei teoremei unghiurilor alterne interne) $\Big\{ \Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180^\circ$ (unghiurile 1 și 4 formează un unghi alungit)

Așadar, am demonstrat următoarea afirmație: „*Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare*”.

Prin urmare această afirmație este o teoremă, numită *teoremă de paralelism*. Fiecărui criteriu de paralelism îi corespunde o teoremă de paralelism.

Rezumăm cunoștințele

Teoreme	**Criterii de paralelism**
1. Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne interne congruente	*1.Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.*
2. Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne externe congruente.	*2. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.*
3.Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri corespondente congruente.	*3. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.*
4.Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.	*4. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*
5.Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare.	*5. Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*

Pentru a ne referi ușor la teoremă sau la criteriul de paralelism corespunzător, folosim următoarele denumiri, în ordinea numerotărilor de mai sus: **teorema unghiurilor alterne interne, teorema unghiurilor alterne externe, teorema unghiurilor corespondente, teorema unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, teorema unghiurilor externe de acceași parte a secantei.**

Aplicăm cunoștințele

4. În figura 4 dreptele AB și CD sunt paralele, iar unghiurile ABC și CDE sunt suplementare.

a) Sunt congruente unghiurile ABC și BCD? Justificați răspunsul!

b) Demonstrați că dreptele BC și DE sunt paralele.

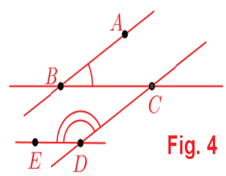


Fig. 4

Ne verificăm

1. a) Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne interne congruente;

b) Deoarece $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ și CD este secantă dreptelor AC și BD, conform teoremei unghiurilor alterne interne, rezultă că ele sunt paralele.

Observație. Această justificare se poate scrie și astfel: $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ și CD secantă $\Rightarrow AC \| BD$ (teorema unghiurilor alterne interne).

2. Celula 3: 1. a) Unghiurile 2 și 5 sunt unghiuri corespondente;

b) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 5 \text{ din enunț} \\ \sphericalangle 7 \equiv \sphericalangle 5 \text{ unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 7.$

Deci, unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 7$ sunt unghiuri alterne externe congruente și rezultă $a \parallel b$.

Celula 4: 1. a) Unghiurile 4 și 6 sunt unghiuri interne de aceeași parte secantei;

b) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 6 = 180^\circ$ din enunț

$\sphericalangle 4 + \sphericalangle 1 = 180^\circ$ împreună formează un unghi alungit $\Rightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 6$

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 6 \Rightarrow a \parallel b$ (teorema unghiurilor alterne interne)

Criteriu de paralelism: *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*

Celula 5: 1. a) Unghiurile 3 și 7 sunt unghiuri externe de aceeași parte secantei;

b) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 3 + \sphericalangle 7 = 180^\circ \text{ din enunț} \\ \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 1 \text{ unghiuri opuse la vârf} \\ \sphericalangle 7 \equiv \sphericalangle 5 \text{ unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$

Deci unghiurile $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 5$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare. Rezultă $a \parallel b$, conform criteriului de paralelism demonstrat anterior.

Criteriu de paralelism: *Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.*

3. 1) Reciproca teoremei unghiurilor alterne interne: *Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne interne congruente.*

a) Fie unghiurile 2 și 7 alterne externe. Dreptele *a* și *b* fiind paralele determină cu secanta *d* unghiurile alterne interne congruente 4 și 5. Atunci:

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5 \\ \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 2 \text{ unghiuri opuse la vârf} \\ \sphericalangle 5 \equiv \sphericalangle 7 \text{ unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 7$

Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne externe congruente.

Fie unghiurile 3 și 6 corespondente. Dreptele *a* și *b* fiind paralele determină cu secanta *d* unghiurile 1 și 6 alterne interne congruente. Atunci:

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 6 \\ \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3 \text{ unghiuri opuse la vârf} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 6$

Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri corespondente congruente.

b) Fie unghiurile 4 și 6 interne de aceeași parte a secantei. Dreptele *a* și *b* fiind paralele determină cu secanta *d* unghiurile 1 și 6 alterne interne congruente. Atunci:

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 6 \\ \sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180^\circ \text{ împreună formează un unghi alungit} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 6 + \sphericalangle 4 = 180^\circ.$

Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare

Fie unghiurile 3 și 7 externe de aceeași parte a secantei. Dreptele *a* și *b* fiind paralele determină cu secanta *d* unghiurile 4 și 5 alterne interne congruente. Atunci:

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5 \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180^\circ \text{ împreună formează un unghi alungit} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$

Dar $\sphericalangle 5 \equiv \sphericalangle 7$ unghiuri opuse la vârf. Așadar $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$.

Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare

4. a) Unghiurile *ABC* și *BCD* sunt congruente (teorema unghiurilor alterne interne);

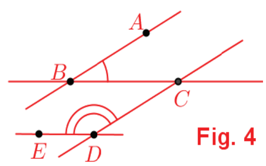


Fig. 4

b) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD \text{, din a)} \\ \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 180^\circ \text{ din} \\ \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDE = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDE = 180^\circ$ enunț

CD este secanta dreptelor *BC* și *DE*, iar $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDE = 180^\circ \Rightarrow BC$ și *DE* sunt paralele (teorema unghiurilor interne de aceeași parte a secantei).

Activități de învățare

1. Unghiul ABC are măsura de 100°. Punctul D este situat în interiorul unghiului ABC, $\sphericalangle BAD = 80°$ iar punctul E este situat în exteriorul unghiului ABC astfel încât $AE \parallel BC$. Demonstrați că punctele E, A și D sunt coliniare.

2. Pentru dreptele paralele a și b, unghiurile formate cu secanta c, sunt numerotate ca în *figura 1*. Completați spațiile libere din tabelul următor cu unul din cuvintele *corect* respectiv *greșit* după cum datele precizate în coloana întâi arată că dreptele a și b sunt paralele sau nu sunt paralele.

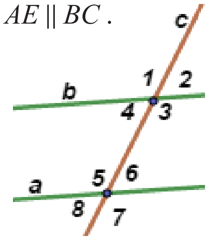


Fig. 1.

Date	$a \parallel b$	$a \nparallel b$
$\sphericalangle 4 = 50^\circ$, $\sphericalangle 8 = 130^\circ$;	greșit	corect
$\sphericalangle 3 = 135^\circ$, $\sphericalangle 5 = 135^\circ$;		
$\sphericalangle 2 = 70^\circ$, $\sphericalangle 8 = 70^\circ$;		
$\sphericalangle 3 = 128^\circ$, $\sphericalangle 4 = 52^\circ$;		
$\sphericalangle 1 = 120^\circ$, $\sphericalangle 6 = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle 1)$;		
$\sphericalangle 1 = 125^\circ$, $\sphericalangle 7 = 55^\circ$;		

3. Desenați punctele coliniare A, B, C, în această ordine.

a) De aceeași parte a dreptei AB, desenați semidreptele AM și BN astfel încât:

a_1) $\sphericalangle MAB = 70°$; $\sphericalangle NBC = 70°$;

a_2) $\sphericalangle MAB = 70°$; $\sphericalangle ABN = 110°$;

a_3) $\sphericalangle MAB = 70°$; $\sphericalangle NBC = 110°$.

b) Stabiliți pozițiile dreptelor AM și BN, în fiecare caz.

4. Desenați punctele coliniare A, B, C, în această ordine.

a) De o parte și de alta a dreptei AB, desenați semidreptele AM și BN astfel încât:

a_1) $\sphericalangle CBN = 115^\circ$ și $\sphericalangle MAB = 115^\circ$;

a_2) $\sphericalangle CBN = 115^\circ$ și $\sphericalangle MAC = 65^\circ$.

b) Stabiliți pozițiile dreptelor AM și BN, în fiecare caz.

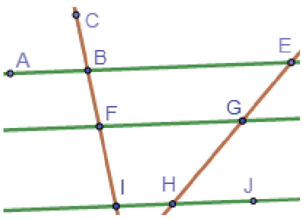


Fig. 2.

5. Observați configurația din figura 2.
Se știe că $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG$, și $\sphericalangle FGH + \sphericalangle IHG = 180^\circ$.
Arătați că $AE \parallel FG$, $FG \parallel IH$, $AE \parallel IH$.

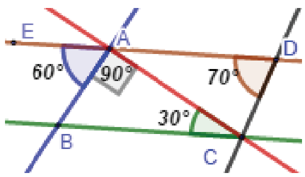


Fig. 3.

6. Observați și analizați configurația din desenul alăturat (*figura 3*).

a) Demonstrați că între dreptele din imagine, există o pereche de drepte paralele.

b) Determinați probabilitatea ca alegând două drepte oarecare din configurația dată, acestea să fie paralele.

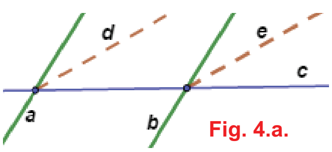


Fig. 4.a.

7. Dreptele a și b din *figura 4* sunt paralele și c este secantă acestora.

a) Demonstrați că dacă d și e sunt bisectoare a două unghiuri corespondente formate de a și b cu secanta c, atunci $d \parallel e$;

b) Demonstrați că dacă m și n sunt bisectoare a două unghiuri alterne interne formate de a și b cu secanta c, atunci $m \parallel n$.

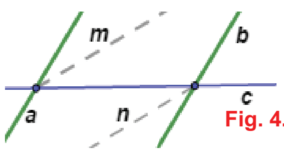


Fig. 4.b.

8. În interiorul unghiului MON cu $\sphericalangle MON = 67^\circ$, se consideră punctul P astfel încât $\sphericalangle MOP = 15^\circ + \sphericalangle PON$. Dacă punctul Q este situat pe semidreapta ON astfel încât $\sphericalangle OPQ = 41^\circ$, demonstrați că $OM \parallel PQ$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

a) Dacă $OA \parallel O'A'$ și $OB \parallel O'B'$, atunci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$; ☐

b) Dacă $OA \parallel O'A'$ și $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$, atunci $OB \parallel O'B'$. ☐

10. În *figura 5,* dreptele a și b formează cu secantele c, respectiv d, câte opt unghiuri ale căror măsuri pot fi determinate folosind datele din imagine.

a) Reproduceți desenul pe caiet, folosind instrumentele geometrice, realizați notații potrivite și determinați măsurile unghiurilor formate de secanta c cu dreptele a și b;

b) Determinați valoarea lui x.

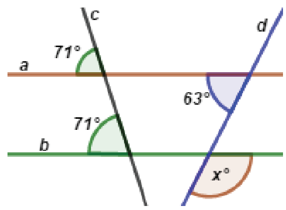


Fig. 5.

11. Punctele B, C, D, E aparțin dreptei d, în această ordine. Se consideră punctul $A \notin d$ astfel încât $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$, iar în interiorul unghiului $\sphericalangle ACB$ se consideră punctul P asfel încât $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle ADC$. Demonstrați că $AP \parallel d$.

12. În desenul din *figura 6,* BI este bisectoarea unghiului ABC. Folosind măsurile unghiurilor marcate în figură, demonstrați că dreptele BI și DE sunt paralele.

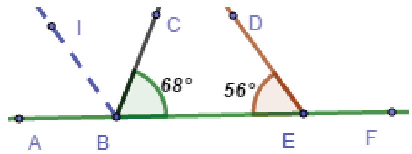


Fig. 6.

5.10. Aplicaţii practice în poligoane și corpuri geometrice

Observăm și demonstrăm

1. 1) Toate obiectele din jurul nostru au o parte exterioară, care este *suprafața* obiectului respectiv. De multe ori, unele obiecte sunt formate din mai multe *fețe*, iar o față poate fi mărginită de mai multe *muchii*. Din punct de vedere geometric, o muchie poate fi privită ca un segment *AB*.

Obiectele din figura 1 sunt imaginile foto ale fețelor a trei cutii de carton, folosite pentru ambalarea unor obiecte. Observați că reuniunea muchiilor unei fețe determină o figură geometrică.

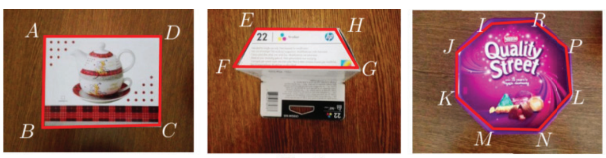


Fig. 1

a) Pentru fiecare dinte cele trei fețe, numiți segmentele determinate de muchiile feței respective;

b) Numiți figura geometrică formată de muchiile feței din prima imagine.

2) Reuniunea segmentelor determinate de muchiile fiecărei fețe este o figură geometrică numită *poligon.* Segmentele care formează poligonul se numesc *laturile poligonului.* Orice două laturi care se învecinează au un punct comun, care se numește *vârful poligonului.* Orice două laturi care se învecinează formează un unghi, numit *unghiul poligonului.*

Vocabular

poligon este un cuvânt compus:
poli = mai multe;
gon = unghi (în greacă, *gonia*)

a) Câte vârfuri are poligonul *IJKMNLPQ*? Numiți aceste vârfuri;

b) Câte laturi are poligonul *IJKMNLPQ*? Numiți aceste laturi;

c) Poligonul *IJKMNLPQ* se numește *octogon* (are opt unghiuri). Numiți unghiul octogonului cu vârful în punctul *P* și unghiul octogonului cu vârful în punctul *J*.

2. Cel mai simplu poligon este *triunghiul* (are trei unghiuri!). În figura 2, o dreaptă MN paralelă cu dreapta AB intersectează laturile AC și BC, ale unui triunghi ABC în punctele M, respectiv N. Comparați măsurile unghiurilor triunghiului MNC cu cele ale triunghiului dat.

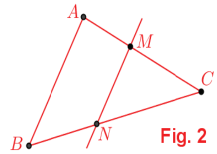


Fig. 2

3. 1) Poligonul cu patru laturi se numește *patrulater* (patru-laturi!). Patrulaterul $ABCD$ din figura 3 are *laturile opuse* paralele, adică $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$.

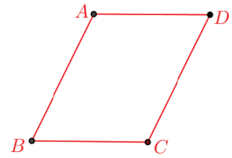


Fig. 3

a) Despre perechea de unghiuri BAD și BCD se spune că sunt *unghiuri opuse* ale patrulaterului. Numiți toate perechile de unghiuri opuse ale patrulaterului $ABCD$;
b) Despre perechea de unghiuri DAB și ABC se spune că sunt *unghiuri alăturate* ale patrulaterului. Numiți toate perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului $ABCD$.

2) Arătați că într-un patrulater cu laturile opuse paralele:
a) unghiurile alăturate ale patrulaterului sunt suplementare;
b) unghiurile opuse ale patrulaterului sunt congruente.

4. Dintr-un cub de lemn, se confecționează o jucărie prin tăiere și decupare. Folosind ferăstrăul, un muncitor acționează de sus în jos de-a lungul muchiei MQ și de-a lungul segmentului MB, desenat pe fața cubului, înspre dreapta (figura 4). După tăiere muncitorul obține un corp cu una din fețe $MBCQ$ (figura 5). Cu un echer, el constată că unghiurile acestei fețe, care au vârfurile M, respectiv Q, sunt unghiuri drepte. Muncitorul vrea să știe dacă dreptele determinate de muchiile MB și QC sunt paralele, dar nu dispune de un instrument pentru a afla răspunsul. Îl puteți ajuta să afle răspunsul corect?

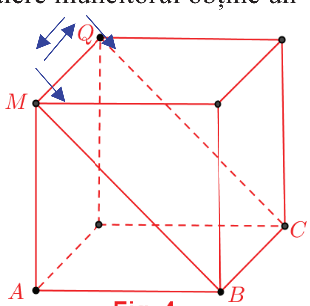


Fig. 4

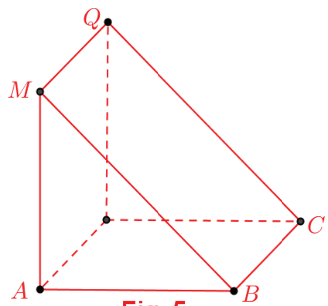


Fig. 5

Ne verificăm

1. 1) a) Segmentele determinate de muchiile fețelor sunt:pentru prima față: AB, BC, CD, DA; pentru fața a doua: EF, FG, GH, HE; pentru fața a treia: IJ, JK, …, RI;

b) Figura geometrică formată de muchiile feței din prima imagine este dreptunghiul $ABCD$.

2) a) Poligonul $IJKMNLPQ$ are opt vârfuri: I, J, K, M, N, L, P și Q. b) Poligonul $IJKMNLPQ$ are opt laturi: IJ, JK, KL,…, RI. c) Unghiul octogonului cu vârful P este unghiul LPR. Unghiul octogonului cu vârful J este unghiul IJK.

2. Din $AB \parallel MN$ și AC secantă $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CMN$ (teorema unghiurilor corespondente). $AB \parallel MN$ și BC secantă $\Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNC$ (teorema unghiurilor corespondente). Se observă că unghiul ACB coincide cu unghiul MCN. Rezultă că cele două triunghiuri ABC și MNC au măsurile unghiurilor egale.

3. 1) a) Perechile de unghiuri opuse ale patrulaterului $ABCD$ sunt: $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle BCD$; $\sphericalangle ABC$ *și* $\sphericalangle CDA$. Pentru că nu există pericolul unei confuzii, putem scrie: unghiurile opuse ale patrulaterului $ABCD$ sunt: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$; $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$. b) perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului $ABCD$ sunt: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$; $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$; $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$; $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle A$.

2) a) $AB \parallel CD$ și AD secantă $\Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ (teorema unghiurilor interne de aceeași parte a secantei). Deci unghiurile alăturate A și D, ale patrulaterului ABCD, sunt suplementare. De asemenea, $AD \parallel BC$ și AB secantă $\Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, deci unghiurile alăturate A și B, ale patrulaterului ABCD, sunt suplementare etc;

b) $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ și $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$ rezultă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, deci unghiurile opuse B și D ale patrulaterului $ABCD$ sunt congruente.

4. Folosind echerul, muncitorul a constatat că unghiurile BMQ și CQM sunt drepte, adică $\sphericalangle BMQ = 90^\circ$ și $\sphericalangle CQM = 90^\circ$. Dar, dreapta MQ este secantă pentru dreptele MB și QC, iar unghiurile BQM și CQM sunt interne de aceeași parte a secantei și sunt congruente. Rezultă că MB și MC sunt drepte paralele (teorema unghiurilor interne de aceeași parte a secantei).

5.11. Drepte perpendiculare în plan. Oblice

Rezolvăm și descoperim

1. 1) Desenați o semidreaptă PQ și completați desenul cu semidreapta PR opusă semidreptei PQ.

2) Observați figura 1. Desenați pe caietul vostru un unghi drept BAC:

a) folosind un echer; b) folosind un raportor.

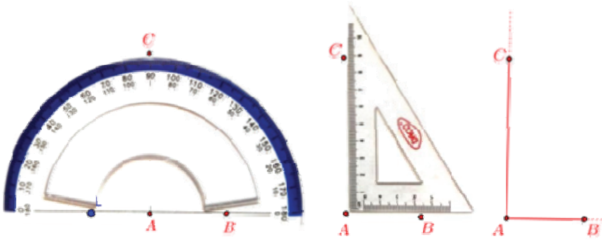


Fig. 1

3) Unghiul BAC are măsura egală cu 90° (figura 2). Cu ajutorul unei rigle, punem în evidență dreptele AC și AB și considerăm un punct M oarecare, pe semidreapta opusă semidreptei AC și un punct oarecare N, pe semidreapta opusă semidreptei AB.

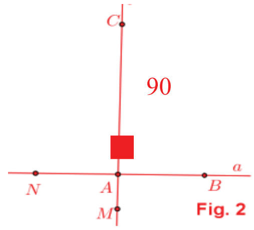


Fig. 2

a) Copiați textul de mai jos și completați-l, alegând dintre expresiile AB, AN, BN, a, AC, AM, CM, b, pe toate acelea pentru care textul rezultat conține afirmații adevărate din punct de vedere matematic: *Dreapta a coincide cu oricare dintre dreptele…, dar nu coincide cu niciuna dintre dreptele…*

Dreapta b nu coincide cu niciuna dintre dreptele…, dar coincide cu dreptele…

b) Demonstrați că unghiurile MAN, BAM și NAC sunt unghiuri drepte.

2. 1) Se spune că două drepte a și b sunt *drepte perpendiculare,* dacă formează un unghi drept. Notăm $a \perp b$ și citim *dreapta a este perpendiculară pe dreapta b*. Desenați două drepte perpendiculare. Câte unghiuri drepte formează două drepte perpendiculare? Justificați răspunsul!

2) Alexandra face următoarea afirmație: „Dacă două drepte a și b sunt paralele și o a treia dreaptă c este perpendiculară pe una din cele două drepte, atunci ea este perpendiculară și pe cealaltă.”

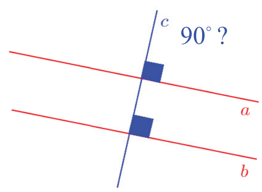


Fig. 3

a) Știind că afirmația Alexandrei este adevărată, folosind simbolurile matematice și un desen corespunzător, reformulați afirmația în limbaj matematic.

b) Observați figura 3. Știind că $a \parallel b$ și $c \perp a$ demonstrați că $c \perp b$.

3. În figura 4, dreapta d este perpendiculară pe dreapta a și dreapta c este perpendiculară pe dreapta d. Dreapta b face cu dreapta c un unghi care nu este drept. Se spune că dreapta c este *oblică* față de dreapta b.

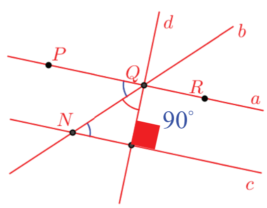


Fig. 4

a) Folosind instrumentele, realizați pe caietul vostru un desen în care dreptele a, b, c și d să respecte cerințele de mai sus. Completați desenul cu punctele M,N, P, Q și R, astfel încât, aceste puncte să fie poziționate pe dreptele a, b, c și d ca în figura 4.

b) Priviți atent figura din caietul vostru și observați că dispuneți de următoarele informații: $NM \perp MQ$, $PQ \perp MQ$. Demonstrați că unghiurile MNQ și MQN sunt complementare.

c) Alături de figură, scrieți *ipoteza* (informațiile ipotetice despre figură) și *concluzia.*

Vocabular

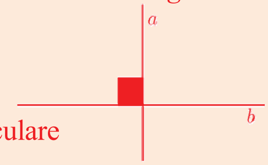
ipoteza = *informații ipotetice* = informații bazate pe presupuneri; *concluzia* = ceea ce rezultă în final prin demonstrație

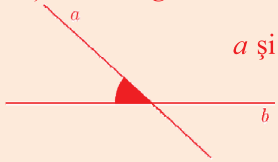
Rezumăm cunoștințele

*Dreapta **a este perpendiculară** pe dreapta b dacă cele două drepte formează un unghi drept.*
*Dreapta **a este oblică** față de dreapta b dacă cele două drepte formează un unghi care nu este drept.*
Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.
Două drepte oblice formează două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze.

$a \perp b$ sau $b \perp a$

a și b sunt perpendiculare





a și b sunt oblice

Aplicăm cunoștințele

4. Se consideră următoarea afirmație: *Două drepte perpendiculare pe o a treia dreaptă sunt paralele.*
a) Reformulați afirmația (realizați figura, scrieți ipoteza și concluzia).
b) Demonstrați afirmația.

Ne verificăm

1. 1) În figura R1 semidreaptă PQ și semidreapta PR sunt semidrepte opuse.

Fig. R1

2) Vezi figura 1.
3) a) *Dreapta a coincide cu oricare dintre dreptele AB, AN, BN, dar nu coincide cu niciuna dintre dreptele AC, AM, CM, b. Dreapta b nu coincide cu niciuna dintre dreptele AB, AN, BN, a, dar coincide cu dreptele AC, AM, CM .*
b) $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle BAC$ (unghiuri opuse la vârf), deci $\sphericalangle MAN = 90^\circ$. Unghiurile MAN și BAM sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle BAM = 90^\circ$. La fel, unghiurile BAM și NAC sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle NAC = 90^\circ$. Prin urmare, unghiurile MAN, BAM și NAC sunt unghiuri drepte.

2. 1) Dreptele a și b sunt perpendiculare deoarece unghiul BAC este drept. Se observă că dreptele respective formează 4 unghiuri. Cum dintre cele patru unghiuri, două sunt adiacente suplementare și două sunt opuse la vârf, rezultă că cele 4 unghiuri sunt drepte (figura R2).

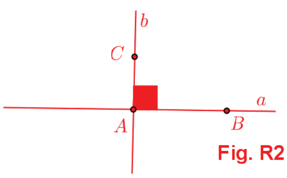


Fig. R2

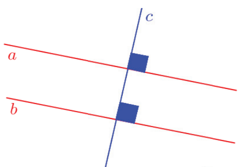


Fig. R3

90°

$$\left.\begin{array}{l} c \perp a \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp b$$

Afirmația Alexandrei

a) Desenul corespunzător și afirmația Alexandrei sunt cele din figura R3.
b) Observând atent figura R3, constatăm că dreapta c este secantă pentru dreptele a și b, iar unghiurile marcate cu albastru sunt corespondente. Dreptele a și b fiind paralele, unghiurile menționate sunt congruente (teorema unghiurilor corespondente). Cum unul dintre unghiuri este drept, rezultă că și celălalt unghi este drept.

3. a) Rezultă o figură asemănătoare cu figura R4.1. b) Observați figura R4.1

$$\left.\begin{array}{l} NM \perp MQ \\ PQ \perp MQ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sphericalangle MQP = 90^\circ \\ \sphericalangle QMN = 90^\circ \end{array}\right.,$$

deci dreptele NM și PQ formează cu secanta QM unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare. Rezultă $PQ \parallel MN$ (teorema unghiurilor interne de aceeași parte a secantei)

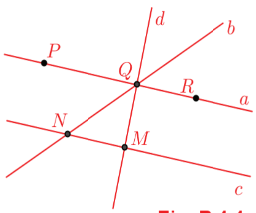


Fig. R 4.1

$PQ \parallel MN$ și QN secantă $\Rightarrow \sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PQN$ (teorema unghiurilor alterne interne).

Din $PQ \perp MQ$, rezultă că unghiul MQP este drept și atunci, $\sphericalangle PQN + \sphericalangle MQN = 90^\circ$.

Dar $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PQN$. Rezultă $\sphericalangle MNQ + \sphericalangle MQN = 90^\circ$, adică unghiurile MNQ și MQN sunt complementare.

c) Alături de figura 4.2 sunt scrise: *ipoteza*, ceea ce se dă în problemă și *concluzia*, adică ceea ce a rezultat în urma *demonstrației.* De asemenea, figura pune în evidență anumite unghiuri a căror observare atentă ușurează înțelegerea demonstrației.

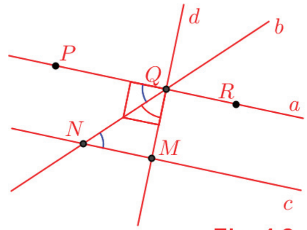
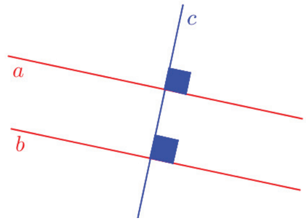


Fig. 4.2

Ipoteza:
$MN \perp MQ$
$PQ \perp MQ$
Concluzia:
$\sphericalangle PQN + \sphericalangle PQN = 90^\circ$

4. a) *Reformulare*: $c \perp a$ și $c \perp b \Rightarrow a \parallel b$;

b) *Demonstrație*: Deoarece $c \perp a$ dreptele a și c formează un unghi drept. La fel, deoarece $c \perp b$ dreptele c și b formează un unghi drept. Cele două unghiuri, marcate pe figură, sunt unghiuri corespondente congruente. Fiind unghiuri formate de dreptele a și b cu secanta c, rezultă $a \parallel b$ (teorema unghiurilor corespondente).



Ipoteza:
$c \perp a$
$c \perp b$
Concluzia:
$a \parallel b$

Activități de învățare

1. Desenați o dreaptă d și un punct A care nu aparține dreptei d.

a) Trasați, cu ajutorul echerului, perpendiculara a, din punctul A pe dreapta d, apoi trasați, prin punctul A o dreaptă oblică, notată cu b.

b) Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile formate de dreptele a și d, respectiv b și d. Comparați măsurile găsite.

2. Desenați o dreaptă d și punctele distincte A și B, situate pe această dreaptă. Trasați, cu ajutorul echerului, perpendicularele, în punctele A respectiv B, pe dreapta d.

3. Se consideră punctele necoliniare A, B și C. Construiți:

a) perpendicularele, în punctul A, pe dreptele AB respectiv AC;

b) perpendiculara, din punctul B, pe dreapta AC;

c) perpendicularele, în punctul C, pe dreptele AC respectiv BC;

d) perpendiculara, din punctul A, pe BC;

4. Desenați un cerc cu centrul O și reprezentați trei puncte A, B, C, pe acest cerc. Din punctul O, construiți dreptele perpendiculare pe AB, BC, respectiv AC.

5. În jurul unui punct P, se consideră 6 unghiuri congruente.

a) Demonstrați că nu există drepte perpendiculare care să conțină laturi ale acestor unghiuri.

b) Desenați bisectoarea unuia dintre cele 6 unghiuri, apoi demonstrați că există drepte perpendiculare care să conțină două dintre cele șapte semidrepte desenate.

6. Demonstrați că dacă două drepte distincte sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă, atunci acestea sunt paralele.

7. Unghiurile AOB, BOC, COA sunt trei unghiuri congruente, în jurul punctului O, iar D este un punct în interiorul unghiului AOB astfel încât $\sphericalangle AOD = 3 \cdot \sphericalangle BOD$.

a) Demonstrați că $AO \perp OD$;

b) Dacă OE este bisectoarea unghiului BOC, demonstrați că $OD \perp OE$.

8. Unghiurile DEF și FEG sunt adiacente complementare. Considerăm dreapta d, $d \perp EF$, $E \in d$ și punctul $H \in d, H \neq E$.

a) Demonstrați că $DE \perp EG$; b) Demonstrați că $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle GEH$ sau $\sphericalangle DEH \equiv \sphericalangle FEG$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Completați, în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă.

a) Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$. ☐

b) Dacă $a \perp b$ și $b \perp c$, atunci $a \perp c$. ☐

c) Dacă $a \perp b$ și $b \perp c$, atunci $a \parallel c$. ☐

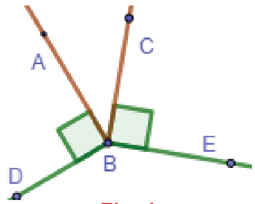


Fig. 1.

10. În *figura 1*, unghiurile ABC și DBE au laturile respectiv perpendiculare, adică $AB \perp BD$ și $BC \perp BE$, iar $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 170^\circ$.

a) Determinați măsurile unghiurilor ABC și DBE.

b) Demonstrați că bisectoarele unghiurilor ABC și DBE sunt semidrepte opuse.

11. Dreptele distincte a, b, c, d satisfac relațiile $a \perp b, c \parallel a$ și $d \parallel b$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că $c \perp d$.

12. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare iar OM și ON sunt bisectoarele lor. Calculați măsura unghiului MON, pentru fiecare din situațiile:

a) $\sphericalangle AOB = 60^\circ$; b) $\sphericalangle BOC = 100^\circ$; c) $\sphericalangle AOB = a^\circ$.

13. Comparați rezultatele obținute la problema anterioară și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Completați, în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă.

a) Dreapta OM este perpendiculară pe dreapta ON; ☐

b) Dreapta OM este oblică față de dreapta ON. ☐

14. Desenați patru drepte a, b, c, d, concurente în punctul P, care formează, în această ordine, în jurul punctului P, opt unghiuri congruente. Determinați perechile de drepte perpendiculare.

15. În jurul punctului O, se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA astfel încât $\sphericalangle AOB = 30^\circ$, $\sphericalangle BOC = x^\circ$, $\sphericalangle COD = x^\circ + 50^\circ$, $\sphericalangle DOE = 80^\circ$.

a) Dacă $AO \perp OE$, aflați valoarea lui x;

b) Dacă $CO \perp OD$, aflați măsura unghiului AOE.

16. Unul dintre unghiurile determinate de două drepte concurente este medie aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri. Demonstrați că dreptele sunt perpendiculare.

17. Se consideră un unghi ascuțit, AOB. De aceeași parte a dreptei OB, se construiesc perpendicularele OC și OD pe dreptele OA, respectiv OB. Semidreapta OP este bisectoarea unghiului AOD, $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOP$, iar $\sphericalangle AOB = x^\circ$.

a) Calculați, în funcție de x, măsurile unghiurilor COD și BOP;

b) Determinați măsura unghiului AOB.

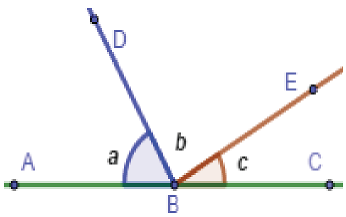


Fig. 2.

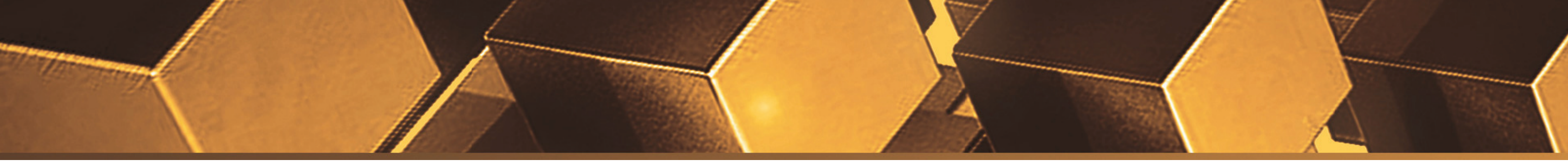
18. În *figura 2*, punctele A, B, C sunt coliniare iar $\sphericalangle ABD = a$, $\sphericalangle DBE = b$, $\sphericalangle EBC = c$.

Știind că $3 \cdot a = 2 \cdot b = 6 \cdot c$, arătați că $DB \perp BE$.

19. Punctele O, A, B, C, D, E, F sunt dispuse în plan astfel încât OB este bisectoarea unghiului AOC, OC este bisectoarea unghiului BOD, OD este bisectoarea unghiului COE, iar OE este bisectoarea unghiului COF. Dreptele OB și OE sunt perpendiculare.

a) Calculați măsurile unghiurilor AOF, BOE și COD;

b) Demonstrați că dreapta DO este perpendiculară pe dreapta AF.



5.12. Aplicaţii practice în poligoane și corpuri geometrice

Rezolvăm și descoperim

Fig.1

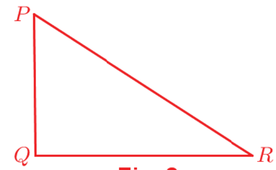


Fig. 2

1. Poligonul din figura 1 este un *dreptunghi KLMN*. El are patru unghiuri drepte. *Orice patrulater care are patru unghiuri drepte este un dreptunghi*. Triunghiul *PQR* din figura 2 este un *triunghi dreptunghic*. El are un unghi drept cu vârful în punctul *P*. *Orice triunghi care are un unghi drept este triunghi dreptunghic*.

Desenați în caietul vostru un dreptunghi *PQRS* care are lungimile laturilor egale cu 5,5 cm, respectiv 2,5 cm. Calculați aria dreptunghiului.

2. Desenați un triunghi dreptunghic *ABC* cu vârful unghiului drept în punctul *A*. Perpendiculara din *C* pe *paralela dusă prin B la AC* o intersectează pe aceasta în punctul *D*.

a) Demonstrați că figura *ABDC* este un dreptunghi;

b) Comparați ariile triunghiurilor *ABC* și *DCB*;

c) Dacă aria dreptunghiului *ABCD* este egală cu x cm^2, câți cm^2 are aria triunghiului dreptunghic *ABC*? Deduceți că:

Aria oricărui triunghi dreptunghic este semiprodusul dintre lungimile laturilor care formează unghiul drept.

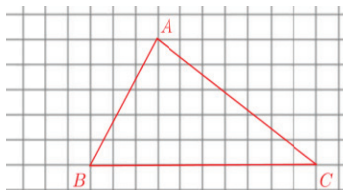


Fig. 3

3. În figura 3 este desenat un triunghi oarecare *ABC*.

a) Distanța de la un vârf al triunghiului la latura opusă vârfului se numește *înălțime* a triunghiului, iar despre lungimea laturii respective se spune că este *baza triunghiului,* corespunzătoare acelei înălțimi. Copiați triunghiul în caietul vostru. Desenați și numiți segmentul care este o înălțime a triunghiului *ABC*. Care este baza triunghiului corespunzătoare acelei înălțimi?

b) Folosind afirmația dovedită la problema 2. c), demonstrați că: *Aria oricărui triunghi este egală cu semiprodusul dintre o înălțime a triunghiului și baza triunghiului corespunzătoare acelei înălțimi.*

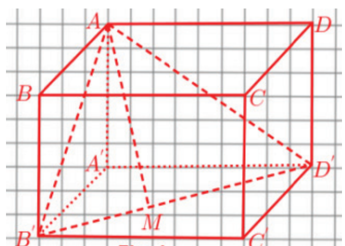


Fig. 4

4. În figura 4, este desenat corpul geometric numit *paralelipiped dreptunghic*. Toate fețele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.

a) Copiați figura 4 în caietul de matematică ajutându-vă de pătrățele.;

b) Numiți fețele paralelipipedului care conțin vârful A' (A' se citește „*A* prim”);

c) Pe fața $A'ABB'$ numiți o dreaptă perpendiculară pe *AB* și o dreaptă oblică față de *AB*.

d) Dacă punctul *M* este piciorul perpendicularei, din vârful *A* pe dreapta $B'D'$, calculați lungimea segmentului *AM,* știind că aria triunghiului $AB'D'$ este egală $10{,}5\,\text{cm}^2$ și $B'D' = 6\,\text{cm}$.

Reținem

Orice patrulater care are patru unghiuri drepte este un dreptunghi.
Două laturi vecine ale dreptunghiului au lungimile diferite. Ele se numesc lungime și lățime.
Aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului.
Orice triunghi care are un unghi drept este numit triunghi dreptunghic.
Aria oricărui triunghi dreptunghic este semiprodusul lungimilor laturilor care formează unghiul drept.

Aria oricărui triunghi este egală cu semiprodusul dintre o înălțime a triunghiului și baza triunghiului, corespunzătoare acelei înălțimi.

Ne verificăm

1. Desenul corect este cel din figura R1. Aria dreptunghiului este egală cu $5{,}5 \cdot 2{,}5 = 13{,}75\left(\text{cm}^2\right)$.

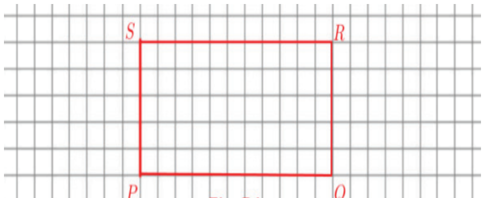


Fig. R1

2. a) *Ipoteza*: $\sphericalangle BAC = 90^\circ, BD \parallel AC, CD \perp DB$;

Concluzia: *ABCD este dreptunghi.*

Demonstrație: (1) $BD \parallel AC$, AB secantă $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD$ (unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare). Cum $\sphericalangle BAC = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABD = 90^\circ$ (2) $CD \perp DB \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle CDB = 90^\circ$. (3) $BD \parallel AC$, CD secantă $\Rightarrow \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ACD$ (unghiuri interne de acceași parte a secantei suplementare). Cum $\sphericalangle CDB = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACD = 90^\circ$. Din ipoteză, din (1), (2) și (3) rezultă că toate unghiurile poligonului *ABDC* sunt drepte, deci poligonului *ABDC* este dreptunghi;

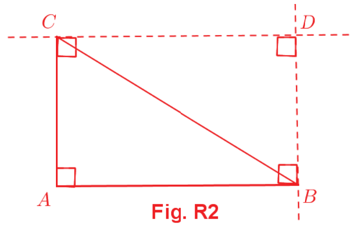


Fig. R2

b) Intuitiv, constatăm că ariile triunghiurilor *ABC* și *DCB* sunt egale;

c) Ariile triunghiurilor *ABC* și *DCB* fiind egale, rezultă că aria unuia este egală cu jumătate din aria dreptunghiului *ABDC*. Aria triunghiului *ABC* este $A_{ABC} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{AB \cdot AC}{2}$.

Triunghiul *ABC* fiind un triunghi dreptunghic oarecare rezultă: *aria oricărui triunghi dreptunghic este semiprodusul lungimilor laturilor care formează unghiul drept.*

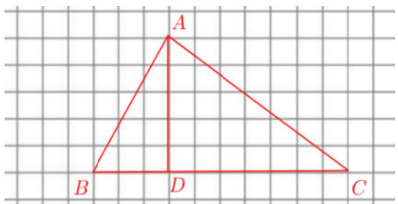


Fig. R3

3. Notăm cu *D* piciorul perpendicularei din *A* pe *BC*. Atunci *AD* este înălțime a triunghiului, corespunzătoarea bazei *BC*, iar *ADB* și *ADC* sunt triunghiuri dreptunghice, fiecare având unghiul drept cu vârful în *D* (figura R3). Folosind afirmația dovedită la problema 2 rezultă: $A_{ABD} = \dfrac{AD \cdot BD}{2}$ și $A_{ADC} = \dfrac{AD \cdot DC}{2}$.

Atunci aria triungiului *ABC* este egală cu suma ariilor celor două triunghiuri, deci $A_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BD}{2} + \dfrac{AD \cdot DC}{2}$. Observând că $BD + DC = BC$ rezultă $A_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$.

Prin urmare: *Aria oricărui triunghi este egală cu semiprodusul dintre o înălțime a triunghiului și baza triunghiului corespunzătoare acelei înălțimi.*

4. a) Desenul corect este cel din figura R4.;

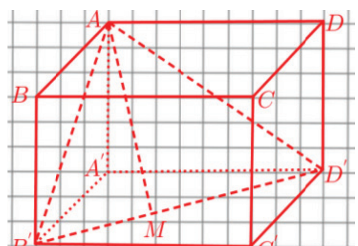


Fig. R4

b) Fețele paralelipipedului care conțin vârful A' sunt: $A'ABB'$, $A'ADD'$ și $A'B'C'D'$;

c) $A'A \perp AB$ și AB' este oblică față de *AB*;

d) Deoarece *M* este piciorul perpendicularei din vârful *A* pe dreapta $B'D'$, atunci $AM \perp B'D'$, deci *AM* este distanța de la punctul *A* la dreapta $B'D'$. Prin urmare, *AM* este înălțime a triunghiului $AB'D'$, iar $B'D'$ este baza triunghiului, corespunzătoare acestei înălțimi. Rezultă aria triunghiului $A_{AB'D'} = \dfrac{AM \cdot B'D'}{2}$, de unde $10{,}5 = \dfrac{AM \cdot 6}{2}$ și $AM = 3{,}5$ cm.

5.13. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Rezolvăm

1. *Se dau:* o dreaptă *d* și un punct *P* exterior dreptei *d* (figura 1). *Se cere* să construim dreapta *a,* care trece prin punctul *P* și este perpendiculară pe dreapta *d*. Construcția se face cu echerul, ca în figura 2. De obicei, pentru a descrie această situație, se folosește exprimarea: *din punctul P se construiește perpendiculara a, pe dreapta d*. Despre *a se spune că este perpendiculara din punctul P, pe dreapta d.*

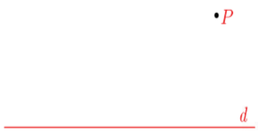


Fig. 1

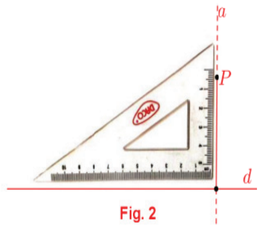


Fig. 2

Folosindu-vă de foaia cu pătrățele a caietului de matematică, copiați pe caiet triunghiul *ABC* din figura alăturată (figura 3). Construiți:
a) perpendiculara din punctul *A* pe dreapta *BC*;
b) perpendiculara din punctul *B* pe dreapta *AC*;
c) perpendiculara din punctul *C* pe dreapta *AB*.

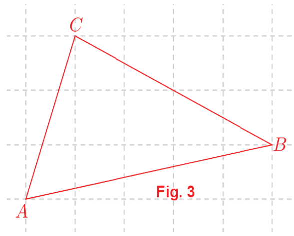
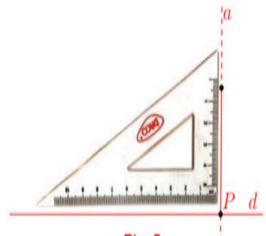


Fig. 3

2. *Se dau:* o dreaptă *d* și un punct *P,* care aparține dreptei *d* (figura 4). *Se cere* să construim dreapta *a,* care trece prin punctul *P* și este perpendiculară pe *d*. Construcția se face cu echerul, ca în figura 5. De obicei, pentru a descrie această situație se folosește exprimarea: *în punctul P se ridică perpendiculara a, pe dreapta d.*

Folosindu-vă de foaia cu pătrățele a caietului de matematică, copiați, pe caiet, triunghiul *AOB* din figura alăturată (figura 6).
a) În punctul *A,* ridicați perpendiculara pe dreapta *OA*.
b) În punctul *B,* ridicați perpendiculara pe dreapta *OB*.

Fig. 4



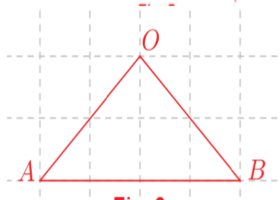


Fig. 6

3. Perpendiculara dintr-un punct *P* pe o dreaptă *d* o intersectează pe aceasta în punctul P_1 (se citește *punctul P unu*). Punctul P_1 se numește *piciorul perpendicularei,* dusă din *P,* pe dreapta *d* (figura 7). Lungimea segmentului PP_1 se numește *distanța de la punctul P la dreapta d.*

Folosindu-vă de foaia cu pătrățele a caietului de matematică, copiați în caiet figura alăturată (figura 8).
a) Construiți perpendiculara din punctul *P,* pe dreapta *d*.
b) Folosind rigla gradată, aflați distanța de la punctul *P,* la dreapta *d*.
c) Dacă *Q* este piciorul perpendicularei din punctul *P,* pe dreapta *d*, iar punctul $R \neq Q$ este un punct oarecare pe dreapta *d*, care este măsura unghiului *PQR*?

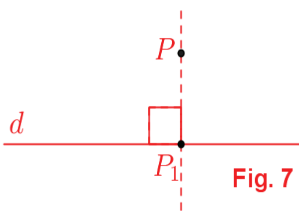


Fig. 7

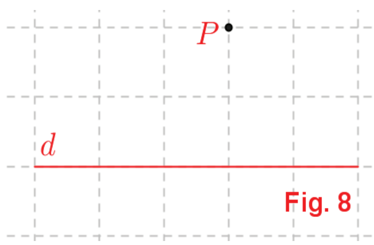
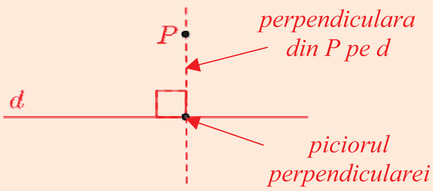
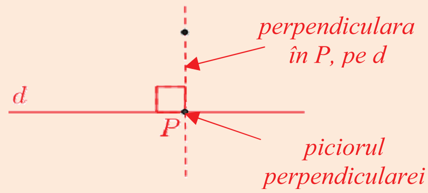


Fig. 8

Rezumăm cunoștințele

Piciorul perpendicularei *dintr-un punct pe o dreaptă sau într-un punct pe o dreaptă este punctul de intersecție al perpendicularei cu dreapta.*





Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea segmentului determinat de acel punct și piciorul perpendicularei, dusă din punctul dat, pe dreaptă.

Aplicăm cunoștințele

4. Mihai desenează două drepte oblice, *OA* și *OB*. El susține că distanța de la *A* la *OB* este *AB*. Sonia îl completează: „numai dacă $AB \perp OB$”. Cine are dreptate?

Ne verificăm

1. Desenul corect este cel din figura R1.

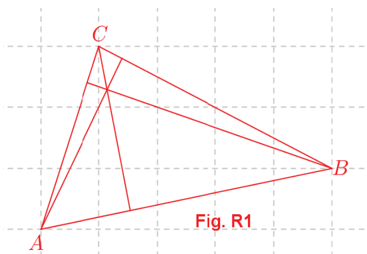


Fig. R1

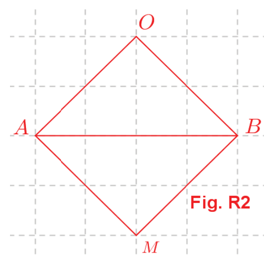


Fig. R2

2. Desenul corect este cel din figura R2, unde: $MA \perp AO$, deci *MA* este perpendiculara în *A,* pe AO; $MB \perp BO$, deci *MB* este perpendiculara în *B,* pe *BO*.

3. a) Desenul corect este cel din figura R3, unde: $PQ \perp d$, deci *PQ* este perpendiculara din *P,* pe *d*.

b) Distanța de la punctul *P* la dreapta *d* este lungimea segmentului *PQ*; $PQ = 1$ cm , $\sphericalangle PQR = 90^\circ$

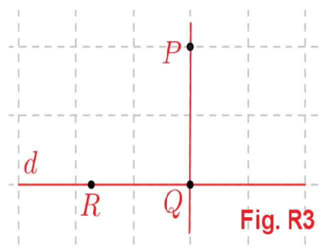


Fig. R3

4. Dacă distanța de la *A* la *OB* este *AB*, rezultă că punctul *B*, care se află pe dreapta *OB*, este piciorul perpendicularei din *A* pe *OB*, adică $AB \perp BO$. Prin urmare, Sonia are dreptate.

Activități de învățare

1. Desenați dreapta a și punctele A, B, C care nu aparțin dreptei a. Construiți perpendicularele din punctele A, B, respectiv C pe dreapta a și notați cu A', B', C' picioarele perpendicularelor construite. Măsurați, cu rigla gradată, lungimile segmentelor AA', BB', CC'. Completați, în tabelul următor, rezultatele obținute.

$AA' \perp a, A' \in a$	$A'A = \ldots \text{cm}$;	$d(A,a) = \ldots \text{cm}$;
$BB' \perp a, B' \in a$	$B'B = \ldots \text{cm}$;	$d(B,a) = \ldots \text{cm}$;
$CC' \perp a, C' \in a$	$C'C = \ldots \text{cm}$;	$d(C,a) = \ldots \text{cm}$.

2. Desenați dreptele perpendiculare a și b, $a \cap b = \{O\}$.

a) Reprezentați pe dreapta a, punctele A și B, situate la distanța $2\,\text{cm}$, respectiv $5\,\text{cm}$ față de dreapta b.

b) Reprezentați pe dreapta b, punctele C și D, ambele situate la distanța $4\,\text{cm}$ față de dreapta a.

c) Completați spațiile libere, folosind modelul prezentat:

$c_1)$ $d(A,b) = AO = 2\,\text{cm}$;	$c_2)$ $d(B,b) = \ldots = \ldots \text{cm}$;
$c_3)$ $d(C,a) = \ldots = \ldots \text{cm}$;	$c_4)$ $d(B,a) = \ldots = \ldots \text{cm}$.

3. Desenați o dreaptă d, apoi reprezentați punctele A, B, C, D, situate la distanță de $3\,\text{cm}; 6\,\text{cm}; 4,5\,\text{cm}$, respectiv 0 cm față de dreapta d.

4. Desenați dreapta d și punctele M, N, P care nu aparțin dreptei d. Construiți perpendicularele din punctele M, N, respectiv P pe dreapta d și notați cu M', N', P' picioarele perpendicularelor construite. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor; scrieți în căsuța alăturată litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

$MM' \parallel NN'$; $\square$ $\qquad$ $MM' \cap PP' \neq \varnothing$. $\square$

5. Punctele D, E, F sunt mijloacele laturilor AB, BC respective AC ale triunghiului ABC. Desenați perpendicularele, în D, pe AB, în E, pe BC și în F, pe AC.

6. Desenați un pătrat $ABCD$ cu latura de 4 cm și M, N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Comparați distanța de la M la BC cu distanța de la N la AB.

7. Se consideră dreapta d și punctul M, $M \notin d$.

a) Trasați, cu ajutorul echerului, perpendiculara din M, pe dreapta d, apoi trasați o dreaptă oblică d' astfel încât $M \in d'$. Notați cu A piciorul perpendicularei construite și cu B intersecția dreptelor d și d'.

b) Măsurați lungimile segmentelor MA și MB. Folosind valorile găsite, stabiliți relația corectă:
$MA < MB$; $\qquad$ $MA = MB$; $\qquad$ $MA > MB$.

8. Pe semidreapta OX, desenați punctele A și B, $OA < OB$ și fie $OP \perp OX$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei;

b) Observați configurația realizată și completați spațiile libere cu unul din simbolurile $>, <, =$, astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

$b_1)$ $PO \ldots PA$; $\qquad$ $b_2)$ $PB \ldots PO$; $\qquad$ $b_3)$ $PA \ldots PB$;

$b_4)$ Dacă $C \in OX$, $OA < OC < OB$, atunci $PA \ldots PC$ și $PB \ldots PC$.

$b_5)$ Dacă $C \in OX$, $OC > OB$, atunci ordinea crescătoare a lungimilor PO, PA, PB, PC este: …… .

9. Pe semidreapta OY desenați punctele distincte A, B, C cu $OA < OB$ și $OM \perp OY$. Observați desenul realizat și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) $MO \ldots MA$ și $\sphericalangle MOY \ldots \sphericalangle MAO$;

b) $MA \ldots MB$ și $\sphericalangle MAO \ldots \sphericalangle MBO$;

c) Dacă $\sphericalangle MCO < \sphericalangle MAO$, atunci $MC \ldots MA$;

d) Dacă $\sphericalangle MCO < \sphericalangle MBO$, atunci ordinea crescătoare a lungimilor segmentelor MO, MA, MB, MC este: ………… .

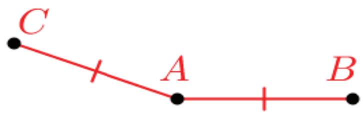
10. Se consideră punctele O, A, B, C coliniare, în această ordine, $OA = a, OB = b, OC = c$ și dreptele d_1, d_2, d_3, d_4, perpendiculare pe OC, în punctele O, A, B, respectiv C. Calculați:

$d(A, d_1)$; $d(A, d_3)$; $d(A, d_4)$; $d(B, d_1)$;
$d(B, d_4)$; $d(C, d_1)$; $d(C, d_4)$; $d(C, d_2)$.

5.14. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă

Important

Se spune că un punct A este egal depărtat de două puncte B și C dacă AB = AC.



Ne amintim

Vocabular
dreaptă perpendiculară pe segment = dreapta perpendiculară pe dreapta determinată de segment

1. 1) În clasa a V-a, ați învățat că *mijlocul unui segment este un punct situat pe segment, egal depărtat de capetele segmentului.*
Folosind un compas și o riglă negradată, Mihai și Sonia vor să deseneze un segment și mijlocul acestuia.
Mihai desenează o dreaptă și reprezintă pe ea, un punct *O*. Cu centrul în *O,* desenează apoi, două arce ale aceluiași cerc, care intersectează dreapta în două puncte *A* și *B* (figura 1). El susține că *O* este mijlocul segmentului *AB*.

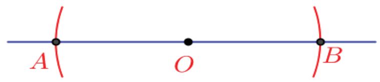


Fig. 1

Sonia desenează un arc de cerc cu centul într-un punct *O* și două puncte oarecare *A* și *B* pe arcul respectiv (figura 2). Ea susține că *O* este mijlocul segmentului *AB* deoarece *O* este egal depărtat de capetele acestuia.
Cine are dreptate Mihai sau Sonia? Justificați răspunsul!

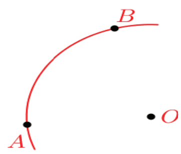


Fig. 2

2) Folosindu-se de figura desenată de Mihai, Elena construiește cu un echer perpendiculara din *O,* pe dreapta *AB*, notează cu *M* piciorul perpendicularei și face următoarele două afirmații (figura 3):
(1) *M* este mijlocul lui *AB*;
(2) orice punct de pe dreapta *OM* este egal depărtat de capetele segmentului *AB*.
a) Folosind compasul, rigla și echerul, desenați în caiet figura desenată de Mihai, completată de Elena (figura 3).
b) Folosind compasul, verificați afirmațiile Elenei.

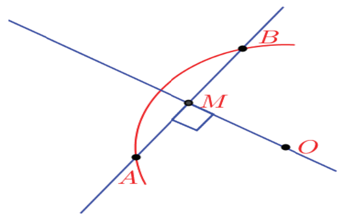


Fig. 3

Reținem

Despre o dreaptă care trece prin mijlocul unui segment și este perpendiculară pe segment, se spune că este ***mediatoarea segmentului****.*
Experiența celor trei copii, Mihai, Sonia și Elena, probează că punctele unei drepte care este perpendiculară pe un segment și trece prin mijlocul acestuia sunt egal depărtate de capetele segmentului.
Prin urmare, *orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.*
a) Orice punct de pe o dreapta *d* este egal depărtat de capetele unui segment *ST* și dreapta este perpendiculară pe segment. Este dreapta *d* mediatoarea segmentului *ST*? Demonstrați!
Prin urmare, *orice punct egal depărtat de capetele unui segment se află pe mediatoarea segmentului.*

b) Orice punct de pe o dreaptă a este egal depărtat de capetele unui segment BC. Este dreapta a mediatoarea segmentului BC? Justificați răspunsul!

2. a) Desenați pe caiet un segment MN. Folosind un compas, construiți un punct O, egal depărtat de capetele segmentului MN. Descrieți în fraze simple etapele construcției sugerată de figura 4.

b) Punctul O aparține mediatoarei segmentului MN?

c) Pentru a desena mediatoarea segmentului MN este suficient să desenăm două puncte ale acesteia? Explicați!

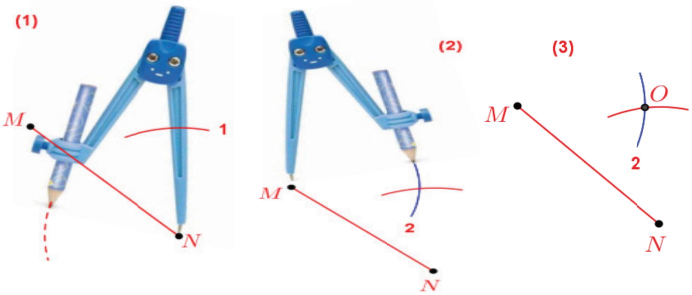


Fig. 4.

d) Construiți un alt punct Q, diferit de punctul O, egal depărtat de capetele segmentului MN.

e) Completați desenul cu mediatoarea segmentului MN și notați cu P intersecția mediatoarei cu segmentul MN.

f) Care este mijlocul segmentului MN? Justificați răspunsul!

3. Rezolvarea problemei 2 de mai sus ne permite să construim mijlocul unui segment și mediatoarea acestuia, folosind compasul și rigla. Construcția se bazează pe *proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment* și pe faptul că pentru a trasa mediatoarea, sunt suficiente două puncte ale acesteia. a) Observați cu atenție etapele construcției mediatoarei unui segment, sugerate în figura 5:

■ etapa (1) - construcția arcelor de cerc 1 și 2 cu centrul în punctul N;

■ etapa (2) - construcția arcelor de cerc 3 și 4 cu centrul în punctul M;

■ etapa (3) - introducerea notațiilor pentru intersecția arcelor de cerc, construirea mediatoarei și notarea mijlocului segmentului MN.

b) Desenați pe caiet un segment MN, construiți mijlocul segmentului și mediatoarea acestuia.

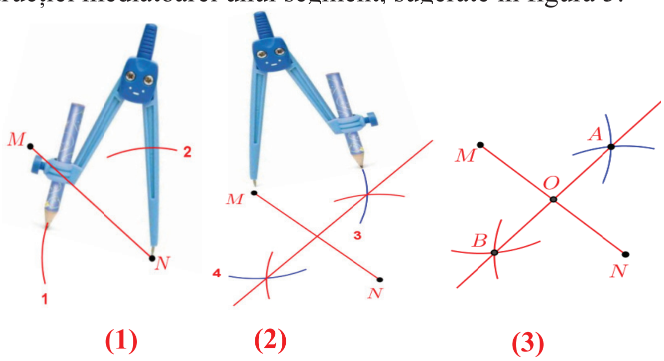


Fig. 5.

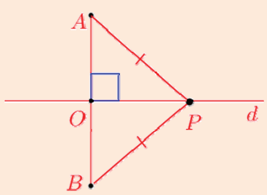
Rezumăm cunoștințele

Mijlocul unui segment *este un punct situat pe segment, egal depărtat de capetele segmentului.*

Mediatoarea unui segment *este dreapta care trece prin mijlocul segmentului și este perpendiculară pe acesta.*

Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele acestuia.

Reciproc: ***Dacă un punct este egal depărtat de capetele unui segment, atunci el se află pe mediatoarea segmentului***



$\left.\begin{array}{l} O \text{ mijlocul segmentului } AB \\ O \in AB \text{ și } d \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow d$ este mediatoarea lui AB $\leftarrow$ *definiția mediatoarei*

$\left.\begin{array}{l} d \text{ mediatoarea lui } AB \\ P \in d \end{array}\right\} \Rightarrow PA = PB$ $\leftarrow$ *Punctul P, fiind pe mediatoarea lui AB, este egal depărtat de A și B (proprietatea punctelor mediatoarei)*

$\left.\begin{array}{l} d \text{ mediatoarea lui } AB \\ O \in d \cap AB \end{array}\right\} \Rightarrow O$ mijlocul lui AB

Rezolvăm și descoperim

4. Simetria față de o dreaptă este întâlnită la tot pasul în jurul nostru. De exemplu, există câte o dreaptă care este *axă de simetrie* pentru fiecare din corpurile de mai jos: o frunză, un avion și o cadă de colț, pentru baie (figura 6).

Fig. 6

Simetria joacă un rol important în activitatea oamenilor, cum ar fi, de exemplu, în desenul tehnic, fără de care fabricarea corpurilor respective ar fi imposibilă. În figura 7, este prezentat desenul tehnic al unor secțiuni printr-o piesă. De asemenea, este prezentat un desen tehnic cu vedere din față a unei biserici.

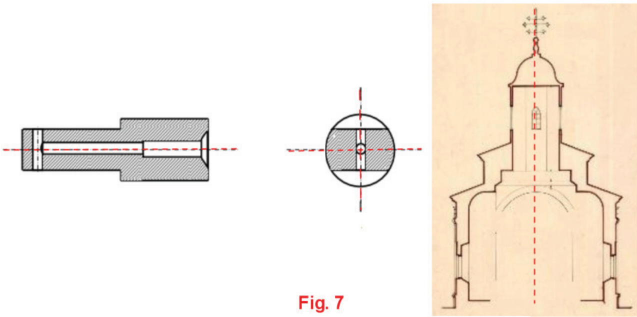


Fig. 7

Figura 8 ilustrează o secțiune prin cada de baie. Ea ne permite să definim *simetria unui punct față de o dreaptă*:

Un punct A' este simetricul unui punct A, față de o dreaptă d, dacă dreapta d este mediatoarea segmentului AA'. Se mai spune că punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d.

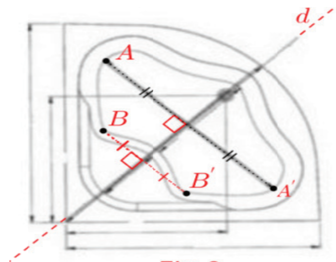


Fig. 8

Observați figura 8. Conform notațiilor utilizate, a semnificațiilor lor și a termenilor folosiți rezultă:

- punctul A' este simetricul punctului A față de dreapta d;
- punctul B' este simetricul punctului B față de dreapta d.

În problema care urmează, vom folosi notațiile utilizate la mulțimi.

a) Despre figura 9 se știe că: $P \notin d$, $A \in d$, $B \in d$;

$arc\ 1 \cap arc\ 2 = \{P, P'\}$. Demonstrați că P' este simetricul punctului P față de dreapta d.

b) Figura 9 sugerează construcția simetricului unui punct P față de o dreaptă d. Descrieți construcția în câteva propoziții.

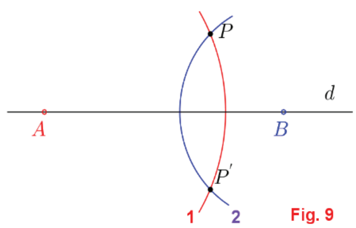


Fig. 9

5. Desenați o dreaptă oarecare d și punctele coliniare A, B și C, apoi desenați simeticele lor față de dreapta d și notați-le cu A', B' și C'. Verificați cu rigla că punctele A', B' și C' sunt, de asemenea, coliniare.

6. a) *Simetricul unui segment AB față de o dreaptă d* este segmentul $A'B'$, unde A' este simetricul lu A față de dreapta d și B' este simetricul lu B față de dreapta d (vezi figura 10). Se mai spune că *segmentele AB și $A'B'$ sunt simetrice față de dreapta d.* Verificați, cu compasul, că segmentele AB și $A'B'$ au aceeași lungime.

b) Desenați în caietul vostru o dreaptă d și un segment AB oarecare. Construiți simetricul segmentului AB, față de dreapta d. Notați segmentul rezultat cu $A'B'$ și verificați, cu compasul, că AB *și* $A'B'$ au aceeași măsură.

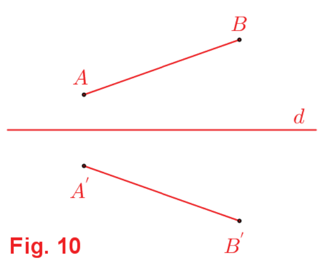


Fig. 10

7. a) *Simetricul unui unghi ABC, oarecare, față de o dreaptă d,* este unghiul $A'B'C'$, unde: A' este simetricul lu A față de dreapta *d*; B' este simetricul lu B față de dreapta *d* și C' este simetricul lui C față de dreapta *d* (vezi figura 11). Se mai spune că *unghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt simetrice față de dreapta d.* Verificați, cu raportorul, că unghiurile ABC și $A'B'C'$ au aceeași lungime.

b) Desenați în caietul vostru o dreaptă *d* și un unghi ABC cu măsura egală cu 175°. Construiți simetricul unghiului ABC față de dreapta *d.* Notați unghiul rezultat cu $A'B'C'$ și verificați cu raportorul că unghiurile ABC și $A'B'C'$ au aceeași măsură.

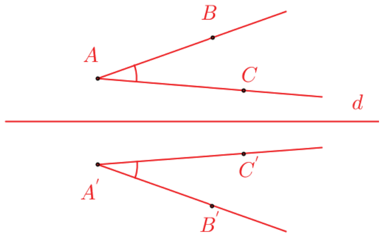


Fig. 11

Problemele 5, 6 și 7 justifică, intuitiv, următoarele propietăți ale simetriei față de o dreaptă:
- *conservă coliniaritatea* (dacă trei puncte sunt coliniare, atunci simetricele lor față de o dreaptă sunt, de asemenea, coliniare);
- *conservă lungimile* (dacă două segmente sunt simetrice față de o dreaptă, atunci lungimile lor sunt egale);
- *conservă măsurile unghiurilor* (dacă două unghiuri sunt simetrice față de o dreaptă, atunci măsurile lor sunt egale).

Rezumăm cunoștințele

Două puncte sunt simetrice față de o dreaptă, dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.

Proprietățile simetriei față de o dreaptă:

1) conservă coliniaritatea (dacă trei puncte sunt coliniare, atunci simetricele lor față de o dreaptă sunt de asemenea coliniare;

2) conservă lungimile (dacă două segmente sunt simetrice față de o dreaptă, atunci lungimile lor sunt egale);

3) conservă măsurile unghiurilor (dacă două unghiuri sunt simetrice față de o dreaptă, atunci măsurile lor sunt egale).

Aplicăm cunoștințele

8. *O metodă practică pentru a construi o figură care să aibă axă de simetrie*

a) Pe o foaie hârtie, observând figura 10 și explicațiile care o însoțesc, construiți două puncte P și P' simetrice față de o dreaptă *d*.

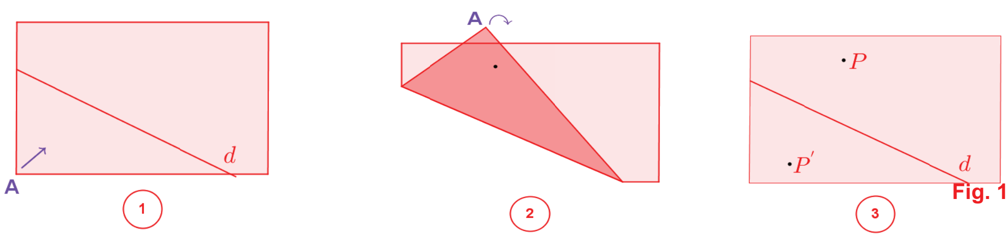


Fig. 10

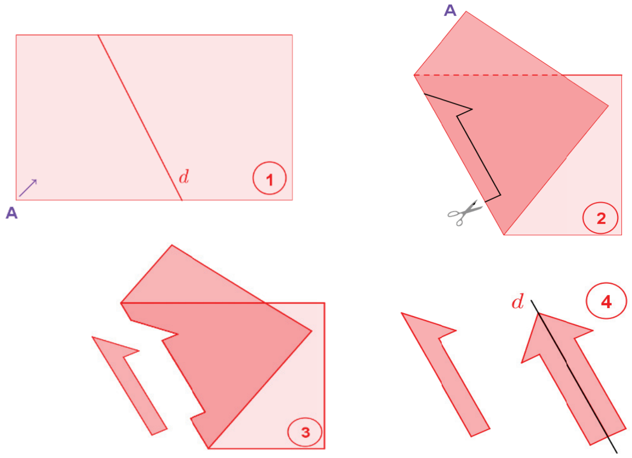
Desenați o dreapta *d* pe o foaie de hârtie.
Folosind o riglă, din colțul **A** pliați foaia de hârtie de-a lungul dreptei *d*

Cu vârful unui pix apăsați suficient de tare un punct pe suprafața triunghiulară.
Din colțul **A**, readuceți hârtia la forma plană inițială.

Căutați cele două urme ale vârfului de pix și desenați pe locul acestora punctele P și P'.

b) Pe foaia de hârtie prelucrată mai sus, desenați dreapta PP'. Folosind echerul și compasul, verificați că punctele P și P' sunt simetrice față de dreapta *d.*

c) Dintr-o foaie de hârtie, confecționați un indicator pentru semnalizarea unei direcții de evacuare. Pentru aceasta, observați cu atenție etapele (1), (2), (3), (4) din figura 11. Linia frântă *ABCDE* trebuie desenată respectând paralelismul și perpendicularitatea.
Decuparea va începe în A și se termină în E.



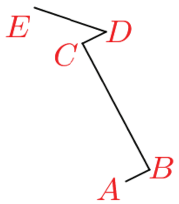


Fig. 11

Important

Observați că, din punct de vedere practic, *două figuri sunt simetrice față de o dreaptă (numită axă de simetrie) dacă prin suprapunere coincid.*
De exemplu, cele două jumătăți ale indicatorului confecționat mai sus, prin suprapunere, coincid fapt care rezultă chiar din modul de confecționare. Aceeași constatare este valabilă și pentru indicatorul din comerț (figura 12)
Există figuri cu o singură axă de simetrie, cu două axe de simetrie, cu trei și mai multe axe de simetrie.

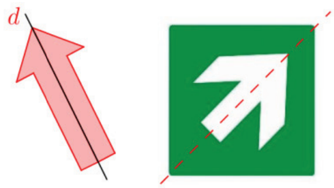


Fig. 12

9. Triunghiul ABC din figura 13 are ca axă de simetrie, dreapta AA_1.
Demonstrați că:
a) triungiul are două laturi congruente și două unghiuri congruente.
b) AA_1 este înălțime a triunghiului.
c) AA_1 este bisectoarea unghiului BAC.

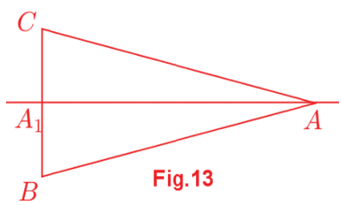


Fig.13

Important

10. Triunghiul ABC din figura 14 are două axe de simetrie: una este dreapta AA_1 și alta este dreapta BB_1. Folosind rezultatele de la problema 9, demonstrați că:
a) triungiul are laturile congruente și unghiurile congruente.
b) AA_1 și BB_1 sunt înălțimi ale triungiului.
c) AA_1 și BB_1 sunt bisectoarele unghiurilor BAC, respectiv ABC.

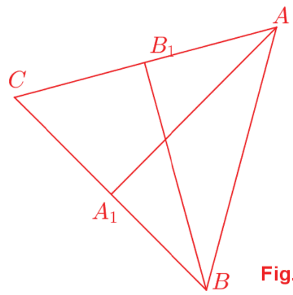


Fig.14

Triunghiul cu două laturi congruente este un *triunghi isoscel*.
Triunghiul cu toate laturile congruente este un *triunghi echilateral*.

Ne verificăm

1. 1) Mihai are dreptate. Punctul O este egal depărtat de capetele segmentului AB, adică $OA = OB$, OA și OB fiind raze ale cercului. Pe de altă parte, punctul O este pe segmentul AB. Punctul O fiind pe segmentul AB și egal depărtat de capetele segmentului, el este mijlocul segmentului AB. Sonia nu are dreptate. Punctul O este egal depărtat de capetele segmentului AB (sunt raze ale arcului de cerc cu centrul O), dar nu se află pe segmentul AB. Deci punctul O nu este mijlocul segmentului AB.

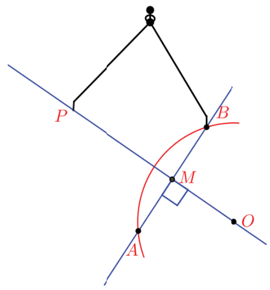


Fig. R1

2) Pentru verificarea afirmațiilor Elenei procedăm în felul următor (figura R1):
- luăm un punct P oarecare pe OM;
- cu vârful compasului în B, dăm deschiderii compasului o lungime egală cu lungimea segmentului BP;
- fără să modificăm lungimea deschiderii compasului, mutăm vârful compasului în punctul A și constatăm că lungimea segmentului AP este egală cu lungimea deschiderii compasului, adică $AP = BP$. La fel se arată că $BM = BA$.

a) *Demonstrație*: Notăm cu O intersecția dreptei d cu dreapta ST. Atunci punctul O se află și pe dreapta d și pe dreapta ST.

(1) Deoarece O se află pe dreapta d, din enunț el este egal depărtat de capetele segmentului, deci $OS = OR$. (2) Deoarece O se află pe dreapta ST și $OS = OT$ rezultă că O se află pe segmentul ST. (3) Fiind pe segmentul ST și egal depărtat de capetele segmentului, punctul O este mijlocul acestuia. Prin urmare, dreapta d este perpendiculară pe segmentul ST și trece prin mijlocul acestuia, deci este mediatoarea segmentului ST.

b) *Justificare*: Notăm cu D intersecția dreptei a cu dreapta BC și luăm un punct D oarecare pe dreapta a. Atunci punctul D se află și pe dreapta a și pe dreapta BC.

(1) Ca la subpunctul precedent, *demonstrăm* că D este mijlocul segmentului BC.

(2) Luăm un punct oarecare E pe dreapta a. Din enunț, $EB = EC$. Deoarece prin două puncte trece o dreaptă și numai una, dreapta a este dreapta DE. *Justificăm,* folosind un echer, că unghiul CED este drept. Rezultă $a \perp EC$. Prin urmare, dreapta a este perpendiculară pe segmentul BC și trece prin mijlocul acestuia, deci este mediatoarea segmentului BC.

Activități de învățare

1. Desenați un segment MN cu lungimea de 4 cm și reprezentați mijlocul P al acestuia. Construiți dreapta d, perpendiculară, în punctul P, pe dreapta MN. Completați spațiile libere din enunțul următor, pentru a descrie, în termeni matematici potriviți, desenul realizat: *Dreapta d este ……… segmentului … .*
2. Desenați un segment AB și un punct C, în interiorul său.
   a) Construiți d_1 și d_2, mediatoarele segmentelor AC, respective CB.
   b) Demonstrați că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
3. Desenați punctele necoliniare A, B, C.
   a) Construiți dreptele d_3 și d_4, mediatoarele segmentelor AB și BC.
   b) Demonstrați că dreptele d_3 și d_4 sunt concurente.
4. Desenați segmentul AB cu lungimea de 8 cm.
   a) Construiți dreapta d, mediatoarea segmentului și reprezentați pe aceasta, punctele distincte M și N.
   b) Măsurați cu rigla lungimile segmentelor MA și MB.

c) Măsurați cu rigla lungimile segmentelor NA și NB.

d) Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $>, =, <$, pentru a obține propoziții adevărate: $MA \ldots MB$ și $NA \ldots NB$.

5. Reprezentați o dreaptă d și un punct $M \notin d$.

a) Construiți M', simetricul punctului M față de dreapta d.

b) Completați spațiile libere cu termeni matematici corespunzători, pentru a obține afirmații adevărate.

b.1) Dreapta d este .... segmentului MM'.

b.2) Punctul M este .... punctului M' față de dreapta d.

6. Dreapta a intersectează segmentul AA' în punctul O și $AO \equiv OA'$. Scrieți, în caseta de mai jos, încă o condiție pentru ca punctele A și A' să fie simetrice față de dreapta a.

$d \cap AA' = \{O\}$, $AO \equiv OA'$ și ....

7. Dreapta b intersectează segmentul BB' în punctul O și este perpendiculară pe BB'. Scrieți, în caseta de mai jos, încă o condiție pentru ca punctele B și B' să fie simetrice față de dreapta b.

$d \cap BB' = \{O\}$, $d \perp BB'$ și ....

8. Se consideră dreapta c și punctele $C \in c$ și $M \notin c$. Reprezentați punctul M', simetricul punctului M față de dreapta c. Completați spațiile libere cu termeni matematici potriviți, pentru a obține enunțuri adevărate.

a) Dreapta c este …. segmentului MM'. b) Segmentele CM și CM' sunt .

9. Se consideră dreapta d și punctele A, B de aceeași parte a dreptei d, $AB \not\parallel d$.

a) Reprezentați simetricele punctelor A, respective B față de dreapta d;

b) Demonstrați că $AA' \parallel BB'$. c) Demonstrați că dreptele $AB, A'B'$ și d sunt concurente.

5.15. Cerc. Definiţie. Construcţie. Elemente în cerc

Ne amintim

1. a) Folosind o riglă gradată, desenați:

- un punct O și un segment MN cu o lungime dată, de exemplu $MN = 2$ um (unități de măsură);
- un punct A, situat la distanța, 2 um față de punctul O.
- trei perechi de puncte, astfel încât fiecare punct al unei perechi să fie la distanța de 2 um față de punctul O.

b) Câte dintre punctele desenate sunt la distanța de 2 um față de punctul O?

c) Câte puncte ați putea desena, astfel încât toate să fie la distanța de 2 um față de O?

Rezolvare. a) Desenul din figura 1 respectă cerințele enunțului.

b) Sunt desenate șapte puncte, fiecare punct fiind la distanța de 2 um față de punctul O.

c) Se pot desena o infinitate de puncte, fiecare la distanța de 2 um față de punctul O.

Observați figura 2!

c) Se pot desena o infinitate de puncte, fiecare la distanța de 2 um față de punctul O. Observați figura 2!

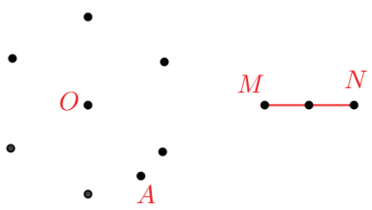


Fig.1

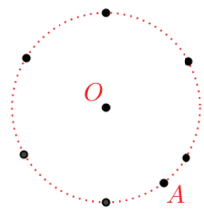


Fig.2

Reținem

Cercul este mulțimea tuturor punctelor, aflate la o distanță dată, față de un punctul dat.
Centrul cercului este punctul dat.
Raza cercului este distanța dată.

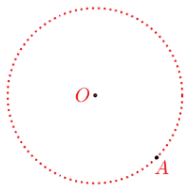


Fig.3

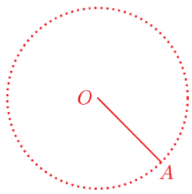


Fig.4

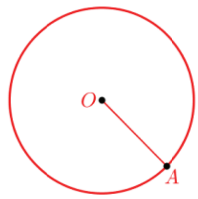


Fig.5

Ne referim la cercul din figura 5, folosind notația C (O; r). Aceasta precizează elementele definitorii ale cercului (*centrul O* și *raza r*). Notația C (O; r) se citește: *cercul C de centru O și rază r*.
Dacă A este un punct oarecare pe cerc, atunci $OA = r$. Din acest motiv, despre segmentul OA, se spune că este *rază* a cercului.

2. În figura 6.1, este desenată o dreaptă d, care trece prin centrul unui cerc $C(O;1{,}8 \text{ cm})$. Aceasta intersectează cercul în două puncte A și B. Punctele P și Q sunt două puncte oarecare ale cercului.

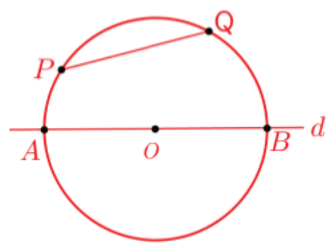


Fig. 6.1

a) Pentru a afla lungimea razei cercului este nevoie să o măsurăm? Care este lungimea razei cercului?
b) Câte segmente determină cele cinci puncte A, B, O, P și Q din figură? Numiți segmentele care sunt raze ale cercului și precizați lungimea fiecăruia.
c) Orice două puncte ale unui cerc determină un segment numit *coardă* a cercului. Numiți toate coardele determinate de cele cinci puncte A, B, O, P și Q, din figura 6.1.
d) O coardă care conține centrul cercului, sau lungimea corzii care conține centrul cercului, se numește *diametrul cercului*. Numiți un diametru al cercului din figura 6.1 și aflați lungimea acestuia.
e) Despre punctele unui cerc, care sunt capetele diametrului, se spune că sunt puncte *diametral opuse*. Numiți punctele diametral opuse ale cercului din figura 6.1.
f) Sonia face două afirmații:
(1) *Orice dreaptă care trece prin centrul cecului, intersectează cercul în două puncte diametral opuse.*
(2) *Diametrul unui cerc este segmentul determinat de două puncte diametral opuse*.
Sunt adevărate afirmațiile Soniei? Justificați răspunsul!

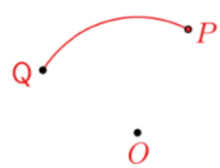


Fig. 6.2

g) Alexandra șterge o parte din figura 6.1. și rezultă figura 6.2.
Cum se numește figura geometrică rezultată? Alegeți varianta de răspuns potrivită:

1) *arc de cerc*; 2) *arc de cerc cu centrul în O*.

h) Mihai șterge și el o parte din figura desenată inițial și rezultă figura 6.3. Cum se numește figura geometrică rezultată? Alegeți varianta de răspuns potrivită:

1) *arc mare de cerc*; 2) *arc mare de cerc cu centrul în O*.

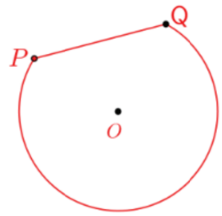


Fig. 6.3

i) Pe baza desenelor obținute de Alexandra și Mihai, Sonia constată că cele două puncte P și Q, ale cercului din figura 6.1, determină două arce de cerc: un *arc mic de cerc* și un *arc mare de cerc.* Dar este nedumerită: arcele determinate de punctele A și B par la fel. O puteți ajuta pe Sonia, spunându-i următoarele:
Dreapta determinată de orice două puncte diametral opuse ale unui cerc este axă de simetrie a cercului. Cele două figuri simetrice față de axa de simetrie a cercului se numesc semicercuri.
Referiți-vă la semicercul din fig. 6.1 care conține punctele P și Q, numindu-l cu trei litere: semicercul $A \ldots B$.

Rezumăm cunoștințele

Cercul de centru O și de rază r este mulțimea tuturor punctelor planului, situate la distanța r față de punctul O și se notează cu C (O; r)
Elementele unui cerc sunt: ***centrul, raza, coarda, diametrul, punctele diametral opuse și semicercurile.***

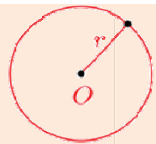


Fig. 7

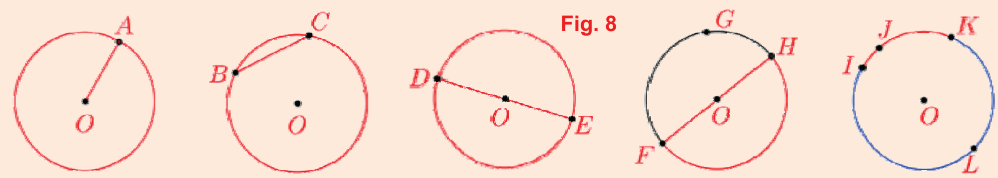


Fig. 8

raza OA *coarda BC* *diametrul DE* *semicerc FGH* *arc mic IJK* *arc mare ILK*

Într-un cerc:
o ***rază*** *este segmentul determinat de centrul cercului și un punct de pe cerc sau lungimea segmentului determinat de centrul cercului și un punct de pe cerc;*
o ***coardă*** *este segmentul determinat de două puncte ale cercului;*
un ***diametru*** *este o coardă care trece prin centrul cercului sau dublul lungimii razei cercului;*
puncte diametral opuse *sunt capetele unui diametru;*
centrul cercului *este mijlocul oricărui diametru;*
orice dreaptă determinată de un diametru este ***axă de simetrie a cercului****.*
Un ***arc de cerc*** *este o porțiune a cercului cuprinsă între două puncte ale cercului.*
Un ***semicerc*** *este un arc de cerc cuprins între două puncte diametral opuse.*
Două puncte ale unui cerc determină o pereche de arce de cerc (două semicercuri sau un arc mic de cerc și un arc mare de cerc).

Aplicăm cunoștințele

3. 1) Desenați:
a) un segment MN cu lungimea de 2,8 cm și punctul O, mijlocul acestuia.
b) cercul cu centrul O și de rază OM;

c) cercul cu centrul N și de rază OM;

d) Desenați un semicerc cu centrul M și de rază MN.

2) Se notează cu A punctul de pe semicerc, diametral opus lui N și cu B punctul de pe cercul $C(N;OM)$, diametral opus punctului O. Calculați AB.

4. Costin face următoarea afirmație:

În orice cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei.

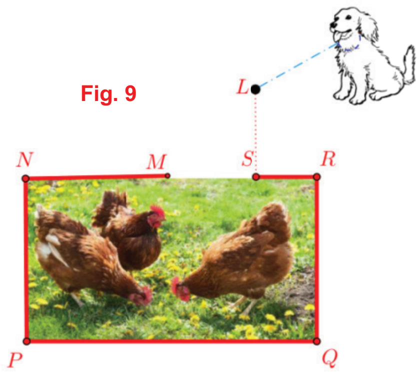
a) Construiți un desen care să ilustreze această afirmație.

b) Lângă desen scrieți ipoteza și concluzia afirmației.

c) Demonstrați că afirmația lui Costin este adevărată.

5. Un fermier dispune de o un teren în formă de dreptunghi, împrejmuit cu un gard. Pe terenul respectiv, reprezentat sugestiv în figura 9, fermierul crește păsări. Pentru paza lor, fermierul hotărăște să folosească un câine dresat și fixează lesa câinelui de sol, într-un punct L. Lesa, astfel fixată, îi permite câinelui să se deplaseze împrejurul punctului L pe o distanță de cel mult 4 metri, cât este deschiderea MS pe unde pot ieși păsările și cât este distanța de la punctul L la dreapta determinată de latura MR a gardului. Fermierul crede că în acest fel nicio pasăre nu poate părăsi terenul deoarece câinele va ajunge la ea și o va întoarce din drum. Are fermierul dreptate? Justificați răspunsul, folosind cunoștințele despre cerc.

Fig. 9



Ne verificăm

2. a) Nu. Notația $C(O;1{,}8\text{ cm})$ precizează lungimea razei: r = 1,8 cm.

b) Cele cinci puncte A, B, O, P și Q, din figură, determină 10 segmente: punctul A determină, cu fiecare dintre punctele B, O, P și Q, un număr de 4 segmente, apoi O determină, cu fiecare dintre punctele O, P și Q, un număr de 3 segmente etc., în total 4 + 3 + 2+1= 10. Patru dintre acestea, sunt raze : OA, OB, OP și OQ. Fiecare are lungimea $1{,}8\,cm$. c) punctele de pe cerc sunt: A, B, P și Q. Ele determină 3 + 2 + 1 = 6 coarde: AB, AP, AQ, BP, BQ și QP. d) Coarda care conține centrul cercului este AB. Deci un diametru al cercului este segmentul AB. Se observă că AB este dublul razei cercului: $AB = OA + OB$ = r + r = 2r. Rezultă AB = 3,6 cm. e) Punctele diametral opuse ale cercului din figură sunt A și B. f) Afirmațiile Soniei sunt adevărate. Justificarea este următoarea:

(1) Conform enunțului, punctele sunt pe cerc, deci determină o coardă. De asemenea, conform enunțului, coarda conține centrul cercului. Prin urmare, coarda respectivă este un diametru, așa încât capetele ei sunt puncte diametral opuse.

(2) Cele două puncte, fiind diametral opuse, sunt pe cerc, iar coarda determinată de ele conține centrul cercului, deci coarda respectivă este un diametru.

g) 2) arc de cerc cu centrul în O. h) 2) arc mare de cerc cu centrul în O.

i) semicercul APB sau semicercul AQB.

3. Pentru desene, observați figura R1. Folosim raționamentul pentru a afla lungimea segmentului AB, știut fiind că la măsurare, pot apărea erori datorate unor cauze multiple, cum ar fi, imperfecțiunea desenului, imprecizia instrumentelor de măsură etc.

Punctul B este un punct al cercului cu centrul N și raza OM, deci $NB = OM = \dfrac{MN}{2} \Rightarrow NB$ = 1,4 cm.

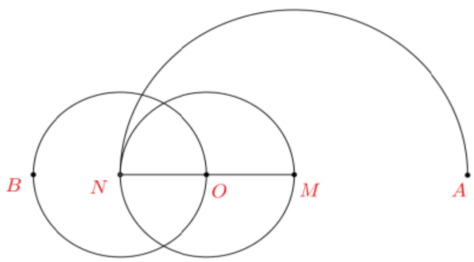
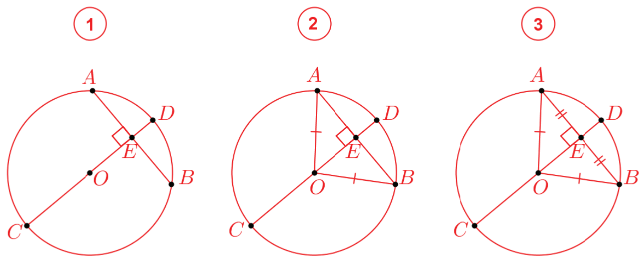


Fig. R1

Punctul A este un punct al semicercului cu centrul M și raza MN, deci $MA = MN = 2{,}8$ cm. Rezultă: $AB = AM + MN + NB = (2{,}8 + 2{,}8 + 1{,}4)$ cm $= 7$ cm.

4. a) Desenul care ilustrează afirmația lui Costin este cel din figura R2.1, unde a desenat: un cerc, o coardă AB, un diametru CD, perpendicular pe coardă și a pus în evidență punctul E, în care diametrul intersectează coarda.



b) *Ipoteza*: O este centrul cercului, AB este coardă, CD este diametru, $CD \perp AB$, $O \in CD$, $CD \cap AB = \{E\}$.

Concluzia: E este mijlocul coardei AB.

Demonstrația rezultă cu ușurință dacă se observă cu atenție figurile R2.2 și R.2.3, unde sunt puse în evidență perechi de segmente congruente, care rezultă succesiv în urma argumentelor logice.

Demonstrație: (1) $OA = OB$ (raze ale cercului); (2) Punctul O, fiind egal depărtat de capetele segmentului AB, aparține mediatoarei d, a segmentului AB;

(3) $d \perp AB$ (mediatoarea este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acesteia);

(4) $CD \perp AB$ și $O \in CD$ (din ipoteză); (5) d coincide cu CD (altfel, din punctul O există două perpendiculare pe AB – dreptele d și CD – ceea ce nu este posibil). Prin urmare, CD este mediatoarea segmentului AB, deci intersectează AB în mijlocul acestuia. Rezultă *E este mijlocul coardei AB.*

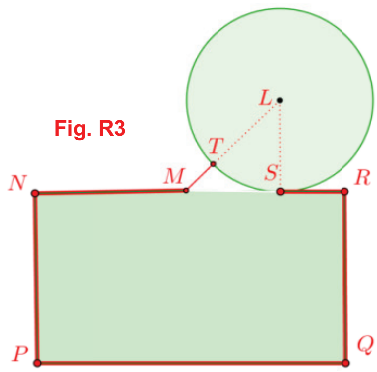


Fig. R3

5. Reprezentăm cercul cu centrul în L și de rază LS, $LS = 4$ m, curtea și deschiderea $MS = 4$ m pe unde pot ieși păsările (figura R3). Cercul și interiorul cercului reprezintă spațiul de mișcare pe care îl are câinele. Se observă că păsările pot ieși prin deschiderea MS, deoarece câinele nu poate ajunge la ele.

Activități de învățare

1. Punctul O este interior segmentului $PQ = 6$ cm și $OP = 2$ cm. Desenați, folosind instrumentele geometrice:

a) cercul de centru P și rază $r_1 = PO$ și cercul de centru Q și rază $r_2 = QO$;

b) semidreapta OP și punctul A în care aceasta intersectează cercul cu centrul P;

c) semidreapta OQ și punctul B în care aceasta intersectează cercul cu centrul Q.

Calculați lungimile segmentelor PB, QA, AB.

2. Pe cercul de centru O și rază $8\,\text{cm}$, se consideră punctele A și B astfel încât $O \notin AB$.

Scrieți în casetă (A), dacă afirmația este adevărată și (F), dacă afirmația este falsă:

a) $AB < 16\,\text{cm}$ ☐; b) $AB = 16\,\text{cm}$ ☐; c) $AB > 16\,\text{cm}$ ☐ .

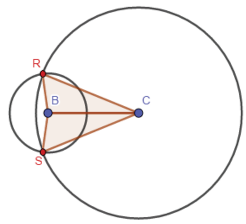
3. Pe cercul de centru O și rază r, se consideră punctele C și D astfel încât $O \in CD$.

Măsurați cu rigla gradată lungimile segmentelor OC, OD și CD;

Scrieți în casetă (A), dacă afirmația este adevărată și (F), dacă afirmația este falsă:

a) $CD < 2 \cdot r$ ☐; b) $CD = 2 \cdot r$ ☐; c) $CD > 2 \cdot r$ ☐ .

4. În figura alăturată segmental BC are lungimea de 7 cm. Cercul de centru B și rază 3 cm și cercul de centru C și rază 8 cm se intersectează în punctele R și S.
a) Realizați desenul pe caiet, folosind instrumentele geometrice
b) Calculați perimetrele triunghiurilor BCR și BCS.



5.16. Unghi la centru. Măsuri

Rezolvăm și descoperim

a) Observați figura 1, unde este desenat un cerc de centru O și un unghi care are vârful în centrul cercului, iar laturile lui intersectează cercul în două puncte. Un astfel de unghi este numit *unghi la centru.* Numiți unghiul, vârful unghiului și punctele de intersecție ale laturilor unghiului cu cercul.

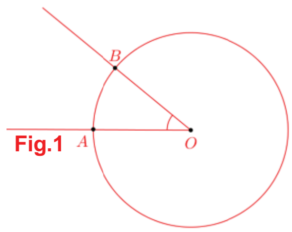


Fig.1

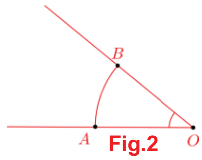


Fig.2

b) Alexandra șterge o parte din figura 1 și obține figura 2. Ea constată că unghiul la centru AOB, cuprinde între laturile lui arcul de cerc AB. Acesta se numește *arc de cerc determinat de unghiul la centru.* Măsurând cu raportorul, Alexandra află măsura unghiului AOB (figura 3). Mihai știe că măsura unui arc determinat de un unghi la centru este egală cu măsura unghiului la centru.În acest caz, care este măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$?

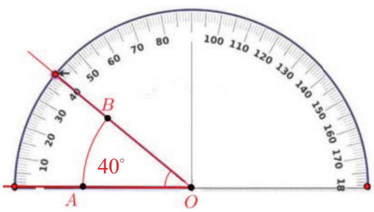


Fig. 3

c) În figura 4 este desenat un unghi alungit MON și un semicerc $\overset{\frown}{AB}$ cu centrul în O, care este determinat de intersecția laturilor unghiului MON cu cercul. Explicați de ce unghiul MON este unghi la centru și justificați că măsura semicercului $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu 180° (se scrie $\overset{\frown}{AB} = 180°$). Justificați că măsura unui semicerc este egală cu 180°. Deduceți că măsura cercului este egală cu 360°.

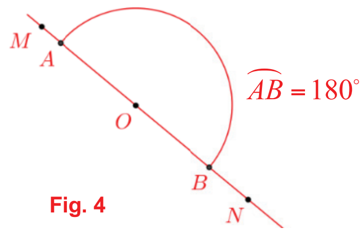


Fig. 4

2. Ne amintim următoarele: orice unghi are măsura între 0° și 180°; măsura unui unghi nul este egală cu 0°; măsura unui unghi alungit este egală cu 180°. Desenați un cerc de centru O. Pe acest cerc, desenați: un arc $\overset{\frown}{AB}$ cu măsura egală cu 105°; un punct M care aparține arcului $\overset{\frown}{AB}$ și un alt punct N al cercului care nu aparține arcului $\overset{\frown}{AB}$. Coarda AB determină două arce de cerc: un arc mic și un arc mare.
a) Alegeți trei dintre literele desenului și cu ajutorul lor, numiți arcul mic. Procedați la fel și numiți arcul mare.
b) Aflați măsurile celor două arce.

Rezumăm cunoștințele

Unghiul la centru *este unghiul care are vârful în centrul unui cerc.*
Arcul de cerc corespunzător unui unghi la centru este *poziționat* între laturile unghiului.
- Într-un cerc:

măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului corespunzor;
măsura unui semicerc este egală cu 180°, iar măsura unui cerc este egală cu 360°;

un arc mic de cerc are măsura între 0° și 180°;
un arc mare de cerc are măsura mai mare de 180°;
două puncte ale cercului determină două arce de cerc (un arc mic și un arc mare) cu suma măsurilor lor de 360°.

$\sphericalangle AOB$ – unghi la centru; $\overset{\frown}{AMB}$ – arc corespunzător unghiului la centru;

$\overset{\frown}{AMB}$ – arc mic de cerc; $\overset{\frown}{ANB}$ – arc mare de cerc;

$\sphericalangle AOB$ și $\overset{\frown}{AMB}$ – au aceeași măsură $(x°)$; $\overset{\frown}{ANB} + \overset{\frown}{AMB} = 360°$

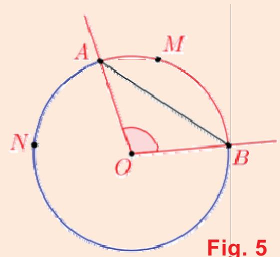


Fig. 5

Aplicăm cunoștințele

3. Unghiul AOB este un unghi la centru și are măsura egală cu 35°, punctele A și B fiind puncte ale unui cerc cu centrul O. Dreapta AO intersectează cercul în punctul A', dreapta BO intersectează cercul în punctul B', iar ordinea punctelor pe cerc, în sensul acelor de ceas este următoarea: B, A, B', A'.

a) Realizați un desen care ilustrează această situație.

b) Pe baza desenului, scrieți ipoteza, concluzia și demonstrați că:

- arcele $\overset{\frown}{BAA'}$ și $\overset{\frown}{B'A'A}$ au măsurile egale;
- arcele $\overset{\frown}{AB'B}$ și $\overset{\frown}{A'BB'}$ au măsurile egale.

4. În figura 6 arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{MN}$ sunt arce ale unor cercuri cu centrul în O. Raportorul din figură vă ajută să calculați măsurile celor două arce. Care sunt măsurile acestor arce?

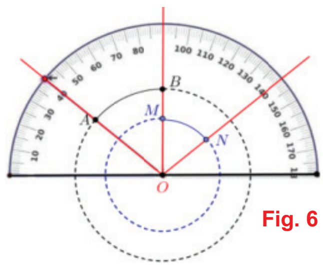


Fig. 6

Ne verificăm

1. a) Unghiul este AOB. Vârful unghiului este punctul O. Punctele de intersecție ale laturilor unghiului cu cercul sunt punctele A și B

b) Măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu 40°.

c) Unghiul MON este unghi la centru deoarece are vârful în centrul cercului și laturile unghiului intersectează cercul în două puncte A și B. Prin urmare, măsura arcului este egală cu măsura unghiului, adică este egală cu 180°, deci măsura semicercului este egală 180°. Deoarece cercul este format din două semicercuri, măsura cercului este egală cu 360°.

2. a) Arcul mic de cerc este $\overset{\frown}{AMB}$, iar arcul mare de cerc este $\overset{\frown}{ANB}$.

b) $\overset{\frown}{AMB} = 105^\circ$ (măsura arcului este egală cu măsura unghiului la centru)

$\overset{\frown}{ANB} = 360^\circ - \overset{\frown}{AMB} = 360^\circ - 105^\circ = 255^\circ$

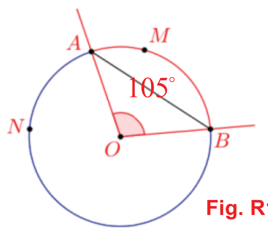


Fig. R1

3. a) Pe un arc de centru O se consideră punctele M, N, P, Q și R, astfel încât $MN \cap PQ = \{0\}$, $\overset{\frown}{MP} = 45°$, iar R este mijlocul arcului $\overset{\frown}{MQ}$. Calculați măsurile arcelor $\overset{\frown}{PN}$, $\overset{\frown}{MR}$, $\overset{\frown}{NR}$.

b) *Ipoteza*:

O centrul unui cerc C;

$C \cap OA = \{A'\}$;

$C \cap OB = \{B'\}$;

$\sphericalangle AOB$ unghi la centru.

$\sphericalangle AOB = 35^\circ$

Concluzia:

$\overset{\frown}{BAA'} = \overset{\frown}{B'A'A}$

$\overset{\frown}{AB'B} = \overset{\frown}{A'BB'}$

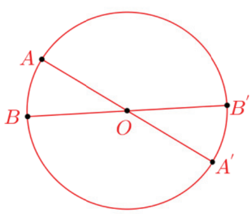


Fig. R2

Demonstrație:

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$ (opuse la vârf)

Rezultă $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{B'A'}$. Atunci:

1) $\overset{\frown}{BAA'} = \overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AA'} = 35^\circ + 180^\circ$;

2) $\overset{\frown}{B'A'A} = \overset{\frown}{B'A'} + \overset{\frown}{A'A} = 35^\circ + 180^\circ$.

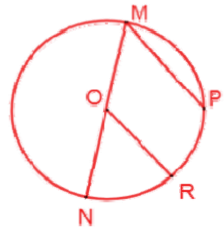
Din 1) și 2) rezultă $\overset{\frown}{BAA'} = \overset{\frown}{B'A'A} = 215^\circ$.

Apoi: $\overset{\frown}{AB'B} = 360° - 35° = 325°$ și

$\overset{\frown}{A'BB'} = 360° - 35° = 325°$.

4. $\overset{\frown}{AB} = 90° - 40° = 50°$; $\overset{\frown}{MN} = 140° - 90° = 50°$

Activități de învățare



1. Aranjatele în sensul acelor de ceasornic, punctele *A, B, C, D* și *E* împart cercul $C(O,r)$ în cinci arce de cerc congruente. Calculați măsura arcelor de cerc *AB*, *AC*, *BCE*.

2. În figura alăturată indicați:

a) un arc mic; b) un arc mare; c) un unghi la centru;
d) un semicerc; e) o coardă care nu este diametru;

f) măsurile arcelor $\overset{\frown}{NR}$ și $\overset{\frown}{NMR}$ știind că măsura unghiului $N\hat{O}R$ este egală cu 60°.

3. Desenați pe un cerc punctele *M, N, P, Q* , astfel încât:

a) măsura arcului *MN* să fie egală cu 45°; b) măsura arcului *MP* să fie egală cu 105°;

c) punctele *M* și *Q* să fie diametral opuse

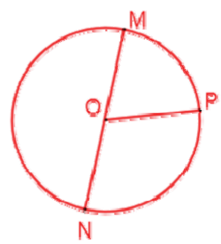
Calculați măsurile arcelor *NP*, *MQ*, *PQ*.

4. Pe cercul de centru *O* și diametru *MN* se consideră punctul *P*, astfel încât $\overset{\frown}{MP} = 150°$. Calculați măsura unghiurilor *MON*, *MOP*, *NOP*.

5. Măsura arcului $\overset{\frown}{DE}$ reprezintă 25% din măsura unui semicerc. Determinați măsura unghiului la centru DOE, unde *O* este centrul cercului

6. Fie *E* și *F* două puncte pe un cerc cu centrul în punctul *O*, astfel încât $\overset{\frown}{EF} = 160°$. Dreapta care conține bisectoarea unghiului *EOF* intersectează cercul în punctele *C* și *D*. Determinați măsurile unghiurilor *DOE* și *EOC*.

7. Punctele *A, B* și *C* sunt situate pe cercul $C(O,r)$ astfel încât *A, O* și *B* să fie coliniare și *CO* să fie perpendiculară pe *AB*. Determinați măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC}$.



8. Se consideră un cerc de centru *O* și rază r și punctele *M, N, P* și *Q* astfel încât *M* și *N* respectiv *P* și *Q* să fie diametral opuse. Știind că măsura unghiului la centru $P\hat{O}M$ este egală cu 60°, calculați măsurile arcelor mici determinate de cele patru puncte de pe cerc.

9. În figura alăturată măsura unghiului $M\hat{O}P$ este egală cu 70°. Determinați măsurile arcelor $\overset{\frown}{MP}, \overset{\frown}{PN}, \overset{\frown}{MN}, \overset{\frown}{MPN}, \overset{\frown}{MNP}$.

10. Calculați ce unghi formează acele orar și minutar ale unui ceas care indică ora 5.00.

5.17. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

Rezolvăm și descoperim

> **Dicționar**
> *poziție* = loc pe care îl ocupă cineva sau ceva (în raport cu altcineva sau cu altceva)

1. Observați figura 1, unde sunt desenate: o dreaptă d, un punct P exterior, piciorul perpendicularei din P pe dreapta d, notat cu A și un punct B pe dreapta d.

a) Desenați în caiet o figură asemănătoare, care să respecte informațiile despre figura 1. Completați desenul cu cercul cu centrul în P și de rază PA.

b) Observați că dreapta PA este perpendiculară pe dreapta d, iar dreapta PB este oblică față dreapta d. Folosind desenul deduceți intuitiv că $PA<PB$. Uzual, se spune că „*perpendiculara este mai scurtă decât oblica*”.

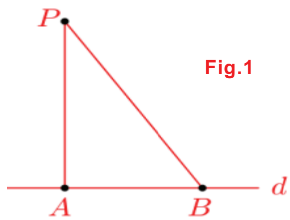


Fig.1

2. 1) Se consideră un cerc și un punct oarecare. Expresiile *punct interior cercului*, *punct pe cerc* sau *punct exterior cercului* descriu *poziția unui punct față de un cerc*. În figura 2 sunt desenate: un cerc C de centru O, puncte pe cerc, puncte exterioare cercului și puncte interioare cercului.

a) numiți punctele interioare cercului;
b) numiți punctele care aparțin cercului;
c) numiți punctele exterioare cercului.

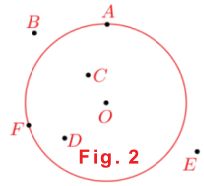


Fig. 2

2) Se consideră un punct P oarecare și un cerc C de centru O și rază r (figura 3). Comparați distanța OP cu raza cercului dacă:

a) punctul este interior cercului (figura 3.1);
b) punctul este pe cerc (figura 3.2);
c) punctul este exterior cercului (figura 3.3).

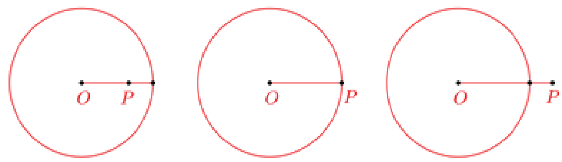


Fig. 3.1 Fig. 3.2 Fig. 3.3

Reținem

1) *Un punct este interior unui cerc, dacă distanța de la punct la centrul cercului este mai mică decât raza cercului.*
2) *Un punct aparține unui cerc (este pe cerc), dacă distanța de la punct la centrul cercului este egală cu raza cercului.*
3) *Un punct este exterior unui cerc, dacă distanța de la punct la centrul cercului este mai mare decât raza cercului.*

Aplicăm cunoștințele

Dovedește empiric, că o dreaptă d poate avea în comun cu un cerc:
a) două puncte (figura 4.1);
b) un punct (figura 4.2);
c) niciun punct (figura 4.3).

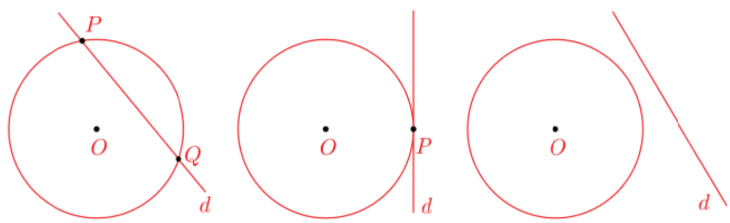


Fig. 4.1 Fig. 4.2 Fig. 4.3

Reținem

Poate avea o dreaptă trei puncte comune cu un cerc? Demonstrați!
1) *O dreaptă care are două puncte comune cu un cerc se numește dreaptă secantă cercului.*
2) *O dreaptă care are un singur punct comun cu un cerc se numește dreaptă tangentă cercului.*

3) *O dreaptă care nu are puncte comune cu un cerc se numește dreaptă exterioară cercului.*

Aplicăm cunoștințele

Admitem fără demonstrație următoarea afirmație: „*Prin trei puncte necoliniare trece un cerc și numai unul*”. Bazându-vă pe această afirmație, demonstrați că: „*Două cercuri pot avea cel mult două puncte comune*”.

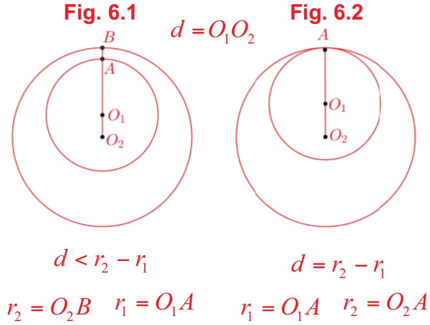
Reținem

1) *Două cercuri care au două puncte comune se numesc cercuri secante.*
2) *Două cercuri care au un singur punct comun se numește cercuri tangente.*

3. Se consideră două puncte O_1 și O_2 astfel încât distanța între cele două puncte să fie egală cu d (figura 6). Desenați două cercuri: un cerc cu centul în O_1 și raza r_1 și un alt cerc cu centul în O_2 și raza r_2 știind că:

1) $d = 1$ cm, $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 4$ cm (figura 6.1);
2) $d = 1{,}5$ cm, $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 4$ cm (figura 6.2);
3) $d = 3{,}5$ cm, $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 4$ cm (figura 6.3);
4) $d = 6{,}5$ cm, $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 4$ cm (fig.6.4);
5) $d = 7$ cm, $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 4$ cm (figura 6.5).

Fig. 6.1 Fig. 6.2

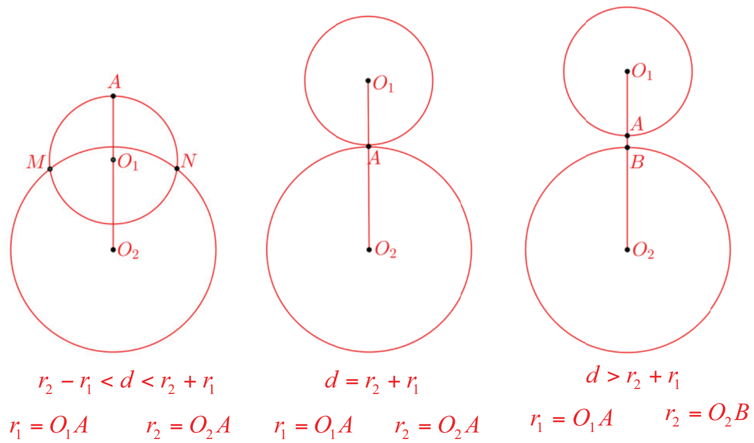


4. Demonstrați următoarele afirmații:

a) Dacă o dreaptă are două puncte comune cu două cercuri, atunci dreapta determinată de centrele celor două cercuri este mediatoarea segmentului determinat de punctele comune celor două cercuri.

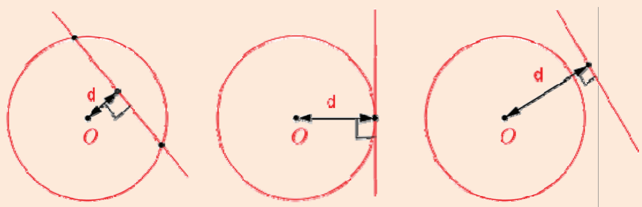
b) Dacă două cercuri au un singur punct comun, atunci punctul comun și centrele celor două cercuri, sunt puncte colinare.

Fig. 6.3 Fig. 6.4 Fig. 6.5



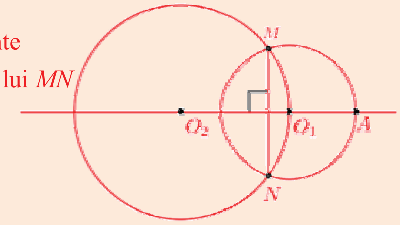
Rezumăm cunoștințele

Dreapta secantă *unui cerc este o dreaptă care are două puncte comune cu un cerc.*
Dreapta tangentă *unui cerc este o dreaptă care are un singur punct comun cu cercul.*
Dreapta exterioară *unui cerc este o dreaptă care nu are puncte comune cu cercul*



***Cercuri secante** sunt două cercuri care au două puncte comune. Dacă distanța dintre centrele a două cercuri este mai mare decât diferența razelor și mai mică decât suma razelor, atunci cercurile sunt secante. Dreapta, determinată de centrele celor două cercuri secante, este mediatoarea segmentului, determinat de punctele de intersecție ale celor două cercuri.*

$r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{cercuri secante} \\ O_1O_2 \text{ mediatoarea lui } MN \end{cases}$



notații:

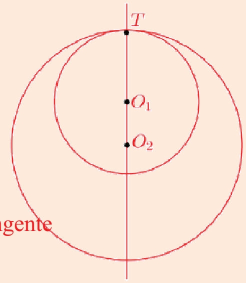
$O_1A = r_1,\ O_2O_1 = r_2,\ O_2O_1 = d$

***Cercuri tangente** sunt două cercuri care au un singur punct comun. Punctul comun se numește punct de tangență.*

*Dacă distanța dintre centrele a două cercuri este egală cu diferența razelor, atunci cercurile sunt **cercuri tangente interioare.***

*Dacă distanța dintre centrele a două cercuri este egală cu suma razelor, atunci cercurile sunt **cercuri tangente exterioare**.*

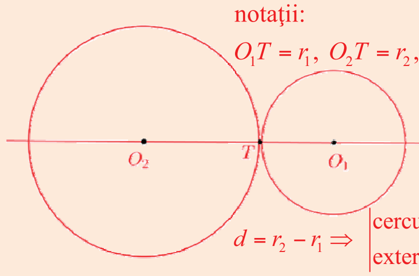
Punctul de tangență a două cercuri și centrele celor două cercuri sunt puncte coliniare.



$d = r_2 - r_1 \Rightarrow$ cercuri tangente interioare

notații:

$O_1T = r_1,\ O_2T = r_2,\ O_2O_1 = d$



$d = r_2 - r_1 \Rightarrow$ cercuri tangente exterioare

Dacă distanța între centrele a două cercuri este mai mică decât diferența razelor sau este mai mare decât suma razelor, atunci cercurile nu au puncte comune.

Aplicăm cunoștințele

5. Se consideră două cercuri tangente $C(O;5$ cm) și $C(Q;\ x$ cm). Aflați numărul x știind că lungimea segmentului OQ este egală cu 14 cm.

Ne verificăm

1. a) Figura R1

b) Cercul cu centru în P și rază PA intersectează PB în C. Se observă că $PA<PB$. Prin urmare că *perpendiculara este mai scurtă decât oblica.*

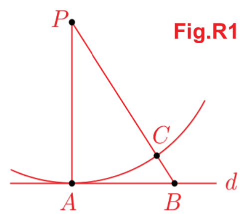


Fig.R1

2. 1) a) Punctele interioare cercului sunt: C, D, O

b) Punctele desenate pe cerc sunt: A, F.

c) Punctele exterioare cercului sunt: B, E.

2) a) Dacă punctul este interior cercului $OP < r$.

b) Dacă punctul este pe cerc $OP = r$

c) Dacă punctul este exterior cercului $OP > r$.

Presupunem că o dreaptă d are trei puncte comune cu un cerc, care are centrul într-un punct O și de rază r. Unul dintre cele trei puncte se află între celelalte două. Pe acesta îl notăm cu B și pe celelalte două cu aceste puncte cu A și C (figura R2).

Fig. R2

(1) Deoarece punctele A și B sunt pe cerc avem $OA = OB$ (ca raze), deci punctul O este egal depărtate de capetele segmentului AB.

(2) Deoarece punctele A și B sunt pe dreaptă, dreapta d este dreapta AB (prin două puncte trece o dreaptă și numai una).

(3) Fiind egal depărtate de capetele segmentului AB, punctul O este pe mediatoarea segmentului AB, pe care o notăm cu m_1.

(4) Din (3) $O \in m_1$ și $m_1 \perp AB$ (proprietatea mediatoarei unui segment: „mediatoarea este perpendiculară pe segment”)

(5) La fel, se arată că BC este dreapta d, apoi se arată că $O \in m_2$ și că $m_2 \perp BC$, unde m_2 este mediatoarea segmentului BC.

Dar m_1 nu coincide cu m_2 pentru că segmentele AB și BC nu au același mijloc (mediatoarea unui segment trece prin mijlocul acestuia).

Din (4) și (5) rezultă că din punctul O sunt două perpendiculare pe aceeași dreaptă, ceea ce nu este posibil (figura R3). Deci o dreaptă nu poate avea trei puncte comune cu un cerc.

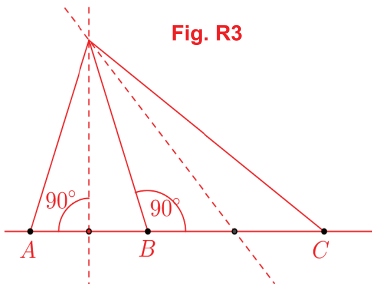


Fig. R3

Presupunem că două cercuri ar avea trei puncte comune A, B și C. Dar prin aceste puncte trece un singur cerc, ceea ce este absurd.

Activități de învățare

1. Definiți și exemplificați prin câte un desen fiecare dintre noțiunile: dreaptă tangentă cercului, dreaptă secantă cercului, dreaptă exterioară cercului.

2. Definiți și exemplificați prin câte un desen fiecare dintre noțiunile: cercuri interioare, cercuri exterioare, cercuri concentrice, cercuri secante, cercuri tangente interioare, cercuri tangente exterioare.

3. Se consideră un cerc de centru O și rază de 3 cm. Stabiliți poziția unei drepte d față de cerc, dacă:

a) Distanța de la centrul cercului la dreaptă este de 4 cm;

b) Distanța de la centrul cercului la dreaptă este de 2 cm;

c) Distanța de la centrul cercului la dreaptă este de 0 cm;

d) Distanța de la centrul cercului la dreaptă este de 3 cm.

4. a) Desenați un cerc de centru O și lungimea razei de 1,5 cm.

b) Fixați un punct T pe cerc și construiți tangenta AT la cerc.

c) Măsurați cu raportorul unghiul $A\hat{T}O$. Ce observați?

d) Găsiți o modalitate practică de a construi tangenta la cerc. Explicați!

5. Se consideră cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ în următoarele situații:

a) $r_1 = 1{,}5$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 4$ cm;
b) $r_1 = 1{,}5$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 2$ cm;
c) $r_1 = r_2 = 1{,}5$ cm și $O_1O_2 = 3$ cm;
d) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 1$ cm;
e) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm și $O_1O_2 = 0$ cm;
f) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm și $O_1O_2 = 1$ cm;

6. Precizați pozițiile cercurilor $C(O_1, r = 2\text{ cm})$ și o dreaptă a. Se notează cu d distanța de la centrul cercului la dreapta a. Alegeți distanța d, astfel încât dreapta a să fie:

a) tangentă cercului; b) secată cercului; c) exterioară cercului.

Realizați în fiecare caz figura corespunzătoare.

7. Fie cercul $C(O, r = 2x + 1 \text{ cm})$.

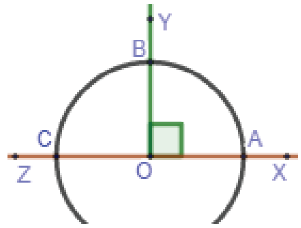
a) Dacă o dreaptă d este tangentă cercului și distanța de la centrul cercului la această dreaptă este egală cu 5 cm, calculați x.

b) Dacă dreapta d este exterioară cercului și distanța de la centrul cercului la această dreaptă este de 9 cm, calculați cea mai mare valoare $x \in \mathbb{N}$.

8. Se consideră două cercuri $C_1(O_1, x \text{ cm})$ și $C_2(O_2, 4 \text{ cm})$. Aflați x știind că distanța dintre centrele celor două cercuri este de 5 cm și că cercurile sunt:

a) tangente interioare; b) tangente exterioare.

9. În *figura* alăturată, unghiul XOY este drept iar semidreapta OZ este opusă semidreptei OX. Cercul de centru O și rază 3 cm, intersectează semidreptele OX, OY, OZ respectiv în punctele A, B, C.



a) Determinați lungimile segmentelor OA, OB, OC și AC;

b) Determinați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COA;

c) Calculați măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{ABC}$.

10. În jurul punctului O, se consideră unghiurile $\sphericalangle xOy, \sphericalangle yOz, \sphericalangle zOx$, având măsurile, exprimate în grade, prin numere direct proporționale cu 3, 4, 5.

a) Calculați măsurile celor trei unghiuri;

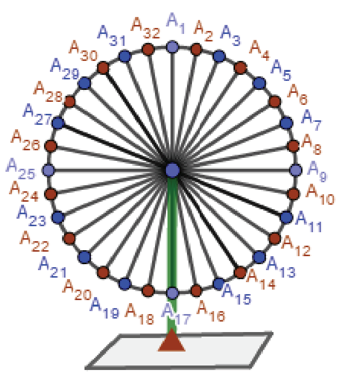
b) Cercul de centru O și rază r = 4 cm intersectează semidreptele Ox, Oy și Oz în punctele A, B respectiv C.

b_1) Stabiliți natura triunghiurilor AOB, BOC, COA.

b_2) Calculați măsura arcelor de cerc AB, BC, CA.

11. O minune a orașului Londra, *London Eye* (Ochiul Londrei) este o roată gigant de observație și divertisment, care oferă o priveliște panoramică extraordinară asupra capitalei Marii Britanii. Supranumită și Roata Mileniului, structura are o înălțime de 135 m, roata având un diametru de 120 m și este susținută de un cadru în partea de jos.

Capsulele pentru pasageri, în număr de 32, cântăresc 10 tone fiecare și pot transporta, fiecare, câte 25 de persoane. O schiță matematică este realizată în figura alăturată.



a) Calculați înălțimea stâlpului de susținere;

b) Calculați măsurile unghiurilor A_1OA_2, A_5OA_{13};

c) Calculați măsurile arcelor A_1A_2, A_1A_{16}, A_4A_{29};

d) Alin, Bianca și Adrian, în vizită la Londra, s-au aflat în capsulele A_1, A_9 și A_{25}. Calculați măsurile unghiurilor A_1OA_9, A_9OA_{25}, $A_{25}OA_1$ și ale arcelor A_1A_9, A_9A_{20}.

(Fotografie preluată de pe:
https://ro.wikipedia.org/wiki/Roata_din_Londra

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 *p*	**1.** Dacă OA și OB sunt semidrepte opuse, OC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, atunci $\sphericalangle BOC = 90°$.	
5 *p*	**2.** Două unghiuri care au același complement sunt congruente.	
5 *p*	**3.** Bisectoarea unui unghi drept formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsura de 54°.	
5 *p*	**4.** Dacă două unghiuri sunt suplementare, iar unul dintre ele are măsura o cincime din măsura celuilalt, atunci unghiul mai mare are măsura de 140°.	
5 *p*	**5.** În jurul unui punct sunt 5 unghiuri congruente. Măsura unuia dintre ele este 72°.	
5 *p*	**6.** Dacă dreptele concurente a și b formează unghiuri cu măsurile de $(3 \times x + 5)^\circ$ și $(7 \cdot x + 15)^\circ$, atunci $x = 18$.	

II. Uniți, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsulcorespunzător, aflat în coloana B.

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente iar unghiurile $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOE$ sunt alungite. Știind că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOE = 35^\circ$, calculați:

	A	B
5 *p*	**1.** $\sphericalangle AOB =$	**a.** 70°;
5 *p*	**2.** $\sphericalangle EOC =$	**b.** 35°;
5 *p*	**3.** $\sphericalangle BOD =$	**c.** 110°;
5 *p*	**4.** $\sphericalangle BOC =$	**d.** 145°.

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 *p*	**1.** $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ sunt unghiuri în jurul punctului O, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC + 30^\circ$ și $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COA - 30^\circ$. Unul dintre unghiuri este:			
	A. ascuțit;	B. drept;	C. alungit;	D. nul;
10 *p*	**2.** $\sphericalangle AOB = 20^\circ$, $\sphericalangle BOC = 70^\circ$, $\sphericalangle AOC = x^\circ$. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente dacă:			
	A. $x = 50°$;	B. $50° < x < 90°$;	C. $x = 90°$;	D. $x > 90°$.
10 *p*	**3.** Complementul unghiului $\sphericalangle AOB$ este o treime din suplementul acestuia. Măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este:			
	A. 55°;	B. 50°;	C. 45°;	D. 60°.
10 *p*	**4.** Măsurile unor unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate, în grade, prin numere naturale pare consecutive. Numărul maxim de astfel de unghiuri este:			
	A. 12;	B. 16;	C. 14;	D. 18.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

Perechile de unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ respectiv $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt adiacente, $\sphericalangle BOC$ este unghi drept, $\sphericalangle AOB = \frac{2}{3} \cdot \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AOB$ iar OE este semidreapta opusă semidreptei OC. Atunci:

5 *p*	**7.** $\sphericalangle AOB = 60°$.	☐
5 *p*	**8.** $\sphericalangle AOB = 40°$	☐
5 *p*	**9.** Unghiurile $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ au aceeași bisectoare	☐
5 *p*	**10.** Unghiul $\sphericalangle AOD$ este alungit	☐
5 *p*	**11.** Unghiurile $\sphericalangle AOE$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf	☐
5 *p*	**12.** Unghiurile $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle DOE$ sunt suplementare	☐

II. Asociați fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsulcorespunzător, aflat în coloana B.

În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOE, \sphericalangle EOA$, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE = 90°$, $\sphericalangle DOE = 45°$. Atunci:

	A	B
5 *p*	**1.** $\sphericalangle AOB =$	**a.** 150°;
5 *p*	**2.** $\sphericalangle BOE =$	**b.** 135°;
5 *p*	**3.** $\sphericalangle AOC =$	**c.** 120°;
5 *p*	**4.** Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOE$ și $\sphericalangle BOC$ formează un unghi de	**d.** 75°.

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

Punctele A, B, C sunt coliniare în această ordine. Prin punctul $E \notin AB$, se consideră dreapta d paralelă cu dreapta AB. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle CBE$ intersectează dreapta d în punctele D respectiv D, iar $\sphericalangle DBE = 37°$.

10 *p*	**5.** Măsura unghiului $\sphericalangle CBF$ este:			
	E. 37°	F. 47°	G. 53°	H. 73°
10 *p*	**6.** $\sphericalangle BDF + \sphericalangle BFD =$:			
	E. 100°	F. 90°	G. 80°;	H. 180°
10 *p*	**7.** Unghiul $\sphericalangle DBF$ este:			
	E. ascuțit	F. alungit	G. drept	H. nul
	8. Măsura unghiului $\sphericalangle BEF$ este:			
10 *p*	E. 74°	F. 37°	G. 90°	H. 111°

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Test de autoevaluare

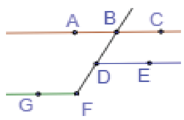
Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 p **1.** Dacă dreptele distincte d_1 și d_2 sunt perpendiculare pe dreapta a, atunci ele sunt drepte paralele. ☐

2. În figura 1. $AB \parallel DE$, $DE \parallel GF$ și $BC \parallel GF$. Atunci:

Figura 1

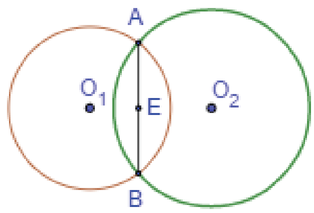


5 p a) punctele A, B, C sunt coliniare; ☐

5 p b) unghiurile $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle DFG$ sunt congruente; ☐

3. Punctele A și B aparțin cercurilor de centre O_1 și O_2 iar E este mijlocul segmentului AB (figura 2.) . Atunci:

Figura 2



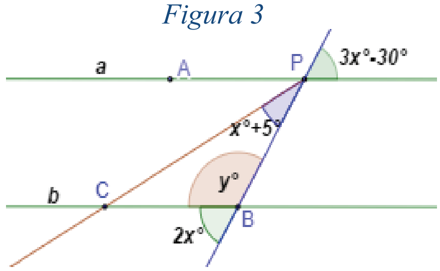
5 p a) punctul O_1 este situat pe mediatoarea segmentului AB ☐

5 p b) punctul O_2 este situat pe mediatoarea segmentului AE ☐

5 p c) punctele O_1, O_2, E sunt coliniare ☐

II. În *figura 3,* dreptele a și b sunt paralele. Folosind informațiile înscrise pe figură, uniți prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana *A*, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana *B*.

Figura 3



	A	B
5 p	**1.** $x =$	**a.** 25°;
5 p	**2.** $y =$	**b.** 120°;
5 p	**3.** $\sphericalangle APB =$	**c.** 60°;
5 p	**4.** $\sphericalangle BCP$	**d.** 30°;

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă.

Dreapta *BM* este mediatoarea segmentului *AC*, dreapta *CN* este mediatoarea segmentului *AD*, iar $BD = 12$ cm.

1. Lungimea segmentului *AD* este:

10 p A. 24 cm B. 18 cm C. 14 cm D. 16 cm

2. Distanța de la punctul B la dreapta CN este:

10 p A. 4 cm B. 8 cm C. 6 cm D. 12 cm

Dreptele *MN* și *AE* sunt paralele, *P* este mijlocul segmentului *MN*, iar $B, C, D \in AE$ astfel

10 p încât $\sphericalangle APN = \sphericalangle BPN + 20° = \sphericalangle CPN + 50° = \sphericalangle DPN + 70° = 140°$

3. Pe mediatoarea segmentului *MN* se află:

A. punctul *B*; B. punctul *C*; C. punctul *D*; D. punctul *E*.

10 p **4.** Dreapta AE este perpendiculară pe:

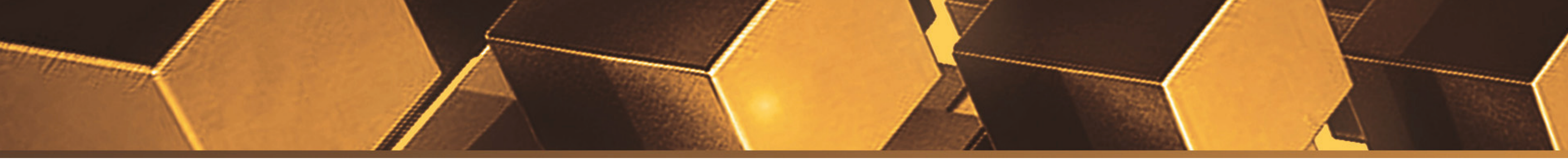
A. dreapta PA; B. dreapta PB; C. dreapta PC; D. dreapta PD.

Subiectul	I.1	I.2a	I.2b	I.3a	I.3b	I.3c	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

6

Triunghiul

1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetru
2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior
3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului
4. Linii importante într-un triunghi. Bisectoarea unghiurilor unui triunghi
5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi
6. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi
7. Congruența triunghiurilor. Criterii de congruență
8. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență
9. Metoda triunghiurilor congruente
10. Proprietățile triunghiului isoscel. Proprietățile triunghiului echilateral
11. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice. Teorema lui Pitagora.



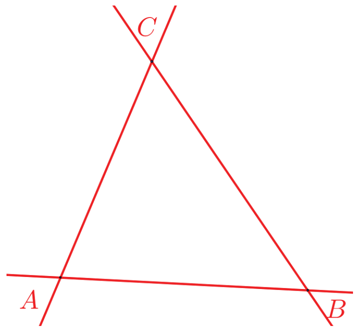
6.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetru

Ne amintim

În clasa a V-a, ne-am familiarizat cu noțiunile fundamentale ale geometriei: *punct, dreaptă, plan* și apoi ne-am întregit cunoștințele cu noțiunile de *semidreaptă, segment* și *semiplan*.

În semestrul întâi, am discutat despre: *unghiuri*, *măsura unghiurilor, unghiuri congruente* și *bisectoarea unui unghi*. Ați învățat, de asemenea, *clasificarea unghiurilor*, *paralelism*, *perpendicularitate* și *cerc*. Ne propunem să învățăm *să gândim geometric* și să *studiem triunghiul*.

Rezolvăm și descoperim



În figura alăturată sunt desenate trei puncte necoliniare și dreptele determinate de cele trei puncte necoliniare. Intersecțiile celor trei drepte au pus în evidență segmentele *AB*, *BC* și *CA*. *Cele trei puncte A, B și C, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA* formează *triunghiul ABC*. Am obținut astfel *o mulțime de puncte din plan, adică o figură geometrică, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.* Triunghiul *ABC,* din figura alăturată, se citește „triunghiul *ABC*, sau triunghiul *BCA*, sau triunghiul *CAB*" și putem face următoarea observație: *„La citirea unui triunghi, literele A, B și C pot fi așezate în orice ordine dorim."* *La celelalte poligoane nu mai este valabilă această proprietate.*

1. a) Desenați un triunghi *MNP*. Numiți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului.

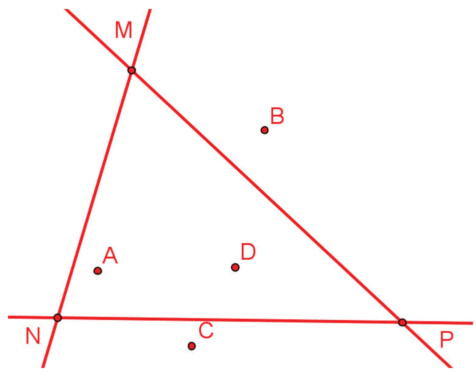
b) Mihai afirmă: „nu toate elementele unui triunghi sunt măsurabile." Sonia, colega lui, afirmă că „toate elementele unui triunghi sunt măsurabile." Cine are dreptate? Justificați!

În triunghiul *ABC,* spunem că *latura BC se opune unghiului A* și reciproc, *unghiul A este unghiul opus laturii BC*. Despre *unghiurile B și C*, se spune că *sunt alăturate laturii BC*.

c) În triunghiul *MNP,* desenat la subpunctul a), indicați laturile opuse unghiurilor triunghiului, apoi unghiurile alăturate laturilor triunghiului.

Pentru lungimile laturilor unui triunghi *ABC*, se obișnuiesc următoarele notații: $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$. Dacă nu există posibilitatea unor confuzii, se obișnuiește ca unghiurile triunghiului *ABC* să se noteze: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B, \sphericalangle BAC = \sphericalangle A, \sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.

Știm din clasele anterioare că *suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește perimetrul triunghiului* și se notează cu *P*. $P = a + b + c$, unde *a, b* și *c* sunt lungimile laturilor triunghiului *ABC*, adică $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$. Numărul $\frac{P}{2}$ se notează cu p și se numește *semiperimetrul triunghiului*. Obținem $p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$, unde *a, b, c* sunt lungimile laturilor triunghiului.



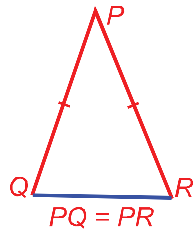
d) Măsurați lungimile laturilor triunghiului desenat la punctul a) și calculați perimetrul și semiperimetrul triunghiului.

Un punct se numește *interior unui triunghi*, dacă punctul este interior fiecărui unghi al triunghiului. *Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi dat, se numește interiorul acestui triunghi.*

Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și nu este nici interior triunghiului se numește *punct exterior triunghiului. Mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi formează exteriorul triunghiului dat.*

e) Observați cu atenție figura alăturată și notați care dintre puncte sunt interioare și care sunt exterioare triunghiului.

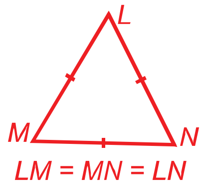
f) Sonia susține că punctul B este interior unghiului MNP și ca urmare, este interior și triunghiului MNP. Mihai, colegul Soniei, susține că punctul B nu este interior triunghiului. Cine are dreptate? Justificați răspunsul!



2. a) În figura alăturată, este desenat un triunghi PQR. Dacă veți măsura laturile triunghiului, veți constata că lungimea laturii PQ este egală cu lungimea laturii PR.

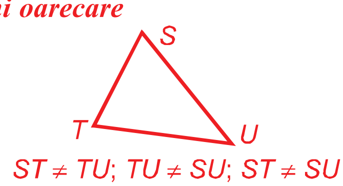
Triunghiul care are două laturi congruente se numește ***triunghi isoscel****, iar cea de-a treia latură se numește baza[*] triunghiului.*

Dacă toate cele trei laturi ale unui triunghiului au aceeași lungime, triunghiul se numește ***triunghi echilateral****.*



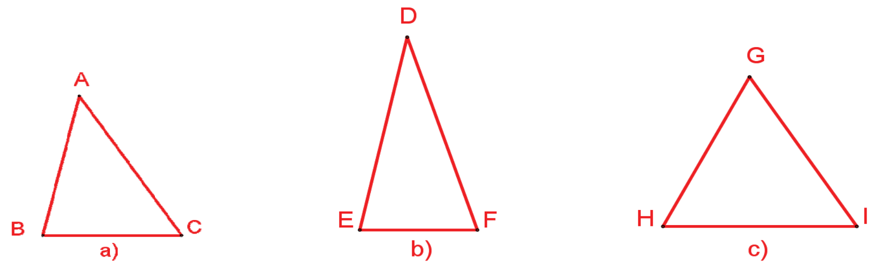
b) În figura alăturată triunghiul LMN este echilateral pentru că $LM = MN = NL$.

Un triunghi în care lungimile laturilor sunt diferite se numește ***triunghi oarecare*** *sau* ***scalen****.*



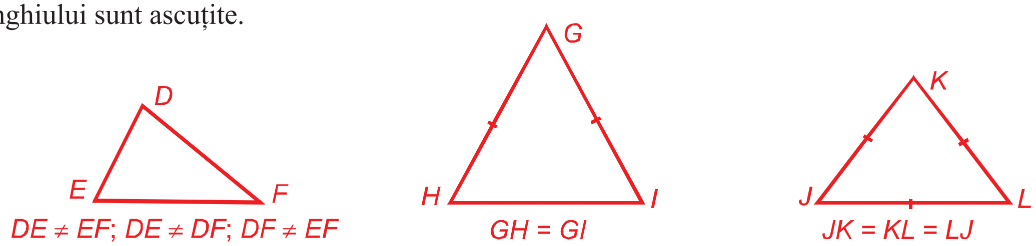
c) În figura alăturată lungimile laturilor triunghiului sunt diferite și ca urmare triunghiul STU este un triunghi oarecare, sau scalen.

Observați figurile, măsurați laturile și stabiliți ce fel de triunghiuri sunt.



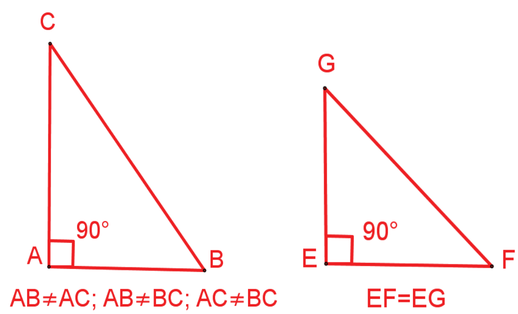
d) Vă mai amintiți cum se numește un unghi cu măsura mai mică de 90°?

Un triunghi care are toate unghiurile cu măsura mai mică de 90° se va numi ***triunghi ascuțitunghic.***
În figura alăturată, sunt reprezentate trei tipuri de triunghiuri ascuțitunghice, în fiecare caz, unghiurile triunghiului sunt ascuțite.



e) Vă mai amintiți cum se numește un unghi cu măsura de 90°?

Triunghiul care are un unghi drept se numește ***triunghi dreptunghic****.* Laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*. Latura opusă unghiul drept se numește *ipotenuză*. În figura alăturată sunt reprezentate două tipuri de triunghiuri dreptunghice.



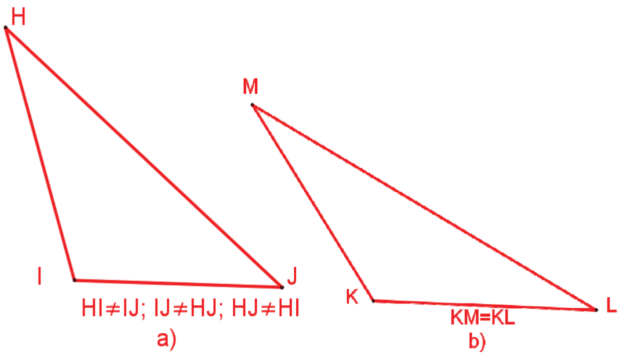
f) Vă mai amintiți cum se numește un unghi cu măsura mai mare de 90°?

---

[*] Posibil ca denumirea de „bază” să provină din preferința de a desena triunghiul cu „baza în jos”. Această preferință nu impune din punct de vedere geometric nimic. În această carte veți întâlni și triunghiuri isoscel cu baza în altă poziție.

Un triunghi care are un unghi obtuz se va numi ***triunghi obtuzunghic***.

Cum sunt celelalte două unghiuri ale unui triunghi obtuzunghic? Suma celorlalte două unghiuri ale unui triunghi obtuzunghic este mai mică de 90°, prin urmare, fiecare separat are mai puțin de 90°, adică celelalte două unghiuri ale unui triunghi obtuzunghic sunt ascuțite. În figura alăturată sunt reprezentate două tipuri de triunghiuri obtuzunghice.



Rezumăm cunoștințele

- ***Triunghiul determinat de punctele necoliniare A, B, C, este*** *figura geometrică formată de cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA.*
- Suma lungimilor laturilor triunghiului *ABC* este ***perimetrul triunghiul ABC***.
- Punctul interior fiecărui unghi al triunghiului este *punct interior triunghiului* și punctele care nu aparțin, nici triunghiului și nici interiorului acestuia sunt *exterioare triunghiului*.
- *Triunghiul scalen* este triunghiul care are laturile de lungimi diferite.
- *Triunghiul isoscel* este triunghiul care are două laturi congruente.
- *Triunghiul echilateral* este triunghiul care are cele trei laturi congruente.
- *Triunghiul ascuțitunghic* este triunghiul care are cele trei unghiuri ascuțite.
- *Triunghiul dreptunghic* este triunghiul care are un unghi drept.
- *Triunghiul obtuzunghic* este triunghiul care are un unghi obtuz.

Aplicăm cunoștințele

3. Stabiliți natura unui triunghi *MNP* știind că:

a) $\hat{M} = 100°,\ MN = MP = 4$ cm; b) $\hat{M} = 90°,\ MN = MP = 5$ cm;

c) $\hat{M} = 50°,\ \hat{N} = 60°,\ \hat{P} = 70°$; d) $MN = NP = MP$.

Rezolvare

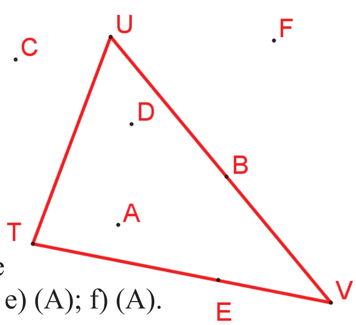
a) Triunghiul *MNP* este obtuzunghic isoscel (are un unghi obtuz și două laturi congruente).
b) Triunghiul *MNP* este dreptunghic isoscel (are un unghi drept și catetele congruente).
c) Triunghiul *MNP* este ascuțitunghic (toate unghiurile triunghiului sunt ascuțite).
d) Triunghiul *MNP* este echilateral (toate laturile triunghiului sunt congruente)

4. Perimetrul unui triunghi este de 24 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea se exprimă prin trei numere pare consecutive.

Rezolvare: Fie $2x$, $2x + 2$ și $2x + 4$ cele trei numere pare consecutive, prin care se exprimă lungimile laturilor triunghiului. Obținem $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 24$. Efectuând calculele, rezultă $x = 3$, iar lungimile laturilor triunghiului sunt: 6 cm, 8 cm și 10 cm.

5. Observați figura alăturată și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

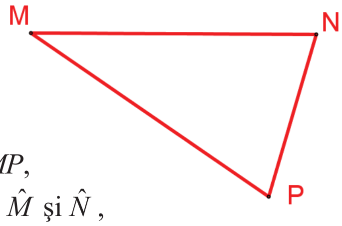
a) Unghiurile $\hat{T}$ și $\hat{V}$ sunt unghiuri alăturate laturii *UV*;
b) Unghiul $\hat{T}$ este unghi opus laturii *UV*;
c) Punctele *A* și *C* sunt puncte interioare triunghiului;
d) Punctele *A* și *D* sunt puncte interioare triunghiului;
e) Punctele *C* și *F* sunt puncte exterioare triunghiului;
f) Punctele *B* și *E* aparțin triunghiului.



Rezolvare: (F), unghiurile sunt alăturate laturii *TV*; b) (A); c) (F), *A* este punct interior triunghiului, *C* nu este punct interior triunghiului; d) (A); e) (A); f) (A).

Ne verificăm

1. a) Triunghiul *MNP* are ca elemente: vârfurile: *M, N, P*, unghiurile: $\widehat{MNP}, \widehat{MPN}, \widehat{PMN}$ și laturile: *MN, NP, PM.*



b) Mihai are dreptate: doar unghiurile și laturile sunt măsurabile, vârfurile triunghiului sunt trei puncte care nu sunt măsurabile.

c) Latura opusă unghiului $\hat{M}$ este *NP*, latura opusă unghiului $\hat{N}$ este *MP*, latura opusă unghiului $\hat{P}$ este *MN*. Unghiurile alăturate laturii *MN* sunt $\hat{M}$ și $\hat{N}$, unghiurile alăturate laturii *MP* sunt $\hat{M}$ și $\hat{P}$, unghiurile alăturate laturii *NP* sunt $\hat{N}$ *și* $\hat{P}$.

d) Cum *MN* = 3,5 cm, *MP* = 4 cm și *NP* = 2,5 cm, avem că: P = 18 cm și *p* = 6 cm.

e) Punctele *A* și *D* sunt puncte interioare triunghiului *MNP*, iar punctele *B* și *C* sunt puncte exterioare triunghiului *MNP*.

f) Sonia are dreptate când spune că punctul *B* este interior unghiului $\widehat{MNP}$, dar probabil nu a fost suficient de atentă! Pentru ca punctul *B* să fie interior triunghiului trebuie să fie interior tuturor unghiurilor triunghiului, ca urmare, are dreptate Mihai, care a observat că punctul *B* nu este interior unghiului $\widehat{PMN}$.

2. a) Triunghiul *ABC* este oarecare sau scalen. b) Triunghiul *DEF* este un triunghi isoscel.
c) Triunghiul *GHI* este un triunghi echilateral. d) Unghiul cu măsura mai mică de 90° se numește unghi ascuțit. e) Unghiul cu măsura mai mare de 90° se numește unghi obtuz.
f) Celelalte două unghiuri ale unui triunghi obtuzunghic sunt ascuțite.

Activități de învățare

1. Se consideră punctele distincte A, B, C, D, astfel ca oricare trei dintre ele să fie necoliniare. Determinați numărul triunghiurilor care se pot desena, folosind câte trei puncte din cele patru; notați și numiți toate aceste triunghiuri.

2. Observați figura 1. și scrieți:
a) triunghiurile pentru care AB este una dintre laturi;
b) triunghiurile care au unghiul comun $\sphericalangle FBD$;
c) numărul triunghiurilor din figură.

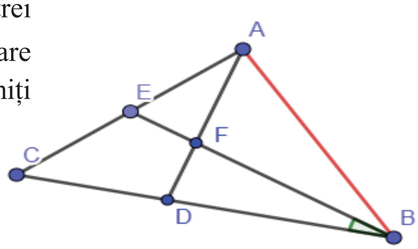


Fig. 1.

3. Observați figura 2. și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Completați în căsuța de lângă fiecare enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă.

a) $P \in \Delta ABC$; ☐   d) $M \notin Ext(\Delta ABC)$; ☐
b) $Q \notin \Delta ABC$; ☐   e) $B \in Ext(\Delta ABC)$; ☐
c) $N \in Int(\Delta ABC)$; ☐   f) $MQ \subset Int(\Delta ABC)$. ☐

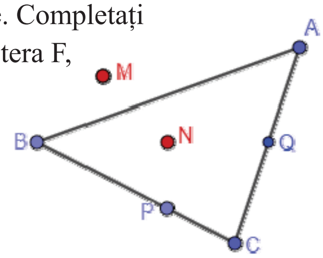
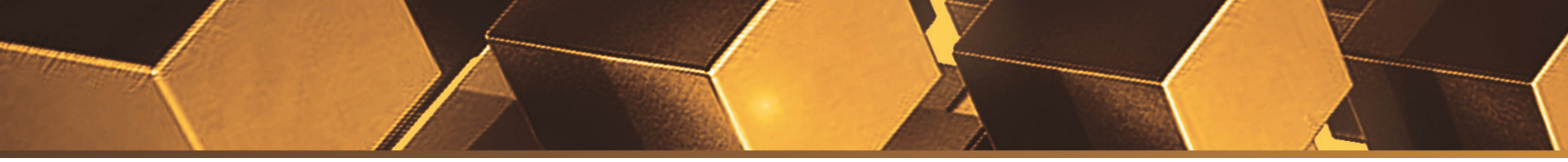


Fig. 2.

4. Calculați perimetrul triunghiului ABC în fiecare din următoarele situații:
a) Semiperimetrul triunghiului ABC este 7,5 cm. b) $AB = 8\,\text{cm}, BC = 1\,\text{dm}, CA = 50\,\text{mm}$.
c) AB = 16 cm, $BC = \frac{3}{4} \cdot AB$, iar lungimea laturii AC este media aritmetică a lungimilor laturilor AB și BC.

5. Un triunghi isoscel are lungimile laturilor date de: $(x+6)\text{cm}$, $(3 \cdot x + 2)\text{cm}$ și $(2 \cdot x + 7)\text{cm}$. Aflați numărul *x* și perimetrul triunghiului, analizând toate cazurile posibile.



6. Folosind 12 bețișoare, de aceeași lungime, sunt formate șase triunghiuri care au același perimetru (Figura 3). Mutați 4 bețișoare astfel încât să se formeze trei triunghiuri. Calculați perimetrul fiecăruia dintre cele trei triunghiuri din noua figură, știind că lungimea unui bețișor este a unități de măsură.

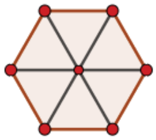
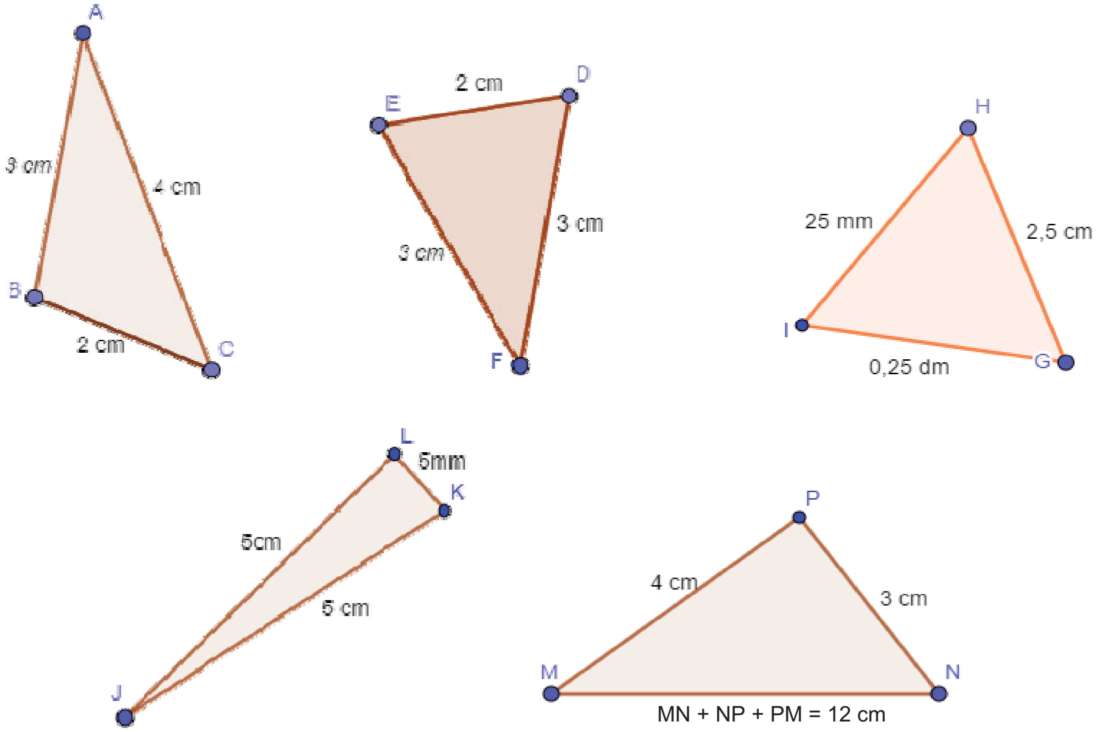


Fig. 3.

7. Observați și analizați triunghiurile din figura următoare, decideți dacă sunt echilaterale, isoscele, sau oarecare. Completați tabelul, folosind aceste informații.



Triunghiul	Natura triunghiului	Justificare
ΔABC		
ΔDEF		
ΔGHI		
ΔJKL		
ΔMNP		

8. Se consideră un punct D, situat pe latura BC a triunghiului ABC. Perimetrele triunghiurilor ABD, ACD și ABC sunt egale cu 22 cm, 18 cm, respectiv 28 cm. Calculați lungimea segmentului AD.

9. Se consideră 6 puncte distincte, între care oricare trei sunt necoliniare. Se desenează toate segmentele determinate de aceste puncta, două câte două, folosind două culori: roșu și albastru. Demonstrați că oricum am colora aceste segmente, ele determină cel puțin un triunghi cu toate laturile de aceeași culoare.

10. Calculați perimetrul unui triunghi știind că între lungimile a, b, c a laturilor sale au loc relațiile: $2 \cdot a = 3 \cdot b = 5 \cdot c$ și $b - c = 4\,\text{cm}$.

11. Stabiliți natura triunghiului ABC dacă:

a) $\sphericalangle A = 110°$; b) $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$, $\sphericalangle ABC = 90°$;

c) $AB = 3{,}2\,\text{cm}$, $BC = 32\,\text{mm}$, $P_{ABC} = 0{,}96\,\text{dm}$.

6.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi

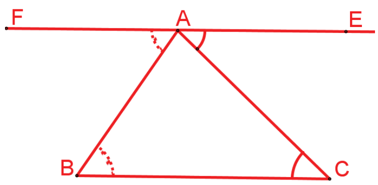
Ne amintim

În semestrul I, la capitolul „Paralelism”, am discutat despre drepte paralele, criterii de paralelism și am învățat axioma lui Euclid.

1. Ce teoremă cunoașteți despre drepte paralele intersectate de o secantă?

Rezolvăm și descoperim

2. Desenați un triunghi ABC, măsurați unghiurile triunghiului și calculați suma măsurilor acestor unghiuri. Sonia a desenat triunghiul, a măsurat cu raportorul unghiurile și a găsit $\hat{A} = 67°$, $\hat{B} = 53°$, $\hat{C} = 60°$ și $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Mihai, colegul ei, a desenat triunghiul, a măsurat unghiurile și a găsit $\hat{A} = 37°$, $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 98°$ și $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. După cum observați, atât Sonia, cât și Mihai au găsit că *suma măsurilor unghiurilor triunghiurilor, desenate de ei, este* 180°.

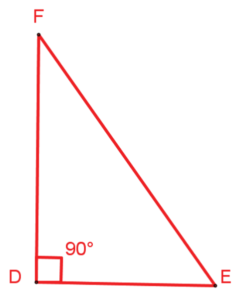


Ne propunem să demonstrăm teorema:

În orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Pentru demonstrație, construim prin vârful A al triunghiului, paralela la latura BC. Din faptul că $EF \parallel BC$ rezultă $F\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$; (1) (unghiuri alterne interne, formate de dreptele paralele EF și BC cu secanta AB). Din faptul că $EF \parallel BC$ rezultă $E\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$; (2) (unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele EF și BC cu secanta AC). Folosind relațiile (1) și (2) calculăm: $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = F\hat{A}B + E\hat{A}C + B\hat{A}C = F\hat{A}E$. Cum $F\hat{A}E$ este un unghi alungit, am demonstrat că: $A\hat{B}C + C\hat{A}B + B\hat{A}C = 180°$.

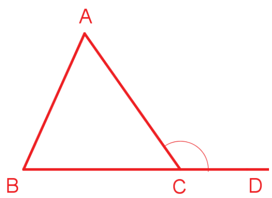
3. În figura alăturată, triunghiul DEF este dreptunghic cu $\hat{D} = 90°$. Calculați $D\hat{E}F + D\hat{F}E$. Ce observați?



Rezolvare: Din faptul că $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180°$ rezultă $90° + \hat{E} + \hat{F} = 180°$, adică $\hat{E} + \hat{F} = 90°$. Deducem că suma măsurilor celor două unghiuri ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este $90°$, adică *unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare*.

4. Considerăm un triunghi echilateral ABC. Din faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, iar cele trei unghiuri sunt congruente, rezultă că măsura unui unghi este egală cu $180° : 3 = 60°$, deci fiecare unghi al unui triunghi echilateral are măsura de 60°.

În figura alăturată, punctele B, C și D sunt coliniare. În acest caz, unghiul $A\hat{C}D$, marcat pe figură, este *unghi exterior al triunghiului*. Se observă că $B\hat{C}A + D\hat{C}A = B\hat{C}D = 180°$($B\hat{C}D$ este unghi alungit) și că $A\hat{C}D$ și $B\hat{C}A$ sunt unghiuri adiacente.



Un unghi se numește *unghi exterior al unui triunghi dacă este adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului.*

Cum $\hat{A}+\hat{B}+A\hat{C}B=180°$ și $A\hat{C}D+A\hat{C}B=180°$ (punctele B, C și D sunt coliniare) rezultă că $\hat{A}+\hat{B}=A\hat{C}D$, adică un *unghi exterior al unui triunghi are ca măsură suma măsurilor unghiurilor interioare, neadiacente cu el*. Astfel, am demonstrat *teorema unghiul exterior.*

5. Mihai afirmă că un triunghi are trei unghiuri exterioare! Sonia, colega lui, afirmă că orice triunghi are șase unghiuri exterioare! Cine are dreptate?

6. Vlad consideră că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu $720°$. Are Vlad dreptate? Justificați!

Rezolvăm și descoperim

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

Consecințe: - *Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au* 45° *fiecare;*

- *Toate unghiurile triunghiului echilateral au* 60°.

Se numește *unghi exterior unui triunghi*, un unghi adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului și are ca *măsură suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el*.

Orice triunghi are șase unghiuri exterioare, câte două pentru fiecare unghi al triunghiului.

Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 720°.

Aplicăm cunoștințele

7. Determinați măsura celui de al treilea unghi al triunghiului *ABC* știind că:

a) $\hat{A}=72°$ și $\hat{B}=45°$; b) $\hat{A}=110°$ și $\hat{C}=17°$; a) $\hat{B}=24°17'$ și $\hat{C}=90°$.

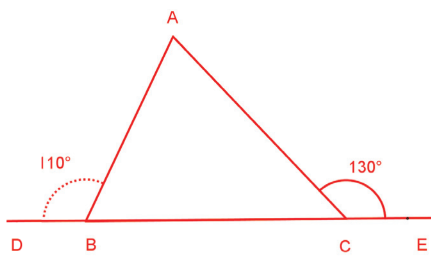
Rezolvare: a) Cum $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ rezultă $\hat{C}=67°$. b) $\hat{B}=53°$. c) $\hat{A}=65°43'$.

8. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*, știind că sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5. Ce fel de triunghi este triunghiul *ABC*?

Rezolvare: Notăm măsurile unghiurilor triunghiului cu *x*, *y* și *z* și scriem: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{2+3+5}=$ $=\frac{180°}{10}=18°$. Obținem: $\frac{x}{2}=18°\Rightarrow x=36°$, $\frac{y}{3}=18°\Rightarrow y=54°$, $\frac{z}{5}=18°\Rightarrow z=90°$. Triunghiul *ABC* este dreptunghic deoarece are un unghi de 90°.

9. În figura alăturată, unghiurile exterioare cu vârfurile în $\hat{B}$ și $\hat{C}$ au măsurile 110° și respectiv 130°. Determinați măsura unghiului $\hat{A}$.

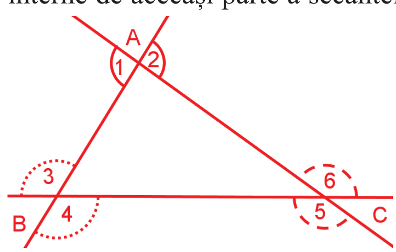
Rezolvare: Din teorema unghiului exterior, $\hat{A}+\hat{C}=110°$ și $\hat{A}+\hat{B}=130°$. Adunând relațiile se obține $2\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=240°$. Cum suma măsurilor unghiurilor este 180°, rezultă $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°\Rightarrow\hat{A}=240°-180°=60°$, deci $\hat{A}=60°$.



Ne verificăm

1. Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu o secantă perechi de unghiuri: alterne interne congruente, alterne externe congruente, corespondente congruente, interne de aceeași parte a secantei suplementare, externe de aceeași parte a secantei suplementare.

5. Pentru a vedea cine are dreptate, desenăm un triunghi *ABC* și notăm cu $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}$ unghiurile exterioare ale triunghiului *ABC*, ca în figura alăturată. Sonia a avut dreptate, sunt șase unghiuri exterioare unui triunghi, câte două congruente în fiecare vârf (sunt unghiuri opuse la vârf).



6. Pentru a verifica afirmația lui Vlad, calculăm suma măsurilor unghiurilor exterioare ținând cont de suma măsurilor unghiurilor unui triunghi și de teorema unghiului exterior. Vom nota cu $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ unghiurile interioare triunghiului *ABC*.

Calculăm $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}=\left(\hat{B}+\hat{C}\right)+\left(\hat{B}+\hat{C}\right)+\left(\hat{A}+\hat{C}\right)+\left(\hat{A}+\hat{C}\right)+\left(\hat{A}+\hat{B}\right)+\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=$

$=4\hat{A}+4\hat{B}+4\hat{C}=4\cdot\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\right)=4\cdot 180°=720°$.

Activități de învățare

1. Completați spațiile libere cu numere potrivite, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
   a) Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci $\sphericalangle ABC = ...°$ sau $\sphericalangle ABC = ...°$.
   b) Dacă punctele A, B, C sunt necoliniare, atunci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = ...°$.
2. Folosind faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, completați tabelul pentru fiecare dintre seturile de valori ale măsurilor unghiurilor triunghiului MNP:

$\sphericalangle NMP$	$\sphericalangle MNP$	$\sphericalangle MPN$	$\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P$
60°	60°		
	108°	36°	
75°		34°30′	

3. Măsura unghiului $\sphericalangle A$, al triunghiului ABC, este cu 24° mai mare decât măsura unghiului $\sphericalangle B$ și de două ori mai mică decât măsura unghiului $\sphericalangle C$. Stabiliți dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic.
4. Demonstrați că într-un triunghi oarecare ABC, au loc relațiile:
   a) Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B > 90°$, atunci $\sphericalangle C < 90°$.   c) Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$, atunci $\sphericalangle C = 90°$.
   b) Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 90°$, atunci $\sphericalangle C > 90°$.
5. Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că acestea sunt exprimate, în grade sexagesimale, prin:
   a) trei numere naturale consecutive;
   b) trei numere naturale pare, consecutive;
   c) trei numere naturale, divizibile cu 36.
6. În *figura 1*, $AB \perp BD$ și $CD \perp BD$. Demonstrați că:
   a) $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PCD$;   b) $\sphericalangle BAP + \sphericalangle CPD = 90°$.

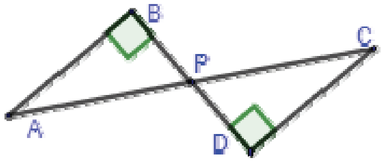


Fig. 1.

7. Intersecțiile dintre dreapta d și laturile unghiului XOY sunt punctele *T*, respectiv *S*, iar intersecția dintre d și bisectoarea acestui unghi este punctul *M*.
   a) Știind că $\sphericalangle OST = 40°$, $\sphericalangle TOM = 37°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului *TOS*.
   b) Știind că $\sphericalangle OTS \equiv \sphericalangle OST$, arătați că $\sphericalangle OMS = 90°$.
8. Bisectoarele unghiurilor ABC și *ACB*, ale triunghiului *ABC*, se intersectează în punctul *I*. Se știe că $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle ICB$, $\sphericalangle BIC = 130°$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.
9. Unghiurile ABC și CBD sunt adiacente suplementare, iar BE este bisectoarea unghiului CBD. Punctul P este piciorul perpendicularei din E pe *AB*, $\{F\} = AE \cap BC$. Se știe, de asemenea, că *EB* este bisectoarea unghiului *AEP* și $\sphericalangle BEP = 30°$.
   a) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABF*;
   b) Demonstrați că *BC* este bisectoarea unghiului *ABE*.
10. Alegeți litera care numește răspunsul corect, pentru fiecare din situațiile următoare; numai un răspuns este corect.
    a) Un triunghi care are un unghi exterior drept este un triunghi:
    a_1) ascuțitunghic; a_1) obtuzunghic; a_3) dreptunghic.

b) Un triunghi care are un unghi exterior ascuțit este un triunghi:

b_1) ascuțitunghic; b_2) obtuzunghic; b_3) dreptunghic.

c) Un triunghi care are toate unghiurile exterioare obtuze este un triunghi:

c_1) ascuțitunghic; c_2) obtuzunghic; c_3) dreptunghic.

d) Un triunghi care are toate unghiurile exterioare congruente este un triunghi:

d_1) oarecare; d_2) echilateral; d_2) isoscel.

11. Completați spațiile libere cu termeni potriviți, pentru a obține afirmații adevărate.

a) Un unghi format de o latură a unui triunghi cu prelungirea altei laturi a acelui triunghi se numește unghi … .

b) Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este mai … decât oricare dintre unghiurile triunghiului, neadiacente cu el.

c) Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu … măsurile unghiurilor triunghiului, neadiacente cu el.

12. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, în care $\sphericalangle A = 39°$, $\sphericalangle B = 85°$.

13. Un unghi exterior al unui triunghi isoscel are măsura de 128°. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului.

14. Un unghi exterior al unui triunghi dreptunghic are măsura de 137°. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului.

15. Suma a cinci dintre cele șase unghiuri exterioare ale unui triunghi dreptunghic este 585°. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

16. Suma a două dintre cele șase unghiuri exterioare ale unui triunghi este 180°. Demonstrați că triunghiul este dreptunghic.

17. Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că două dintre unghiurile exterioare au măsura 100°, respectiv 140°.

18. Dreptele AD și BE sunt concurente în punctul C (*figura 2*).

a) Stabiliți poziția dreptelor AB și DE.

b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC și CDE.

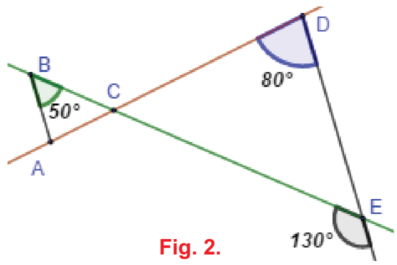


Fig. 2.

19. Folosind datele din *figura 3*, determinați numărul x și măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

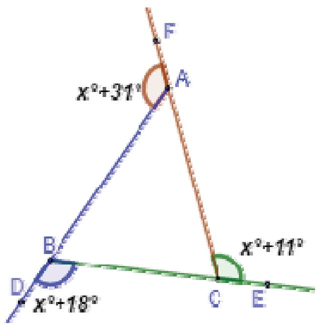


Fig. 3.

20. Fie M un punct pe latura DE a triunghiului DEF astfel încât $\sphericalangle FDE = 80°$, $\sphericalangle FMD = 70°$, $\sphericalangle FEM = 40°$. Demonstrați că FM este bisectoarea unghiului DFE.

21. În *figura 4*, unghiurile BAD și BCE sunt drepte și $\sphericalangle ADE = 126°$.
Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABO.

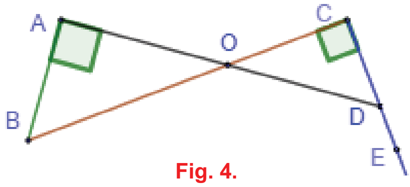
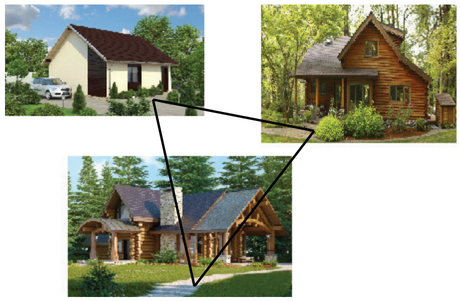


Fig. 4.

22. Unghiul ABC, cu măsura 84°, este exterior triunghiului BCD, iar bisectoarea acestuia este paralelă cu latura CD. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului BCD.

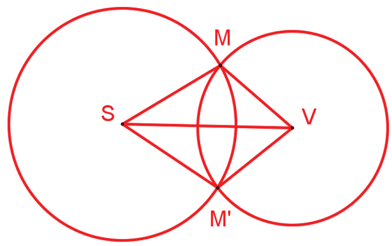
6.3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului

Rezolvăm și descoperim



Sonia și Mihai au vrut să știe dacă pot aplica noțiunile învățate la capitolul „*Rapoarte și proporții*”, la ora de geometrie. Și-au propus să măsoare, cu aproximație, distanța dintre locuințele lor și distanța de la ei la prietenul lor, Vlad. Au constatat următoarele: distanța de la Sonia la Vlad este de 600 m, de la Mihai la Vlad, este de 300 m, iar distanța dintre locuințele lor este de 500 m.

Sonia îi propune lui Mihai să deseneze, pe o foaie albă, un triunghi care să reprezinte poziția caselor în care locuiesc.
Pentru a-i ajuta, Vlad le propune scara 1:20 000. Vor nota punctele care vor reprezenta, în desen, locuințele lor cu S, M și V și ținând cont de scara la care vor să facă desenul, au obținut SV = 3 cm, MV = 1,5 cm și SM = 2,5 cm.



Mihai desenează segmentul SV = 3 cm. Apoi, trasează un cerc cu vârful V și raza de 1,5 cm. Locuința lui se află undeva pe acest cerc. Pentru a ști unde este amplasată locuința sa, construiește încă un cerc cu centrul S și raza de 2,5 cm. Cele două cercuri s-au intersectat în două puncte. Oricare dintre aceste puncte poate reprezenta, în desen, locuința lui Mihai.

Mihai a construit un triunghi cu dimensiunile de 3 cm*,* 1,5 cm *și* 2 cm*.*

1. Folosind procedeul lui Mihai, încercați să construiți un triunghi, care să aibă laturile de 1,5 cm, 1 cm, 3 cm. Veți constata că este imposibilă construcția unui astfel de triunghi întrucât 1,5 + 1 < 3. Cele două cercuri nu se intersectează.
2. Folosind același procedeu de construcție, verificați dacă se poate construi un triunghi MNP cu dimensiunile MN = 3 cm, MP = 1,25 cm și NP = 1,75 cm. Constatăm, din nou, că nu există un astfel de triunghi. Punctele M, N, P sunt coliniare.
3. Pentru a putea construi un triunghi, trebuie ca lungimile laturilor sale să îndeplinească anumite proprietăți.
   Pentru a exista un triunghi, trebuie ca *suma lungimilor oricăror două laturi să fie mai mare decât cea de-a treia latură.* Această proprietate se numește *inegalitatea triunghiului*.
   În concluzie, înainte de a construi un triunghi ABC, atunci când se cunosc *lungimile laturilor*, *verificăm dacă suma oricăror două laturi este mai mare decât cea de a treia latură, adică* $AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$, $AC + AB > BC$ sau lungimea oricărei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.
   Ne întrebăm dacă există și alte situații, procedee prin care se poate construi un triunghi.
4. Construiți un triunghi ABC, cunoscând AB = 4 cm, AC = 3 cm și $\hat{A} = 30°$. Descrieți procedeul folosit. În această situație, triunghiul *există și este unic.*
5. Construiți un triunghi MNP, cunoscând $\hat{M} = 30°$, MN = 3,5 cm și $\hat{N} = 60°$. Și de această dată, triunghiul *există și este unic*.
   Punctul P este *intersecția a două semidrepte.* Dacă cele două semidrepte nu se intersectează, nu există punctul P și nu există nici triunghiul MNP. Când se întâmplă acest lucru?

Am învățat că *suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu* 180°. Dacă încercăm să construim un triunghi cu *două unghiuri care să aibă măsurile mai mari sau egale cu* 90°, vom constata că *nu se poate realiza construcția* și ca urmare nu există un astfel de triunghi.

6. Construiți un triunghi RST, cunoscând RS = 3,5 cm, $\hat{SRT} = 100°$ și $\hat{TSR} = 120°$.

Veți constata că acest triunghi nu există, pentru că $\hat{SRT} + \hat{TSR} > 180°$. Pentru ca triunghiul să existe trebuie ca $\hat{SRT} + \hat{TSR} < 180°$.

7. Sonia observă că în problema 4 s-a cerut construcția unui triunghi, cunoscând *lungimea unei laturi* și măsurile celor *două unghiuri alăturate laturii*. Se întreabă dacă se poate construi un triunghi, cunoscând *lungimea unei laturi* și măsurile a *două unghiuri oarecare* ale triunghiului. Mihai susține că se poate construi triunghiul cu condiția ca suma măsurilor celor două unghiuri să fie mai mică de 180°. Cum va proceda Mihai?

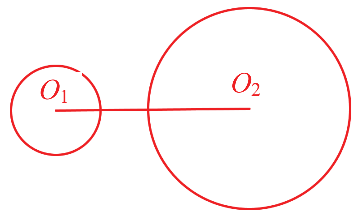
Rezumăm cunoştinţele

Se poate construi un triunghi când se cunosc:
- lungimile tuturor laturilor sale (LLL),
- lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între cele două laturi (LUL),
- lungimea unei laturi și măsurile celor două unghiuri alăturate laturii (ULU),
- lungimea unei laturi și măsurile a două unghiuri, dintre care unul este opus laturii (LUU).

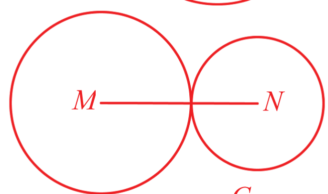
Inegalitatea triunghiului. Pentru ca un triunghi ABC să existe, trebuie ca lungimea fiecărei laturi să fie mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.
$AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$, $AC < AB + BC$.

Ne verificăm

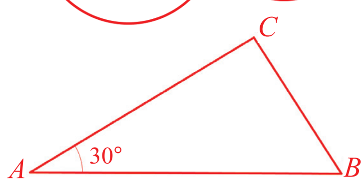
1. Se desenează segmentul de 3 cm, apoi, cu centrul în una dintre extremitățile segmentului, se desenează un cerc cu raza de 1,5 cm și cu centru în cealaltă extremitate a segmentului, se desenează un cerc cu raza de 1 cm. Se observă că cele două cercuri nu se intersectează și ca urmare, nu există un triunghi cu aceste dimensiuni.



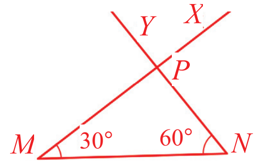
2. Se desenează segmentul MN = 3 cm și un cerc cu centrul în N, de rază 1,75 cm. Se repetă operația pentru un cerc cu centrul în M, de rază 1,25 cm. Cele două cercuri sunt tangente exterior. Punctul comun al acestora se notează cu P și aparține segmentului MN, deci cele trei puncte sunt coliniare și nu sunt vârfurile unui triunghi.



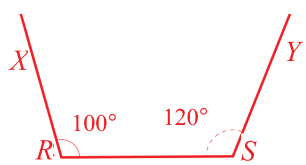
3. Se construiește un unghi $\hat{XAY}$ cu măsura de 30° și se măsoară pe semidreptele AX și AY segmentele AB = 4 cm și AC = 3 cm. Reprezentăm segmentul BC și obținem triunghiul ABC.



4. Se construiește segmentul MN = 3,5 cm, se măsoară cu raportorul și se construiesc semidreptele MX și NY, astfel încât $\hat{XMN}$ = 30° și $\hat{YNM}$ = 60°. Punctul P este intersecția semidreptelor MX și NY.



5. Se construiește segmentul RS = 3,5 cm, se construiesc semidreptele RZ și SY, măsurând cu raportorul unghiurile $\hat{SRX} = 100°$ și $\hat{RSY} = 120°$. Cele două semidrepte nu se intersectează și, ca urmare, nu există un triunghi cu dimensiunile date în problemă.



6. Se ține cont că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° și în cazul în care unul dintre unghiurile date în problemă este cel opus bazei, îl calculăm pe cel de al doilea unghi alăturat bazei și aplicăm procedeul descris la problema **4**.

Activități de învățare

1. Construiți triunghiul MNP, cunoscând:
a) $MN = 4\,\text{cm}$, $NP = 0{,}5\,\text{dm}$, $PM = 600\,\text{mm}$;
b) b) $MN - 1\,\text{cm} = 2 \cdot NP = PM + 3\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

2. Desenați un segment AB cu lungimea de 4 cm și punctele M_1, M_2, M_3 care nu aparțin dreptei AB.
Desenați triunghiurile ABM_1, ABM_2, ABM_2 *(figura 1)*.
Ce au în comun aceste triunghiuri? Câte triunghiuri se pot reprezenta astfel încât să aibă vârfurile A și B fixate iar vârful M să fie un punct oarecare (mobil) care nu este coliniar cu A și B.

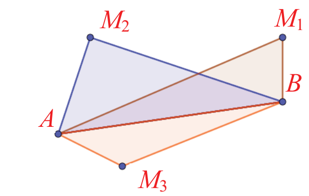


Fig. 1.

3. Desenați unghiul ABC cu măsura de 90° și punctele P_1, P_2 pe latura BA, Q_1, Q_2 pe latura BC a unghiului ABC. Desenați triunghiurile P_1BQ_1, P_1BQ_2, P_2BQ_1, P_2BQ_2 *(figura 2)*. Ce au în comun aceste triunghiuri? Care este numărul triunghiurilor BPQ care să aibă unghiul PBQ comun?

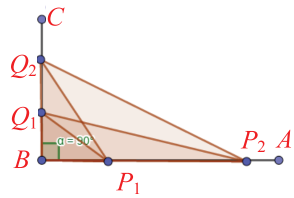


Fig. 2.

4. Desenați două segmente $AB = 5\,\text{cm}$ și $AC = 6\,\text{cm}$, folosind pentru măsura unghiului BAC, pe rând, valorile: 30°, 60°, 90°, 120°. Deduceți câte triunghiuri ABC se pot forma, păstrând lungimile laturilor AB și AC și făcând ca măsura unghiului BAC să ia, pe rând, toate valorile posibile între 0° și 180°.

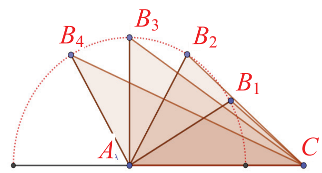


Fig. 3.

5. Construiți, folosind instrumentele geometrice, câte un triunghi ABC pentru fiecare din seturile de date:
a) $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle BAC = 70°$;
b) $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm iar complementul unghiului B are 30°.

6. Construiți, folosind instrumentele geometrice, câte un triunghi DEF pentru fiecare din seturile de date:
a) $AC = 4{,}5\,\text{cm}, \sphericalangle A = 30°, \sphericalangle C = 100°$;   b) $BC = 8\,\text{cm}, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C, \sphericalangle B + \sphericalangle C = 108°$.

7. Construiți un triunghi care să aibă:
a) toate laturile de lungime 6 cm;
b) toate laturile congruente, iar semiperimetrul triunghiului să fie egal cu 12 cm.

8. Construiți triunghiul ABC știind că $AB \equiv AC$ și:
a) $AB = 5\,\text{cm}$, $\sphericalangle A = 36°$; b) $AB = 45\,\text{mm}$, $\sphericalangle A = 130°$; c) $AB + AC = 12\,\text{cm}$ și $BC = 5\,\text{cm}$.

9. Lungimile laturilor triunghiului ABC sunt date de relațiile: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $2 \cdot a = 3 \cdot b = 4 \cdot c$ iar perimetrul triunghiului este 26 cm. Aflați lungimile laturilor apoi construiți triunghiul ABC.

10. Adunând, două câte două, lungimile laturilor unui triunghi, obținem respectiv 14 cm, 16 cm, 18 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului și construiți-l.

11. Pentru fiecare din situațiile următoare, demonstrați că nu există niciun triunghi care să verifice condițiile date.
a) $AB = 3{,}6\,\text{cm}$, $\sphericalangle B = 180°$, $BC = 6{,}3\,\text{cm}$;   b) $\sphericalangle A = 85°$, $AB = 6\,\text{cm}$, $\sphericalangle B = 100°$;
c) $AB = 10\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $CA = 2\,\text{cm}$.

12. Desenați un triunghi DEF, măsurați, cu rigla gradată, lungimile laturilor triunghiului și scrieți-le, exprimate în mm.

a) Calculați sumele: $DE+EF$, $EF+FD$, $FD+DE$.

b) Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $<, >$ astfel încât să obțineți relații adevărate:

1) $DE+EF$ ... DF; 2) $EF+FD$ ... DE; 3) $FD+DE$ ... EF.

c) Formulați un enunț care să descrie rezultatele observate la subpunctul b).

13. Scrieți laturile triunghiului DEF, în ordinea descrescătoare a lungimilor lor:

a) $\sphericalangle D = 38°$, $\sphericalangle E = 62°$. b) $\sphericalangle E = 60°$, $\sphericalangle F = 45°$. c) $\sphericalangle D = 78°$, $\sphericalangle F = 30°30'$.

14. În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 40°$, $AB = 10\,\text{cm}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții. Completați în căsuța alăturată litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

a) $AB = AC$; □ b) $AC < BC$; □ c) $AC < 10\,\text{cm}$; □

d) $BC > 10\,\text{cm}$; □ e) $P_{\Delta ABC} > 20\,\text{cm}$; □ f) $BC - AC = 10\,\text{cm}$. □

15. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, folosind datele din *figura 4*. Scrieți unghiurile triunghiului în ordinea crescătoare a măsurilor lor și comparați lungimile laturilor AB și AC.

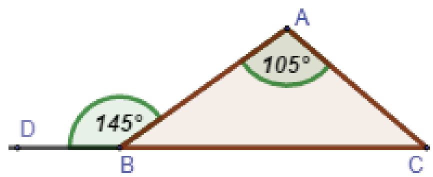


Fig. 4.

16. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle B = 70°$. Bisectoarele unghiurilor ABC și ACB se intersectează în punctul I.

a) Calculați măsurile unghiurilor CBI, BCI, ABI; b) Demonstrați că $AI > BI > CI$;

c) Scrieți în ordine descrescătoare lungimile laturilor triunghiului BCI

17. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și AA', BB', CC' înălțimile sale. Completați spațiile libere cu unul din simbolurile <, > astfel încât inegalitățile să fie adevărate:

a) $AB \ldots AA'$; b) $BA' \ldots AB$; c) $AA' \ldots AC$; d) $AC \ldots A'C$.

18. Stabiliți dacă există triunghiurile ABC, DEF, respectiv MNP astfel încât:

a) $AB = 8\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $CA = 4\,\text{cm}$; b) $DE = 8\,\text{cm}$, $EF = 4\,\text{cm}$, $DF = 4\,\text{cm}$;

c) $MN = 8\,\text{cm}$, $NP = 3\,\text{cm}$, $MP = 4\,\text{cm}$.

Pentru cazul în care există, construiți triunghiul, folosind instrumentele geometrice, în caz contrar enunțați condiția pe care aceste lungimi nu o respectă.

19. Se consideră trei segmente de lungimi 9 cm, 4 cm, x cm.

a) Determinați numărul natural x pentru care se poate construi un triunghi care să aibă laturile congruente cu segmentele date.

b) Determinați numărul natural x astfel încât să nu se poată construi un triunghi care să aibă laturile congruente cu segmentele date.

20. Numerele naturale 2, 3 și x sunt lungimile laturilor unui triunghi. Demonstrați că $x \in \{2,3,4\}$.

6.4. Linii importante într-un triunghi. Bisectoarea unghiurilor unui triunghi

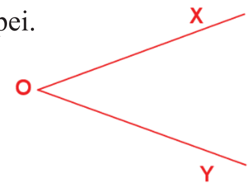
Ne amintim

În capitolul anterior ne-am familiarizat cu noțiunea de bisectoare a unui unghi. O lucrare practică, ne-a oferit posibilitatea să pliem o bucată de hârtie, pentru a obține bisectoarea unui unghi, apoi am învățat să construim bisectoarea unui unghi cu ajutorul raportorului sau cu ajutorul echerului și compasului.

Rezolvăm și descoperim

1. Desenați, pe câte o foaie de hârtie, un unghi, ca în figura alăturată. Folosind compasul și echerul, trasați bisectoarea *OM* a unghiului. Descrieți procedeul.

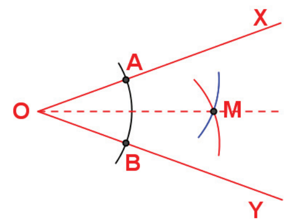
Activitate pe grupe: Formați grupe de câte patru elevi, numerotați membrii grupei.



Dorim să ne convingem că *OM* este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$, pentru fiecare desen realizat. Pentru aceasta, elevii cu numerele 1 și 3 vor măsura, cu raportorul, cele două unghiuri formate $\widehat{XOM}$ și $\widehat{YOM}$ și le compară, pentru fiecare desen. Elevii cu numerele 2 și 4 decupează unghiul, cu interior cu tot, și-l vor plia după semidreapta *OM*, pentru a verifica dacă laturile unghiului se suprapun.

Pentru construcția bisectoarei unui unghi, putem găsi, acum, încă o metodă.

Construcția bisectoarei cu rigla negradată și compasul:



- se consideră unghiul $\widehat{XOY}$ din figura alăturată;
- trasăm un cerc cu centrul în *O* care intersectează semidreapta *OX* în punctul *A* și semidreapta *OY* în punctul *B* (segmentele *OA* și *OB* vor fi congruente);
- cu aceeași deschidere a compasului, fixând vârful compasului în punctul *A* și apoi în punctul *B*, trasăm două arce de cerc, care se intersectează în punctul *M*;
- unim punctul *O* cu punctul *M* și semidreapta *OM* este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

Am arătat, intuitiv, că *orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului* și reciproc, *orice punct egal depărtat de laturile unui unghi se află pe bisectoarea unghiului*.

În concluzie, *bisectoarea unui unghi este mulțimea tuturor punctelor interioare unghiului, egal depărtate de laturile unghiului*.

2. Construiți un triunghi *ABC* ascuțitunghic, scalen. Construiți, folosind metoda dorită:

a) bisectoarea *AM*, a unghiului $\widehat{BAC}$; b) bisectoarea *BN*, a unghiului $\widehat{ABC}$;

c) notați cu *I* punctul de intersecție a semidreptelor *AM* și *BN*;

d) construiți perpendicularele din punctul *I* pe laturile unghiului și notați-le cu D_1, D_2, D_3 astfel încât $D_1 \in AB, D_2 \in BC, D_3 \in AC$.

Observăm

Din faptul că *I* se află pe bisectoarea *AM,* a unghiului $\hat{A}$, rezultă: $ID_1 = ID_3$. (1)

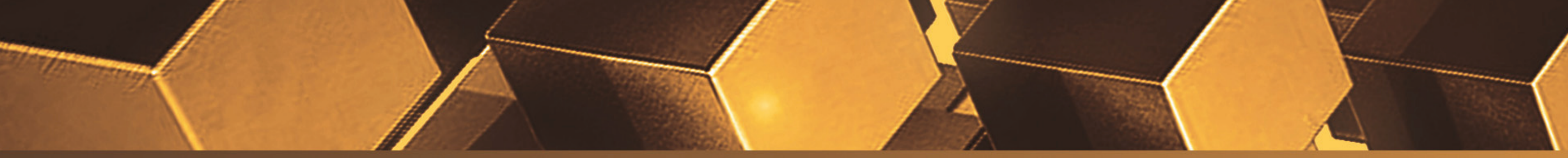
Din faptul că *I* se află pe bisectoarea *BN*, a unghiului $\hat{B}$, rezultă $ID_1 = ID_2$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă $ID_2 = ID_3$, adică *I* se află la egală distanță de laturile unghiului $\hat{C}$ și ca urmare, se află pe bisectoarea unghiului $\hat{C}$.

Am demonstrat că bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt *concurente într-un punct I,* egal depărtat de laturile triunghiului. Punctul *I*, fiind egal depărtat de laturile triunghiului este centrul cercului tangent laturilor triunghiului, numit *cerc înscris în triunghiul ABC*. Putem scrie: $d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC) = r$, unde am notat cu *r*, *raza cercului înscris în triunghiul ABC.*

Aplicăm cunoștințele

- Într-un triunghi, bisectoarele unghiurilor sunt concurente într-un punct *I*, care este *centrul cercului tangent laturilor triunghiului, numit cerc înscris în triunghi*.
- Punctul de concurență a bisectoarelor unghiurilor triunghiului este situat la *egală distanță de laturile triunghiului*.
- Distanțele de la punctul de concurență a bisectoarelor unghiurilor unui triunghi la laturile acestuia sunt *egale cu raza cercului înscris în triunghi*.



Aplicăm cunoștințele

3. a) Construiți un triunghi ABC cu următoarele dimensiuni: $\hat{B} = 60°, BC = 5$ cm și $\hat{C} = 45°$.

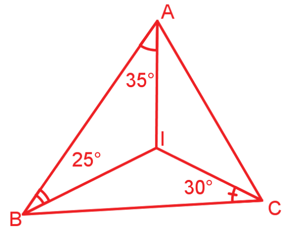
b) Construiți bisectoarea AD a unghiului $B\hat{A}C, D \in BC$.

c) Construiți simetricul punctului A față de dreapta BC și față de punctul D.

Observăm

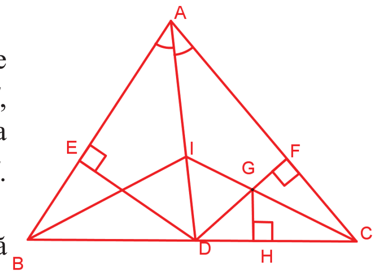
În general, *simetricul punctului A față de dreapta BC* este diferit de *simetricul punctului A față de punctul D* (vezi figura de la paragraful „Ne verificăm cum trebuia să rezolvăm”).
Mihai reacționează la observația enunțată și cere explicații.
În practică, apar două situații în care simetricul unui punct față de o dreaptă și simetricul aceluiași punct față de un punct de pe dreaptă, se suprapun:
a) dacă triunghiul ABC ar fi isoscel, $AB = BC$, cele două puncte, A_1 și A_2, ar fi identice.
b) dacă triunghiul ABC ar fi echilateral, cele două puncte, A_1 și A_2, ar fi identice.

4. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu I intersecția bisectoarelor triunghiului. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că $B\hat{A}I = 35°, A\hat{B}I = 25°$ și $B\hat{C}I = 30°$.



Rezolvare: Din faptul că AI este bisectoarea unghiului $\hat{A}$ și $B\hat{A}I = 35°$ rezultă $B\hat{A}C = 2 \cdot 35° = 70°$. Din faptul că BI este bisectoarea unghiului $A\hat{B}I$ și $A\hat{B}I = 25°$ rezultă $A\hat{B}C = 2 \cdot 25° = 50°$. Din faptul că CI este bisectoarea unghiului $B\hat{C}I$ și $B\hat{C}I = 30°$ rezultă $A\hat{C}B = 2 \cdot 30° = 60°$.

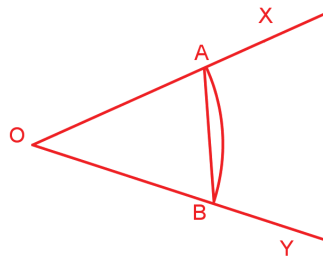
5. Fie triunghiul ABC și AD bisectoarea unghiului $\hat{A}, D \in BC$. Se construiesc perpendicularele DE pe AB, $E \in AB$ și DF pe AC, $F \in AC$. Se notează cu G intersecția dintre DF și bisectoarea CI, a unghiului $\hat{C}$ și cu H piciorul perpendicularei din G, pe BC. Demonstrați că $DG = DE - GH$.



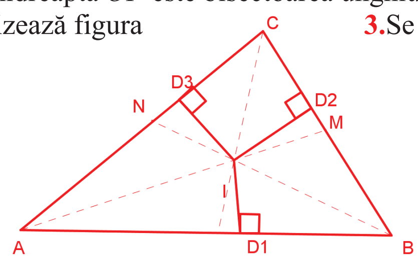
Rezolvare: Din faptul că CI este bisectoarea unghiului $A\hat{C}B$, rezultă că punctul I se află pe bisectoarea AD. Se observă că $DG = DF - GF$. (1)
Punctul D se află pe bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$ și este egal depărtat de laturile unghiului $B\hat{A}C$, adică $DE = DF \overset{(1)}{\Rightarrow} DG = DE - GF$. (2) Punctul G se află pe bisectoarea unghiului $A\hat{C}B$, deci este egal depărtat de laturile unghiului, adică $GH = GF \overset{(2)}{\Rightarrow} DG = DE - GH$.

Ne verificăm

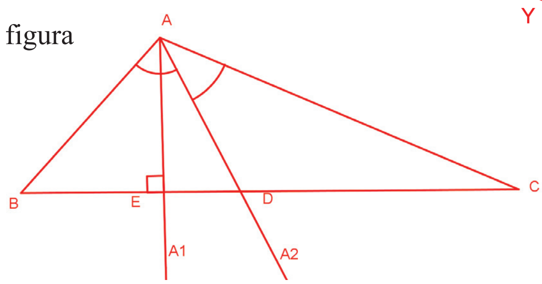
1. a) Cu vârful compasului în punctul O, trasăm un arc de cerc care intersectează laturile unghiului în punctele A și B. Vom avea $OA = OB$.
b) Plasăm echerul cu o catetă pe segmentul AB și îl lăsăm să alunece până când cealaltă catetă a echerului trece prin punctul O. Cu creionul în vârful unghiului drept al echerului, marcăm pe segmentul AB punctul P.
b) Semidreapta OP este bisectoarea unghiului.



2. Se realizează figura



3. Se realizează figura



Activități de învățare

1. În triunghiul ABC, trasați bisectoarele unghiurilor, pentru fiecare din situațiile:

a) ΔABC este ascuțitunghic; c) ΔABC este dreptunghic;

b) ΔABC este obtuzunghic; d) ΔABC este echilateral.

2. Se consideră triunghiul ABC și bisectoarea AD a unghiului BAC, $D \in BC$.

a) Dacă $\sphericalangle BAC = 94°$, aflați măsurile unghiurilor BAD și CAD.

b) Dacă $\sphericalangle BAD = 40°$, aflați măsurile unghiurilor CAD și BAC.

c) Dacă $\sphericalangle C = 58°, \sphericalangle B = 72°$, aflați măsurile unghiurilor BAC și BAD.

3. Punctul I este situat în interiorul triunghiului DEF astfel încât $\sphericalangle EDI \equiv \sphericalangle FDI$ și $\sphericalangle DEI \equiv \sphericalangle FEI$. Demonstrați că $\sphericalangle DFI \equiv \sphericalangle EFI$.

4. Semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC al triunghiului ABC, $D \in BC$. Știind că $\sphericalangle BAD = 34°$ și $\sphericalangle ADC = 101°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

5. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 56°$, se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB. Calculați măsura unghiului BIC.

6. În triunghiul ABC, trasați bisectoarele unghiurilor triunghiului, notând cu I punctul în care acestea se intersectează.

a) Dacă $\sphericalangle IBC = 25°$, $\sphericalangle ICA = 35°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului.

b) Dacă $\sphericalangle BIC = 130°$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$, calculați măsura unghiului AIB.

7. În triunghiul ABC, semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$. Construiți triunghiul pentru fiecare din situațiile următoare, discutând cu colegul/colega de bancă fiecare etapă parcursă în realizarea construcției:

a) $\sphericalangle ABC = 40°$, $AB = 6\,\text{cm}$, $\sphericalangle BAD = 30°$;

b) $\sphericalangle BAC = 70°$, $AD = 6\,\text{cm}$, $AB = 5\,\text{cm}$.

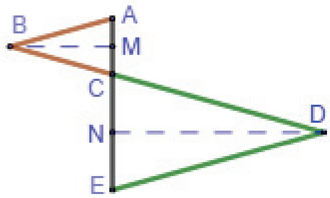
8. Se consideră triunghiul ABC cu $AB < AC$ și bisectoarea AA' a unghiului BAC, $A' \in BC$. Perpendiculara din punctul B pe dreapta AA', intersectează latura AC în punctul D.

a) Calculați, în funcție de măsura unghiului BAC, măsura unghiurilor ABD și ADB.

b) Demonstrați că unghiurile ABD și BDC sunt suplementare.

9. Punctul P este situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAP$ și $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACP$. Dacă AP intersectează dreapta BC în punctul Q, demonstrați că PQ este bisectoarea unghiului BPC.

10. În figura alăturată, triunghiurile ABC și CDE sunt isoscele, cu bazele AC, respectiv CE, iar BM și DN sunt bisectoarele unghiurilor ABC și CDE. Demonstrați că $BM \parallel DN$.



11. Pe bisectoarea unghiului XOY se consideră un punct I.

Construiți $IA \perp OX, A \in OX$ și $IB \perp OY$, $B \in OY$.

Măsurați, cu ajutorul riglei gradate, lungimile segmentelor IA și IB, apoi comparați aceste lungimi. Folosind rezultatele găsite, alegeți răspunsul corect:

a) $IA < IB$; b) $IA = IB$; c) $IA > IB$.

12. În triunghiul dreptunghic ACL, $\sphericalangle LAC = 90°$, $AD \perp CL$, $D \in CL$. Demonstrați că bisectoarea unghiului ACL este perpendiculară pe bisectoarea unghiului DAL.

6.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi

Ne amintim

În cadrul lecției „*Construcția triunghiurilor*”, Sonia i-a propus lui Mihai și lui Vlad să construiască un triunghi la scara 1:20 000, care să aibă laturile egale cu distanțele dintre locuințele lor. Sonia are o altă idee: Prietenul tatălui ei este antreprenor și dorește să construiască un loc de joacă, astfel încât *distanța* de la locuințele celor *trei prieteni* la locul de joacă *să fie aceeași*. Antreprenorul este de acord cu propunerea Soniei, dar le cere copiilor să determine, geometric, locul în care va fi amplasat locul de joacă. După parcurgerea lecției de geometrie, cei trei copii vor putea desena o schiță în care să reprezinte poziția locului de joacă la scara 1:20 000.

1. a) Construiți un segment AB, de lungime 3 cm și notați cu M mijlocul acestuia.
b) Construiți mediatoarea segmentului AB și notați-o cu d.
c) Reprezentați un punct P, pe dreapta d. Ce puteți spune despre punctul P?

Ne amintim că *mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.*

Proprietățile punctelor de pe mediatoarea unui segment: *orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului* și reciproc, *orice punct egal depărtat de capetele unui segment se află pe mediatoarea segmentului.*

2. Laturile unui triunghi sunt segmente. Pentru fiecare dintre cele trei laturi există o mediatoare.
a) Construiți un triunghi ascuțitunghic scalen, ABC.
b) Construiți mediatoarele laturilor AC și BC, notați-le cu d_1, respectiv d_2 și notați cu O punctul de intersecție a celor două drepte.
c) Uniți punctul O cu vârfurile triunghiului.

Din faptul că O se află pe mediatoarea laturii AC, rezultă $OA = OC$; (1). Din faptul că O se află pe mediatoarea laturii BC, rezultă $OC = OB$; (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $OA = OB$, adică *O se află la egală distanță de extremitățile segmentului* AB, deci se află pe mediatoarea laturii AB.

Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct O, egal depărtat de vârfurile triunghiului. Punctul O fiind egal depărtat de vârfurile triunghiului este centrul cercului ce trece prin vârfurile triunghiului, numit *cercul circumscris triunghiului ABC.*

3. Amintindu-vă de cazurile de construcție pentru triunghiuri:
a) Construiți triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm, $AC = 4,5$ cm și $BC = 6,5$ cm;
b) Construiți mediatoarele laturilor AB și BC, notați-le cu d_1 și d_2;
c) Notați cu O punctul de intersecție a mediatoarelor celor două laturi;
d) Notați cu P mijlocul laturii AC;
e) Numiți mediatoarea laturii AC;
f) Precizați unde se află punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului ABC.

Observăm

Punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului ascuțitunghic se află în interiorul triunghiului;
Punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului obtuzunghic se află în exteriorul triunghiului.
Punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

Rezumăm cunoștințele

Laturile unui triunghi sunt segmente, deci fiecare latură are o mediatoare; *triunghiul* are *trei mediatoare*.
Într-un triunghi, mediatoarele laturilor sunt *concurente într-un punct O*, care este *centrul cercului circumscris triunghiului* și este situat la aceeași distanță de vârfurile triunghiului.
Cercul circumscris unui triunghi, are centrul în punctul de concurență a mediatoarelor, *trece prin vârfurile triunghiului* și are raza (notată cu *R*) egală cu distanța de la centrul cercului la vârfurile triunghiului.
Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic se află în interiorul triunghiului.
Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.
Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află în exteriorul triunghiului.

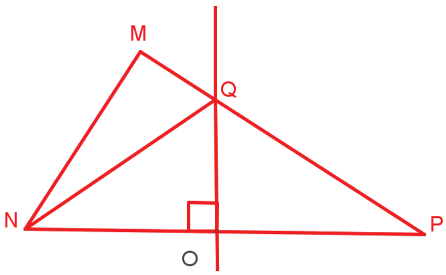
Aplicăm cunoștințele

4. Se consideră un triunghi MNP și se notează cu OQ mediatoarea laturii NP ($O \in NP$, $Q \in MP$). Calculați perimetrul triunghiului MNQ știind că $MP = 14$ cm și $MN = 8$ cm.

Rezolvare: Punctul Q se află pe mediatoarea laturii NP, deci este egal depărtat de capetele segmentului NP, adică $QN = QP$.

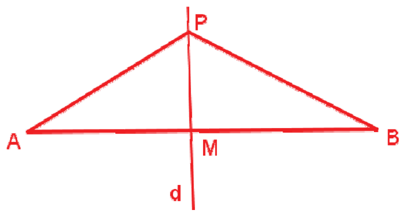
$P_{MNQ} = MN + NQ + QM \Rightarrow P_{MNQ} = MN + QP + QM \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{MNQ} = MN + MP = 8 \text{ cm} + 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$, deci $P_{MNQ} = 22$ cm.



Ne verificăm

1. Se realizează figura: $M \in AB, AM = MB \;\; P \in d, PA = PB$.



2. Mediatoarea unui segment poate fi definită ca fiind mulțimea tuturor punctelor egal depărtate de capetele (extremitățile) unui segment.

3. Se realizează figura $N \in AC, NC = NA, d_1 \perp AC$

$M \in BC, BM = C$.

M, $d_2 \perp BC$, $d_1 \cap d_2 \Rightarrow \{O\}$.

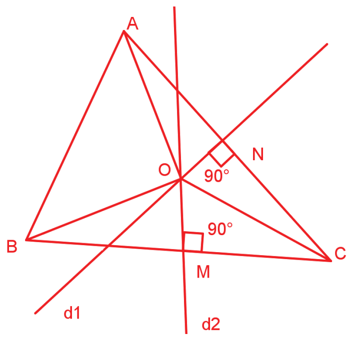
a) $AB = 3$ cm, $AC = 4{,}5$ cm,
$BC = 6{,}5$ cm;

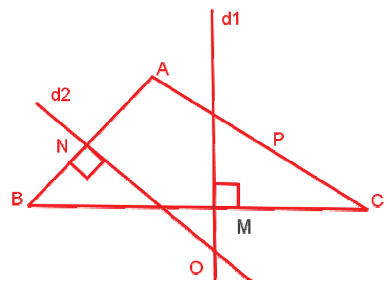
b) $M \in BC$, $BM = MC$ și $d_1 \perp BC$,
$N \in AB$, $AN = NB$ și $d_2 \perp AB$;

c) $d_1 \cap d_2 \Rightarrow \{O\}$;

d) $P \in AC$, $AP = PC$, $d_2 \perp BC$;

e) OP. f) în exteriorul triunghiului.





Activități de învățare

1. Desenați un segment AB.

a) Construiți mediatoarea segmentului AB, folosind rigla gradată și echerul.

b) Construiți mediatoarea segmentului AB, folosind rigla negradată și compasul.

2. Fie M un punct situat pe mediatoarea segmentului AB. Alegeți litera care denumește o afirmație adevărată. Numai una dintre afirmații este adevărată.

a) $MA < MB$;   b) $MA = MB$;   c) $MA > MB$.

3. Desenați segmentul CD și mediatoarea m, a acestui segment.

a) Reprezentați punctul O pe dreapta m și construiți cercul de centru O și rază $r = OC$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare; scrieți în căsuța alăturată litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

$b_1)\ D \in C(O, r)$; $b_2)\ D \notin C(O, r)$; $b_3)\ OC = OD$; $b_4)\ OC + OD > 2 \cdot r$.

4. Construiți mediatoarele laturilor AB și BC, ale triunghiului ABC și notați cu O intersecția lor. Demonstrați că $OA = OB = OC$.

5. Construiți mediatoarele laturilor AB și AC, ale triunghiului ABC, notați cu O intersecția lor și cu M mijlocul segmentului BC. Demonstrați că $OM \perp BC$.

6. Completați spațiile libere, astfel încât să obțineți proprietăți ale mediatoarelor unui triunghi:

a) Orice punct situat pe mediatoarea unui segment este ... depărtat de ... segmentului.

b) Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt ... .

c) Punctul de concurență a mediatoarelor unui triunghi este ... depărtat de vârfurile triunghiului.

d) Există un singur ... care conține vârfurile unui triunghi; acesta se numește ... circumscris triunghiului.

e) Centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de intersecție a ... triunghiului.

7. Construiți un triunghi ABC, mediatoarele laturilor triunghiului și cercul circumscris acestuia, pentru fiecare din situațiile:

a) $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle BAC = 70°$; b) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 120°$;

c) $BC = 5$ cm, $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle ACB = 40°$; d) $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 6$ cm;

e) $AB = BC = CA = 4$ cm.

8. Uniți, prin săgeți, fiecare cifră din coloana întâi, cu litera corespunzătoare din coloana a doua, astfel încât enunțul obținut prin alăturarea textelor, să fie adevărat:

1. Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic este →	a) → în exteriorul triunghiului.
2. Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este →	b) → în interiorul triunghiului.
3. Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic este →	c) → un vârf al triunghiului.
	d) → mijlocul uneia din laturile triunghiului.

9. Un vârf al unui triunghi este situat pe mediatoarea laturii opuse acestuia. Determinați natura triunghiului.

10. Determinați natura triunghiului ABC, știind că vârful A se află pe mediatoarea laturii BC, iar vârful B se află pe mediatoarea laturii AC.

11. Triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC = 8$ cm, $BC = 5$ cm. Mediatoarea laturii AC intersectează dreapta BC în punctul D. Știind că perimetrul triunghiului ABD este 30,6 cm, calculați lungimea segmentului BD.

12. Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare. Dreapta PC este atât mediatoarea segmentului AE cât și mediatoarea segmentului BD. Știind că $BC = 9$ cm, $P_{\Delta APE} = 72$ cm, $P_{\Delta BPD} = 48$ cm, calculați lungimile segmentelor BD, PN și perimetrul triunghiului PBC.

13. În mijlocul A al segmentului BC, se construiește dreapta $d \perp BC$. Fie $D \in d, D \neq A$ și E simetricul lui D, față de punctul A. Demonstrați că:

a) dreapta BC este mediatoarea segmentului DE; b) $BD \equiv DC \equiv CE \equiv EB$.

14. Pe laturile OX și OY ale unghiului XOY, se consideră punctele M, respectiv N, apoi se notează cu P punctul în care se intersectează mediatoarele segmentelor OM și ON.

Demonstrați că:

a) triunghiul PMN este isoscel;

b) punctul P este centrul cercului circumscris triunghiului OMN.

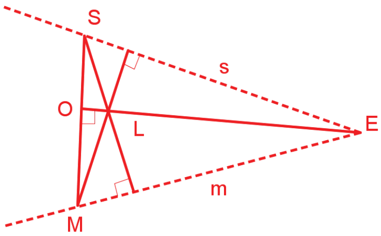
15. Triunghiul MNP este isoscel și obtuzunghic, cu baza NP. Mediatoarele laturilor MN și MP sunt concurente în punctul T și intersectează baza NP în punctele A, respectiv B.
a) Demonstrați că triunghiurile MNA și MPB sunt isoscele.
b) Demonstrați că $TN \equiv TM \equiv TP$.

6.6. Linii importante în triunghi. Înălțimea unui triunghi

Ne amintim

1. Considerăm o dreaptă d și un punct A, exterior dreptei d.
a) Construim perpendiculara din punctul A pe dreapta d și notăm cu A piciorul perpendicularei.
b) Precizați distanța de la punctul A, la dreapta d.

2. Considerăm o dreaptă a și un punct A, pe dreapta a.
a) Construiți perpendiculara d , în punctul A, pe dreapta a.
b) Precizați distanța de la punctul A, la dreapta a.



Prin înălțimea unui triunghi înțelegem segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei, din acel vârf, pe latura opusă.

În triunghiul SME, din figura alăturată, EO este înălțime. Scriem $EO \perp SM$ și citim „EO perpendiculară pe SM”. Se obișnuiește să se spună că „*EO este înălțimea din E*” sau că „*EO este înălțimea corespunzătoare bazei SM*”. Un triunghi are trei înălțimi, pentru fiecare latură a triunghiului, considerată ca bază, se poate trasa înălțimea din vârful opus. Pentru a construi înălțimea dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă procedăm ca atunci când am construit perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă. În figura alăturată, cele trei înălțimi sunt concurente în punctul L. În general, d*reptele determinate de înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de concurență se notează cu H și se numește ortocentru al triunghiului.*

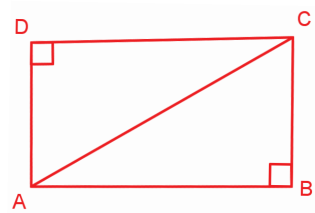
Demonstrația se poate face după ce vom învăța congruența triunghiurilor.

Observăm

Într-un triunghi, *înălțimea* poate fi considerată ca segment de dreaptă, determinat de vârful triunghiului și piciorul perpendicularei din vârf pe latura opusă, dar și ca lungime a acestui segment, din context, rezultând sensul care i se atribuie.

Înălțimea unui triunghi, privită ca segment ne ajută să determinăm aria suprafeței delimitată de triunghi, numită în continuare *aria triunghiului*.

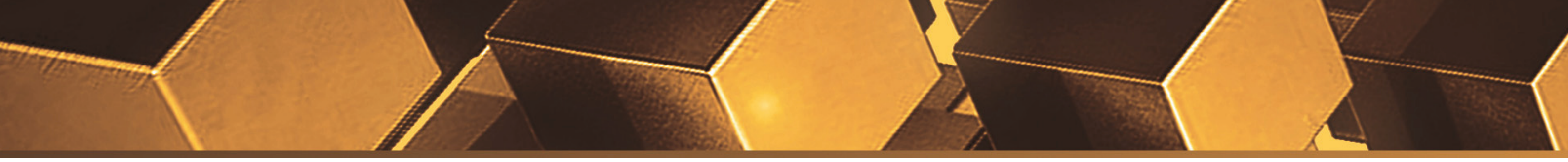
Știm că aria suprafeței unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului.



Exemplu. Desenați pe o coală de hârtie, dreptunghiul $ABCD$, ca în figura alăturată. Decupați dreptunghiul după diagonala AC și aranjați cele două triunghiuri dreptunghice obținute, astfel încât să se suprapună. Deducem că aria triunghiului ABC este egală cu aria triunghiului ADC și fiecare este jumătate din aria dreptunghiului $ABCD$:

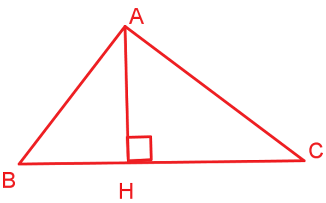
$$A_{ABC} = A_{ADC} = =\frac{1}{2}\cdot A_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot BC .$$

Cu alte cuvinte, *aria unui triunghi dreptunghic este egală cu semiprodusul lungimilor catetelor*.



3. a) Construiți un triunghi *ABC*.

b) Notați cu *H* piciorul perpendicularei din vârful *A,* pe latura opusă, *BC*. Ați obținut două triunghiuri dreptunghice *ABH* și *ACH*, iar $A_{ABC} = A_{ABH} + A_{ACH}$; (1)



Cum aria unui triunghi dreptunghic este egală cu semiprodusul lungimilor catetelor, obținem: $A_{ABH} = \dfrac{BH \cdot AH}{2}$ și $A_{ACH} = \dfrac{CH \cdot AH}{2}$.

Folosind relația (1), rezultă: $A_{ABC} = \dfrac{BH \cdot AH}{2} + \dfrac{CH \cdot AH}{2} = \dfrac{AH}{2} \cdot (BH + CH) = \dfrac{AH}{2} \cdot BC$.

În concluzie: *Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea bazei și înălțimea corespunzătoare.*

4. a) Construiți un triunghi *ABC,* cu: $BC = 4$ cm, $B\hat{A}C = 60°$ și $AC = 3$ cm.

b) Construiți înălțimile AA', BB' și notați cu *H* ortocentrul său.

Observați că *ortocentrul este punct interior triunghiului.*

5. a) Construiți un triunghi *MNP,* cu: $MN = 4$ cm, $\hat{M} = 90°$, $MP = 3$ cm.

b) Construiți înălțimile triunghiului și notați cu *H* ortocentrul său.

Observați că două dintre înălțimi se confundă cu catetele triunghiului dreptunghic și *ortocentrul triunghiului este vârful unghiului drept, adică H = M.*

6. a) Construiți un triunghi *RST,* cu: $RS = 3$ cm, $\hat{R} = 120°$, $TR = 2$ cm.

b) Construiți înălțimile TT', SS' și notați cu H ortocentrul triunghiului.

Observați că *ortocentrul este punct exterior triunghiului.*

Rezumăm cunoștințele

*- Numim **înălțime** în triunghi, **segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei, din acel vârf, pe latura opusă** sau **lungimea acestui segment.***

*- Dreptele determinate de înălțimile unui triunghi sunt concurente. **Punctul de concurență al înălțimilor** se notează cu H și **se numește ortocentrul triunghiului**.*

*- În triunghiul **ascuțitunghic,** ortocentrul este în **interiorul triunghiului**, în triunghiul **obtuzunghic**, ortocentrul este în **exteriorul triunghiului**, iar în triunghiul **dreptunghic,** ortocentrul triunghiului este **vârful unghiului drept**.*

*- **Aria** unui triunghi este **semiprodusul dintre lungimea bazei și înălțimea corespunzătoare.***

Aplicăm cunoștințele

7. În triunghiul *ABC* se construiesc înălțimile AA' *și* BB', $A' \in BC$ și $B' \in AC$.

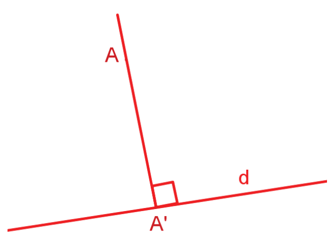
Calculați măsura unghiului $B'BC$, știind că măsura unghiului $A'AC$ este egală cu 40°.

Ne verificăm

1. Se realizează figura:

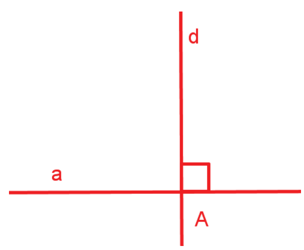
a) $A \in d$, $AA' \perp d$, $A' \in d$;

b) $d(A,d) = AA'$.

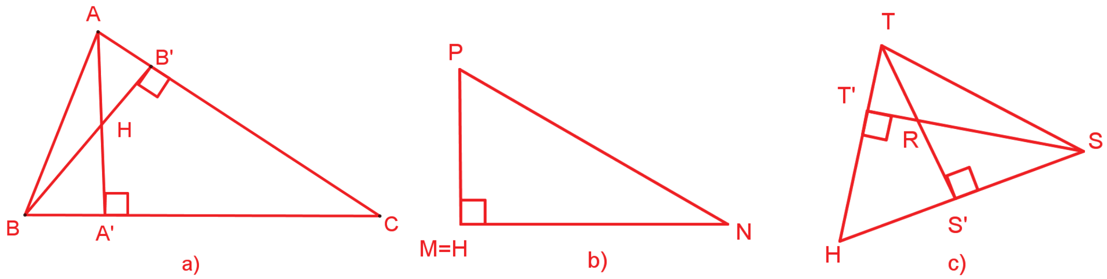


2. Se realizează figura: *a)* $A \in a$, $d \perp a$;

b) $d(A,a) = 0$.



3., 4., 5. Se realizează figurile:

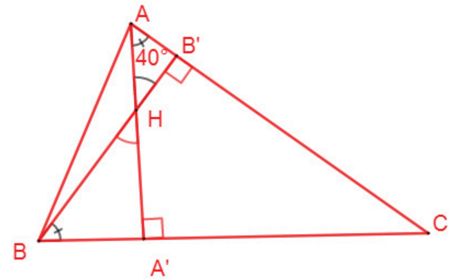


6. Din faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° și din

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{H}A' \equiv B'\hat{H}A \text{ (opuse la vârf)} \\ B\hat{A}'H = A\hat{B}'H = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'\hat{B}H = B'\hat{A}H = 40^\circ$$

(Vezi figura alăturată)



Activități de învățare

1. Completați spațiile libere cu termeni matematici potriviți, pentru a obține afirmații adevărate.
a) Distanța de la un vârf al unui triunghi la latura opusă acestuia se numește …… .
b) Segmentul determinat de un vârf al unui triunghi și piciorul perpendicularei din acest vârf pe latura opusă se numește... .
c) Fiecare triunghi are exact … înălțimi.
d) Înălțimile unui triunghi sunt … într-un punct, care se numește … .

2. Construiți triunghiul obtuzunghic DEF cu $DE = 5\,\text{cm}$, $\sphericalangle DEF = 110^\circ$, $EF = 4\,\text{cm}$. Trasați înălțimile DM și FN, apoi notați cu H ortocentrul triunghiului.
a) Demonstrați că $HE \perp DF$. b) Demonstrați că $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle EFN$.
c) Probați rezultatele demonstrate, folosind echerul, respectiv raportorul.

3. Desenați câte un triunghi, reprezentați apoi înălțimile triunghiului și notați ortocentrul, pentru fiecare din situațiile:
a) Triunghiul ABC este ascuțitunghic și are ortocentrul H_1.
b) Triunghiul DEF este dreptunghic și are ortocentrul H_2.
c) Triunghiul MNP este dreptunghic și are ortocentrul H_3.

4. Se consideră un punct P, situat în interiorul unghiului propriu XOY. Perpendiculara PA pe OX, $A \in OX$, intersectează semidreapta OY în C, iar perpendiculara PB pe OY, $B \in OY$, intersectează semidreapta OX în D. Demonstrați că $OP \perp CD$.

5. Construiți triunghiul ABC știind că $AD \perp BC$, $D \in BC$, $AD = 5$ cm, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $\sphericalangle C = 70^\circ$. Discutați cu colegul/colega de bancă și notați etapele pe care trebuie să le parcurgeți pentru realizarea construcției.

6. Se consideră triunghiul ABC, cu înălțimea AD, $D \in BC$. Perpendiculara, în punctul B, pe BC, intersectează latura AC în E, iar perpendiculara în punctul C, pe BC, intersectează latura AB în punctul F. Demonstrați că $BE \parallel AD \parallel CF$.

7. Se consideră BM și CN, înălțimi ale triunghiului ABC, $M \in AC$, $N \in AB$, iar BD și CE sunt semidreptele opuse semidreptelor BM, respectiv CM. Demonstrați că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$.

8. Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$ iar CD este bisectoarea unghiului ACB, $D \in AB$. Perpendiculara din punctul D pe latura BC intersectează dreapta AC în punctul E. Demonstrați că triunghiul BCE este isoscel.

9. Observați figurile geometrice reprezentate în rețeaua de pătrate din *figura 1,* fiecare pătrățel având latura de lungime 1 cm, deci fiecare pătrățel al rețelei având aria 1 cm^2.

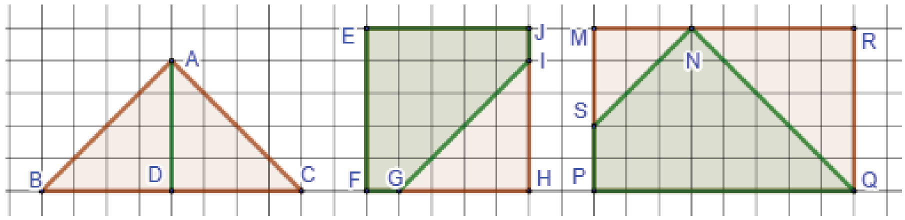


Fig. 1.

a) Determinați, folosind rețeaua de pătrate, aria triunghiului *ABC*.

b) Calculați $\dfrac{BC \cdot AD}{2}$ și comparați rezultatul obținut cu aria triunghiului *ABC*.

c) Deduceți că $A_{\Delta ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$, unde *b* este lungimea unei laturi a triunghiului, iar *h* este înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

d) Determinați, folosind rețeaua de pătrate, aria pătratului *EFHJ*, apoi determinați aria triunghiului *GHI*, folosind formula dedusă la subpunctul c).

e) Determinați aria suprafeței *EFGIJ*, în două moduri:

1) prin completare, folosind rețeaua de pătrate;

2) ca diferență între ariile calculate la subpunctul d).

f) Determinați, folosind rețeaua de pătrate, aria dreptunghiului *MPQR*, apoi determinați aria triunghiurilor *MNS* și *NQR*, folosind formula dedusă la subpunctul c).

g) Determinați aria suprafeței *PQNS*, în două moduri:

1) prin completare, folosind rețeaua de pătrate;

2) prin calcul, folosind ariile calculate la subpunctul f).

10. Înălțimile *AD* și *BE*, ale triunghiului *ABC*, se intersectează în punctul *H*. Calculați măsurile unghiurilor acestui triunghi, știind că $\sphericalangle AHE = 70°$, $\sphericalangle ABH = 40°$.

6.7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi

Ne amintim

Se numește mediană a unui triunghi, segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.

Ne amintim că tatăl Soniei are un prieten antreprenor care a construit un loc de joacă pentru copiii din cartier. Mergând în vizită la părinții Soniei, le spune că s-a gândit să facă un acoperiș deasupra toboganului. Acoperișul se va face din bucăți de tablă în formă de triunghi, care vor fi ridicate cu ajutorul unui scripete. Sonia se întreabă dacă există un punct de care poate fi prinsă bucata de tablă, pentru ca atunci când este ridicată cu scripetele, să rămână în echilibru.

1. Mihai, propune să deseneze un triunghi care ar reprezenta bucata de tablă, să traseze medianele și să găsească punctul de intersecție a medianelor. Susține că acesta ar fi punctul potrivit. Pe o bucată de carton, desenați *un triunghi* oarecare și trasați, folosind rigla gradată, *medianele* acestuia. Notați punctul de *intersecție a medianelor cu G*. Verificați, cu ajutorul unui fir, cu care străpungeți cartonul, prin punctul G, dacă suprafața triunghiului rămâne orizontală, atunci când îl ridicați.

Medianele sunt concurente într-un punct, care se notează cu G și se numește centrul de greutate al triunghiului.

2. a) Construiți triunghiul *ABC* știind că $AB = 11\,\text{cm}$, $\sphericalangle A = 60^\circ$ și $AC = 8\,\text{cm}$.

b) Construiți medianele AM_1, BM_2, CM_3 și notați cu *G* centrul de greutate al triunghiului.

c) Măsurați segmentele GA, GA_1 și calculați $\dfrac{A_1G}{AA_1}, \dfrac{AG}{AA_1}, \dfrac{A_1G}{AG}$;

d) Măsurați segmentele GB, GB_1 și calculați $\dfrac{B_1G}{BB_1}, \dfrac{BG}{BB_1}, \dfrac{B_1G}{BG}$;

e) Măsurați segmentele GC, GC_1 și calculați $\dfrac{C_1G}{CC_1}, \dfrac{CG}{CC_1}, \dfrac{C_1G}{CG}$;

Rezolvând problema 2 ați observat că *raportul în care centrul de greutate al triunghiului împarte medianele este același pe fiecare mediană.*

Mai exact, centrul de greutate al triunghiului se află, pe fiecare mediană, *la două treimi de vârful triunghiului și o treime de baza* corespunzătoare.

3. Se consideră un triunghi *ABC* și *AM* mediana acestuia ($M \in BC$). Arătați că ariile triunghiurilor formate *ABM* și *ACM* sunt egale.

Triunghiurile *ABM* și *ACM*, determinate mai sus, se numesc *triunghiuri echivalente*.

Rezumăm cunoștințele

- *Mediana unui triunghi este segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.*
- Într-un triunghi, *medianele sunt concurente într-un punct G, numit centru de greutate al triunghiului.*
- *Punctul de intersecție a medianelor unui triunghi se află, pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de bază.*
- Într-un triunghi, *orice mediană determină* două triunghiuri de arii egale, numite *triunghiuri echivalente.*

Aplicăm cunoștințele

4. Se consideră triunghiul *ABC* și se notează cu *M* și *N* mijloacele laturilor *AC* respectiv, *AB*. Se notează cu *G* intersecția dreptelor *BM* și *CN*. Arătați că *BP* = *CP*.

5. Se consideră triunghiul *ABC* și se notează cu *D* mijlocul laturii *BC*. Fie *E* simetricul punctului *A* față de punctul *D* și *F* mijlocul segmentului *BE*. Calculați aria triunghiului *BDF*, știind că aria triunghiului *ABC* este egală cu 36 cm^2.

6. Bunicul lui Vlad are straturi cu flori pe o suprafață în formă de triunghi, *LMN*, a cărui suprafață este egală cu 30 m^2. Accesul la straturile cu flori se face printr-o poartă *P*, amplasată în mijlocul laturii *MN*.

a) Calculați aria triunghiului *LMP*.

b) Bunica măsoară distanța *LP* și la două treimi de punctul *L* amplasează o stropitoare *S* și îi cere lui Vlad să calculeze aria suprafeței *MSP*, pe care dorește să planteze trandafiri.

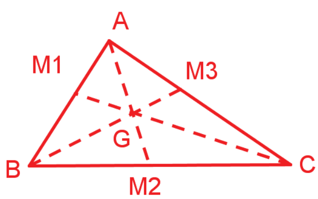
7. Se consideră un triunghi *ABC* și se notează cu *G* punctul de concurență a medianelor *BE* și *CF*. Se notează cu *D* mijlocul laturii *BC* și cu G' centrul de greutate al triunghiului *BCG*. Calculați raportul $\dfrac{G'G}{AD}$.

Ne verificăm

1. Desenăm triunghiul *ABC*. Construim medianele unind fiecare vârf cu mijlocul laturii opuse. Notăm punctul de intersecție a medianelor cu *G*.

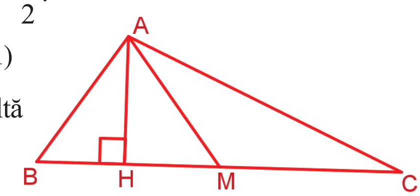
2. a) Se ține cont de cazul de construcție a triunghiurilor *LUL*:

b) Se unește fiecare vârf cu mijlocul laturii opuse și se notează cu *G* punctul de intersecție a medianelor.



c) Se măsoară segmentele și se obține: $\dfrac{A_1G}{AA_1}=\dfrac{1}{3},\dfrac{AG}{AA_1}=\dfrac{2}{3},\dfrac{A_1G}{AG}=\dfrac{1}{2};$

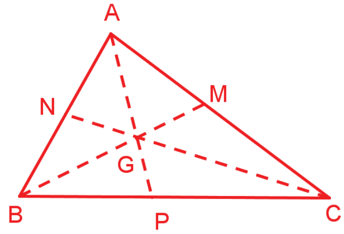
d) $\dfrac{B_1G}{BB_1}=\dfrac{1}{3},\dfrac{BG}{BB_1}=\dfrac{2}{3},\dfrac{B_1G}{BG}=\dfrac{1}{2};$ e) $\dfrac{C_1G}{CC_1}=\dfrac{1}{3},\dfrac{CG}{CC_1}=\dfrac{2}{3},\dfrac{C_1G}{CG}=\dfrac{1}{2}.$



3. $BM=CM$, $M\in BC$ (AM *mediană*), $AH\perp BM$ (AH *înălțime*) (1)

$A_{ABM}=\dfrac{MB\cdot AH}{2}$ (2), $A_{ACM}=\dfrac{MC\cdot AH}{2}$ (3) Din (1), (2) și (3) rezultă

$A_{ABM}=A_{ACM}=\dfrac{1}{2}\cdot A_{ABC}$.

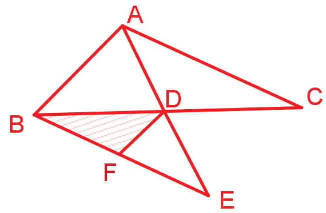


4. $AM=MC$, $M\in AC$ $\Rightarrow BM$ mediană;

$AN=NB$, $N\in AB$ $\Rightarrow CN$ mediană;

$BM\cap CN\Rightarrow\{G\}\Rightarrow G$ este centru de greutate al triunghiului AG este cea de a treia mediană și cum $AG\cap BC=\{P\}\Rightarrow AP$ mediană $\Rightarrow$

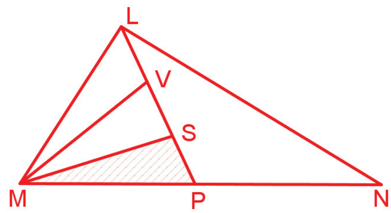
$\Rightarrow BP=CP$.



5. AD mediană în triunghiul ABC, rezultă $A_{ABD}=A_{ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot A_{ABC}=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 36\text{ cm}^2=18\text{ cm}^2$; B mediană în triunghiul ABE, rezultă $A_{BDE}=A_{ABD}=18\text{ cm}^2$; D mediană în triunghiul BDE, rezultă $A_{BDF}=A_{EDF}=\dfrac{1}{2}\cdot A_{BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot 18\text{ cm}^2=9\text{ cm}^2$.

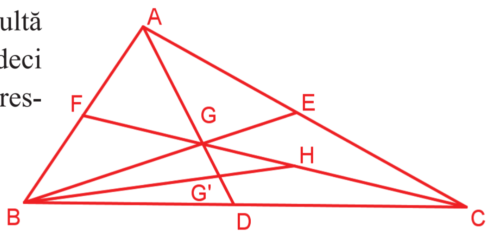
6. a) LP mediană în triunghiul LMN rezultă $A_{LMP}=\dfrac{1}{2}\cdot A_{LMN}=\dfrac{1}{2}\cdot 30\text{ cm}^2=15\text{ cm}^2$.



b) Notăm cu V mijlocul segmentului LS și avem:

- MV mediană în triunghiul LMS rezultă $A_{LMV}=A_{SMV}$; (1)
- MS mediană în triunghiul VMP rezultă $A_{SMV}=A_{SMP}=A_{LMV}$;

(din (1)). Calculăm: $A_{MSP}=\dfrac{1}{3}\cdot A_{LMP}=\dfrac{1}{3}\cdot 15\text{ cm}^2=5\text{ cm}^2$.



7. BE, CF mediane și G centrul de greutate al triunghiului, rezultă AD cea de-a treia mediană. D este mijlocul laturii BC, deci punctele A, G și D sunt coliniare (aparțin medianei corespunzătoare laturii BC).

Notând cu H mijlocul segmentului GC, rezultă $BH\cap DG\Rightarrow\{G'\}$.

În triunghiul BCG, G' este centrul de greutate, rezultă că punctul G' se află pe GD la o treime de bază și două treimi de vârf. G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă G se află pe AD la o treime de D și două treimi de A. $\dfrac{GG'}{GD}=\dfrac{2}{3},\dfrac{GD}{AD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{GG'}{AD}=\dfrac{GG'}{GD}\cdot\dfrac{GD}{AD}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}=0,(2).$

Activități de învățare

1. Construiți un triunghi ABC. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

a) Dacă AE este mediană, atunci E este … laturii … .

b) Dacă F este mijlocul laturii AC, atunci BF este … laturii …, a triunghiului ABC.

c) Dacă AE și BF sunt mediane și $AE\cap BF=\{G\}$, atunci G este … al triunghiului ABC.

d) Dacă E și F sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC, $AE \cap BF = \{G\}$, iar $CG \cap AB = \{D\}$, atunci punctul D este … laturii AB.

2. a) Desenați un triunghi MNP și construiți mediana corespunzătoare laturii NP.

b) Desenați triunghiul MNP și construiți medianele MA, NB, respectiv PC.

3. Desenați triunghiul ABC și construiți medianele acestuia, în fiecare din situațiile:

a) ΔABC este ascuțitunghic; b) ΔABC este dreptunghic; c) ΔABC este obtuzunghic.

4. Desenați triunghiul DEF și construiți medianele acestuia, în fiecare din situațiile:

a) ΔDEF este isoscel; b) ΔDEF este echilateral; c) ΔDEF este oarecare.

5. Medianele AD, BE, CF, ale triunghiului ABC, sunt concurente în punctul G. Calculați:

a) AG, dacă $AD = 9\,\text{cm}$; c) GE, dacă $BG = 8\,\text{cm}$;

b) CF, dacă $GF = 5\,\text{cm}$; d) GD, dacă $AG = 10\,\text{cm}$.

6. Construiți un triunghi ABC cu $AB = 9\,\text{cm}$, $BC = 12\,\text{cm}$, $AC = 15\,\text{cm}$. Trasați mediana BM, corespunzătoare laturii AC și măsurați lungimea acesteia. Comparați lungimea medianei BM cu lungimea segmentului AC. Alegeți litera care numește răspunsul corect; numai unul dintre răspunsuri este corect.

a) $BM = \dfrac{AC}{3}$; b) $BM = \dfrac{AC}{2}$; c) $BM = AC$.

7. Punctul O este mijlocul segmentului AB, de lungime 8 cm. Desenați cercul de centru O și rază $r = 4\,\text{cm}$. Pentru fiecare dintre situațiile de mai jos, completați spațiile libere astfel încât să obțineți enunțuri adevărate.

a) Dacă punctul P este situat pe cerc, $P \neq A$ și $P \neq B$, atunci segmentul PO este ... a triunghiului PAB, lungimea segmentului PO este ... cm și $PO = \dfrac{\dots}{2}$.

b) Dacă punctul Q este situat pe cerc, $Q \neq P$, $Q \neq A$ și $Q \neq B$, atunci segmentul QO este ... a triunghiului QAB, lungimea segmentului QO este ... cm și $QO = \dfrac{\dots}{2}$.

c) Cu ajutorul raportorului, determinați măsurile unghiurilor APB și AQB, apoi completați enunțul astfel încât să fie adevărat: „Într-un triunghi …, lungimea … corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea … .”

8. Triunghiurile dreptunghice ABC și DBC au ipotenuza comună BC, iar M este mijlocul acestuia. Demonstrați că triunghiul AMD este isoscel.

9. Medianele AM și BN, ale triunghiului ABC, sunt congruente și $AM \cap BN = \{G\}$. Demonstrați că:

a) triunghiurile ABG și MNG sunt isoscele; b) $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle AMN$;

c) $AB \parallel MN$.

10. În *figura 1*, este redată schița drumurilor care leagă orașele A, B, C, D, E, F. Orașul B se află la mijlocul distanței dintre orașele A și C. Distanța de la A la E este jumătate din distanța de la A la F. Se știe că $AC = 18\,\text{km}$, $AF = 24\,\text{km}$, $CF = 30\,\text{km}$, $AD = 14,4\,\text{km}$ și $\sphericalangle ADF = 90°$. Determinați:

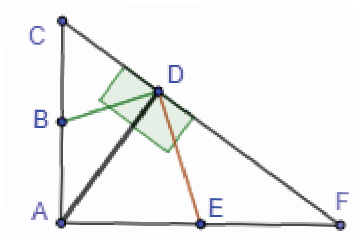


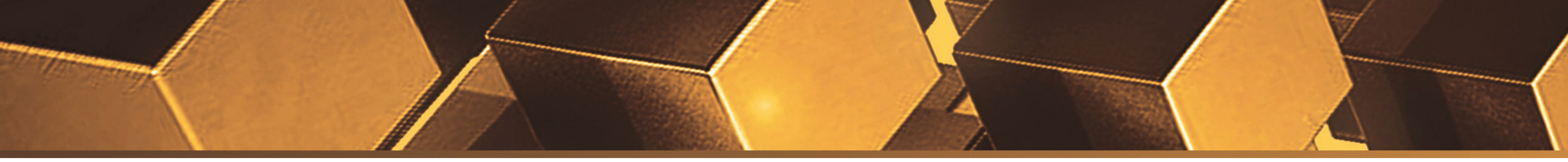
Fig. 1.

a) lungimea traseului $A - B - D - E$;

b) cel mai scurt traseu care trece prin toate cele șase orașe, o singură data.

11. Construiți triunghiul MNP știind că $MN = 6\,\text{cm}$, $NP = 8\,\text{cm}$, iar mediana MD are lungimea 6 cm.

12. Construiți triunghiul ABC știind că G este centrul său de greutate, $AB = 4\,\text{cm}$, $AG = 2\,\text{cm}$, iar $BG = 3\,\text{cm}$.

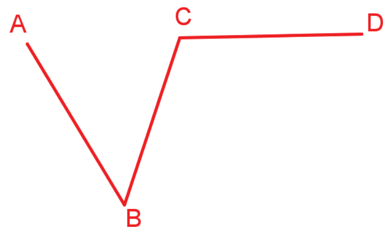


6.8. Congruența triunghiurilor. Criterii de congruență

Ne amintim

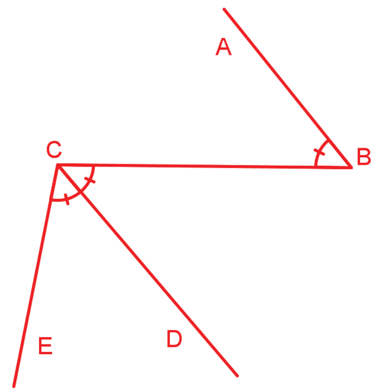
Două segmente sunt congruente dacă au aceeași lungime.

Segmentele AB, BC și CD sunt congruente pentru că au aceeași lungime $AB = BC = CD = 2{,}5$ cm. Un mod de a descrie faptul că cele trei segmente sunt congruente este să spunem că oricare două, dintre cele trei segmente, coincid, prin suprapunere.



Două unghiuri sunt congruente dacă au aceeași măsură.

Unghiurile din figura alăturată sunt congruente pentru că au aceeași măsură: $E\hat{C}D = D\hat{C}B = C\hat{B}A = 50°$.



Dacă, prin suprapunere, două triunghiuri coincid, vom spune că ele sunt congruente. Fiecare latură a unui triunghi este congruentă cu o latură a celuilalt triunghi și fiecare unghi al unui triunghi este congruent cu un unghi al celuilalt triunghi.

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente și scriem $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $CB \equiv B'C'$.

Se folosește exprimarea: „*Două triunghiuri, care au unghiurile respectiv congruente și laturile respectiv congruente, sunt congruente*". Cuvântul *respectiv* precizează că este vorba despre unghiuri corespunzătoare, sau laturi corespunzătoare.

În scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, unghiurile $\hat{A}$ cu $\hat{A}'$, $\hat{B}$ cu $\hat{B}'$ și $\hat{C}$ cu $\hat{C}'$ sunt corespunzătoare. Despre laturile care se opun unghiurilor corespunzătoare, se spune că sunt laturi corespunzătoare. Astfel, scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$ este diferită de scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, pentru că unghiurile corespunzătoare, în a doua situație, sunt altele decât cele din prima situație. Cu alte cuvinte, în scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$ contează ordinea literelor.

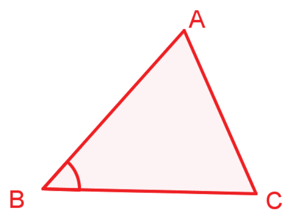
Puteți să mai întâlniți pentru triunghiuri congruente și următoarea definiție: *Două triunghiuri sunt congruente dacă și numai dacă toate laturile, respectiv unghiurile sunt congruente două câte două*.

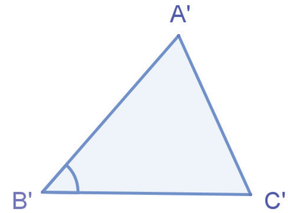
În lecția „*Construcția triunghiurilor. Cazuri de construcție*" am văzut că sunt suficiente trei elemente pentru a construi un triunghi.

Pentru a stabili cazurile sau criteriile de congruență ale triunghiurilor, vă propun o lucrare practică. Aveți nevoie de instrumente geometrice, creion, hârtie colorată, foarfece și lipici.

1. Lucrare practică

Construiți pe o bucată de hârtie colorată un triunghi, cunoscând lungimile a două laturi 3,5 cm și 4 cm și unghiul determinat de cele două laturi, 50°. Decupați triunghiul cu ajutorul unui foarfece. Repetați lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Ați obținut două triunghiuri și verificați prin suprapunere că cele două triunghiuri sunt congruente. Lipiți cele două triunghiuri, congruente și de culori diferite, în caiete, ca în figura alăturată și notați în dreptul lor dimensiunile.





Rezultatul lucrării practice se exprimă astfel:

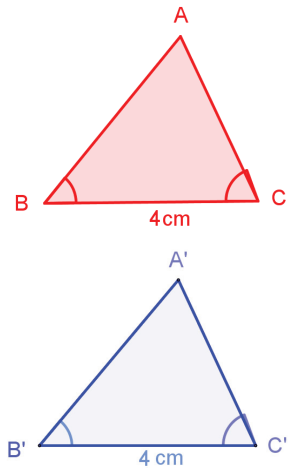
Oricare ar fi două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$, dacă $AB \equiv A'B'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $BC \equiv B'C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Acest rezultat reprezintă cazul de congruență latură–unghi–latură, care se notează prescurtat, *LUL* de congruență și se enunță astfel:

Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul determinat de ele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

2. Lucrare practică

Construiți pe o bucată de hârtie colorată un triunghi, cunoscând lungimea unei laturi 4 cm și măsurile unghiurilor alăturate acestei laturi, de 50° și de 70°. Decupați triunghiul cu ajutorul unui foarfece. Repetați lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Ați obținut două triunghiuri și verificați prin suprapunere că cele două triunghiuri sunt congruente. Lipiți cele două triunghiuri congruente și de culori diferite în caiete, ca în figura alăturată și notați în dreptul lor dimensiunile.

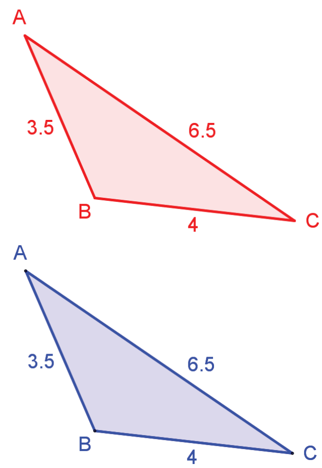


Rezultatul lucrării practice se exprimă astfel: *Oricare ar fi două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$, dacă $BC \equiv B'C', \hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.*

Acest rezultat reprezintă cazul de congruență unghi–latură–unghi, care se notează prescurtat, cazul *ULU* de congruență și se enunță astfel: *Dacă două triunghiuri au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.*

3. Lucrare practică

Construiți pe o bucată de hârtie colorată un triunghi, cunoscând lungimile laturilor acestuia 3,5 cm, 4 cm și 6,5 cm. Decupați triunghiul cu ajutorul unui foarfece. Repetați lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Ați obținut două triunghiuri și verificați prin suprapunere că cele două triunghiuri sunt congruente. Lipiți cele două triunghiuri congruente și de culori diferite în caiete, ca în figura alăturată și notați în dreptul lor dimensiunile.



Rezultatul lucrării practice se exprimă astfel:

Dacă în triunghiurile ΔABC și $\Delta A'B'C'$ au loc relațiile $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$ atunci, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Acest rezultat reprezintă cazul de congruență latură–latură–latură, care se notează prescurtat, *LLL* și se enunță astfel:

Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

Aplicăm cunoștințele

4. Construcția unui triunghi, congruent cu un triunghi dat.

b) Desenați un triunghi *ABC*. Construiți un triunghi congruent cu acesta, folosind cazul de congruență *LLL*.

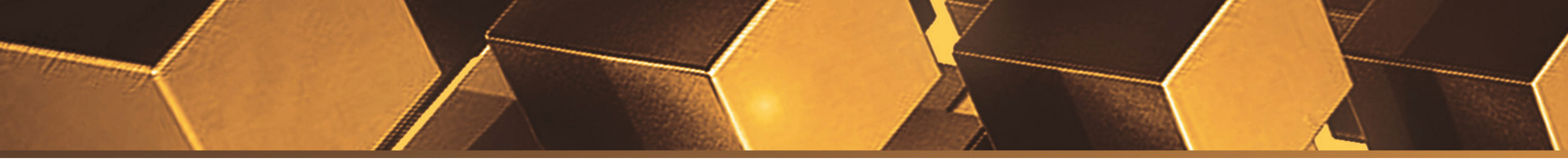
c) Construiți un triunghi congruent cu acesta, folosind cazul de congruență *LUL*.

Triunghiurile din problema anterioară au fost construite folosind cazurile de congruență *LLL, LUL*. Pentru fiecare, au putut fi măsurate, deci cunoscute măsurile unghiurilor și lungimile laturilor. Triunghiul *ABC* a fost „copiat”, s-au realizat copii ale triunghiului ΔABC.

> Dicționar
> *Omoloage = două elemente aparținând unor figuri geometrice între care există o corespondență determinată, care se află în corespondență (laturi omoloage, unghiuri omoloage).*

5. Realizați „o copie” a triunghiului ΔABC, folosind cazul de congruență *ULU*.

6. Se știe că triunghiurile ΔDEF și ΔSTR sunt congruente. Scrieți congruența elementelor omoloage (corespunzătoare).



7. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Dacă $PQ \equiv SM, PR \equiv ST, \hat{OPR} \equiv \hat{MST}$, atunci Δ......... $\equiv \Delta$.........

b) Dacă $QR \equiv CB, \hat{PQR} \equiv \hat{ACB}, \hat{PRQ} \equiv \hat{ABC}$, atunci Δ......... $\equiv \Delta$.........

c) Dacă $AB \equiv ZY, AC \equiv ZX, BC \equiv YX$, atunci Δ......... $\equiv \Delta$.........

8. Din congruența triunghiurilor ΔABC *și* ΔDEF rezultă alte congruențe. Scrieți toate congruențele posibile.

9. Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

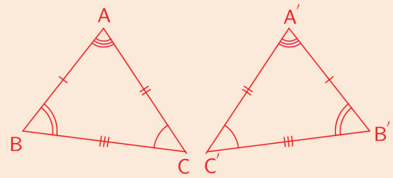
a) Dacă $AB = 4$ cm, $\hat{A} = 53°$, $NP = 3$ cm și $\hat{P} = 67°$, calculați lungimea laturii BC și măsura $\hat{C}$.

b) Dacă $\hat{B} = 41°, \hat{C} = 109°$, $AB = 7{,}5$ cm și $MP = 6$ cm calculați lungimile laturilor MN, AC și măsurile unghiurilor $\hat{N}$ și $\hat{P}$.

c) Dacă $AB = 5$ cm, $\hat{N} = 120°$ și $MP = 4$ cm, calculați lungimile laturilor MN, AC și măsura unghiului $\hat{B}$.

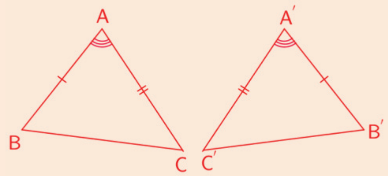
Rezumăm cunoștințele

• *Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile și unghiurile respectiv congruente.*
Se scrie $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ și se citește „triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$.

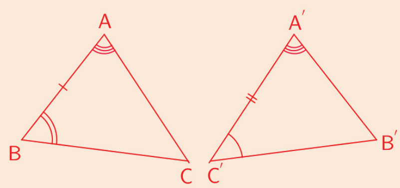


• *Criterii de congruență:*

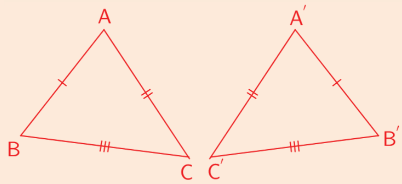
Criteriul LUL. Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul determinat de ele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



Criteriul ULU. Dacă două triunghiuri au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



Criteriul LLL. Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



Observăm

1. La scrierea congruenței a două triunghiuri trebuie să fim atenți la ordinea literelor, astfel, literele care reprezintă vârfurile unghiurilor congruente trebuie să ocupe aceeași poziție (același loc) în scrierea celor două triunghiuri.

2. Pentru a demonstra că două triunghiuri sunt congruente nu trebuie să avem toate cele șase congruențe din definiție, deoarece sunt suficiente doar trei congruențe pe care le-am întâlnit la construcția triunghiurilor și le-am folosit în lucrările practice de astăzi.

Ne verificăm

4. **a) Pașii** parcurși: măsurăm cu rigla gradată latura BC; construim un segment MN, congruent cu BC; dăm compasului o deschidere egală cu lungimea laturii AB și cu vârful compasului fixat în punctul M, trasăm un arc de cerc; dăm compasului o deschidere egală cu lungimea laturii AC și cu vârful compasului fixat în punctul N, trasăm un arc de cerc, care se intersectează cu arcul de cerc deja trasat; notăm cu P intersecția celor două arce; $\Delta PMN \equiv \Delta ABC$ (LLL). **b) Pașii** parcurși sunt următorii: se construiește un unghi $X\hat{O}Y$, congruent cu un unghi al triunghiului, de exemplu, unghiul $\hat{A}$; pe una din laturile unghiului $X\hat{O}Y$ se construiește un segment OM, congruent cu una din laturile triunghiului, alăturate unghiului $\hat{A}$, de exemplu, latura AB; pe cealaltă latură a unghiului $X\hat{O}Y$ se construiește un segment ON, congruent cu cealaltă latură a triunghiului, alăturată unghiului $\hat{A}$; se pune în evidență segmentul MN; $\Delta OMN \equiv \Delta ABC$, LUL ($OM \equiv AB$, $M\hat{O}N \equiv B\hat{A}C$, $ON \equiv AC$).

5. Se **vor** parcurge următorii **pași**: se construiește un segment congruent cu una din laturile triunghiului, de exemplu, cu latura BC și se notează MN; se măsoară unghiul $\hat{B}$ și se construiește unghiul $N\hat{M}X$, congruent cu unghiul $A\hat{B}C$; se măsoară unghiul $\hat{C}$ și se construiește unghiul $M\hat{N}Y$, congruent cu unghiul $A\hat{B}C$; notăm intersecția semidreptelor MX și NY cu P; triunghiul ΔPMN va fi congruent cu triunghiul ΔABC.

6. Din $\Delta DEF \equiv \Delta STR$ rezultă $DE \equiv ST$, $EF \equiv TR$, $DF \equiv SR$, $\hat{D} \equiv \hat{S}, \hat{E} \equiv \hat{T}, \hat{F} \equiv \hat{R}$.

7. a) $\Delta PQR \equiv \Delta SMT$; b) $\Delta PQR \equiv \Delta ACB$; c) $\Delta ABC \equiv \Delta ZYX$.

8. Din $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, rezultă $\Delta ACB \equiv \Delta DFE$, $\Delta BAC \equiv \Delta EDF$, $\Delta BCA \equiv \Delta EFD$, $\Delta CAB \equiv \Delta FDE$ și $\Delta CBA \equiv \Delta FED$.

9. a) Din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow BC = NP = 3$ cm și $\hat{C} = \hat{P} = 67°$.

b) Din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow MN = AB = 7{,}5$ cm, $AC = MP = 6$ cm, $\hat{N} = \hat{B} = 41°$ și $\hat{P} = \hat{C} = 109°$

c) $MN = AB = 5$ cm, $AC = MP = 4$ cm și $\hat{B} = \hat{N} = 120°$.

Activități de învățare

1. Se consideră triunghiurile congruente ABC și DEF. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) $AB \equiv ...$; b) $... \equiv EF$; c) $\sphericalangle A \equiv ...$; d) $... \equiv \sphericalangle DEF$.

2. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente. Justificați faptul că scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ este echivalentă cu oricare din scrierile: $\Delta ACB \equiv \Delta A'C'B'$; $\Delta BAC \equiv \Delta B'A'C'$; $\Delta BCA \equiv \Delta B'C'A'$; $\Delta CAB \equiv \Delta C'A'B'$; $\Delta CBA \equiv \Delta C'B'A'$.

3. Triunghiul ABC are proprietatea $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$.

a) Stabiliți natura triunghiului ABC.

b) Calculați perimetrul triunghiului ABC știind că $AB + 0{,}5 \cdot BC = 10$ cm.

4. În *figura 1*, sunt reprezentate două triunghiuri congruente, segmentele congruente fiind marcate prin aceeași culoare. Observați-le cu atenție și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare.

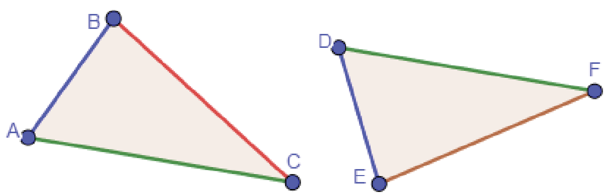


Fig. 1.

Completați în căsuța de lângă fiecare enunț litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă.

a) $\Delta EFD \equiv \Delta ABC$; ☐ b) $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$; ☐ c) $\Delta BCA \equiv \Delta EDF$. ☐

5. În *figura 2*, sunt reprezentate două triunghiuri congruente, unghiurile congruente fiind marcate prin aceeași culoare. Observați-le cu atenție și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. Completați în căsuța de lângă fiecare enunț litera *A*, dacă afirmația este adevărată și litera *F*, dacă afirmația este falsă.

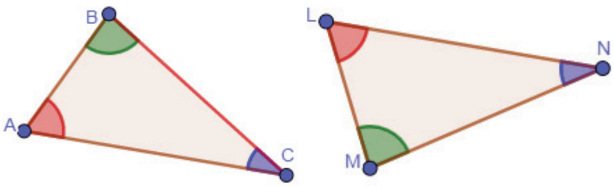


Fig. 2.

a) $\Delta ABC \equiv \Delta LNM$; ☐ b) $\Delta ABC \equiv \Delta MLN$; ☐ c) $\Delta BCA \equiv \Delta MNL$. ☐

6. Triunghiul DEF are proprietatea $\Delta DEF \equiv \Delta EFD$.

a) Stabiliți natura triunghiului DEF . b) Calculați $\sphericalangle D + \frac{1}{2}\cdot(\sphericalangle E) + \frac{1}{3}\cdot(\sphericalangle F)$.

7. Despre două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se știe că: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $AB = 3\,\text{cm}$, $B'C' = 5\,\text{cm}$ și $P_{ABC} = 15\,\text{cm}$. Aflați AC și $A'C' + A'B'$.

8. Despre două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se știe că: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B' = 63°$. Aflați $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle A' + \sphericalangle C'$.

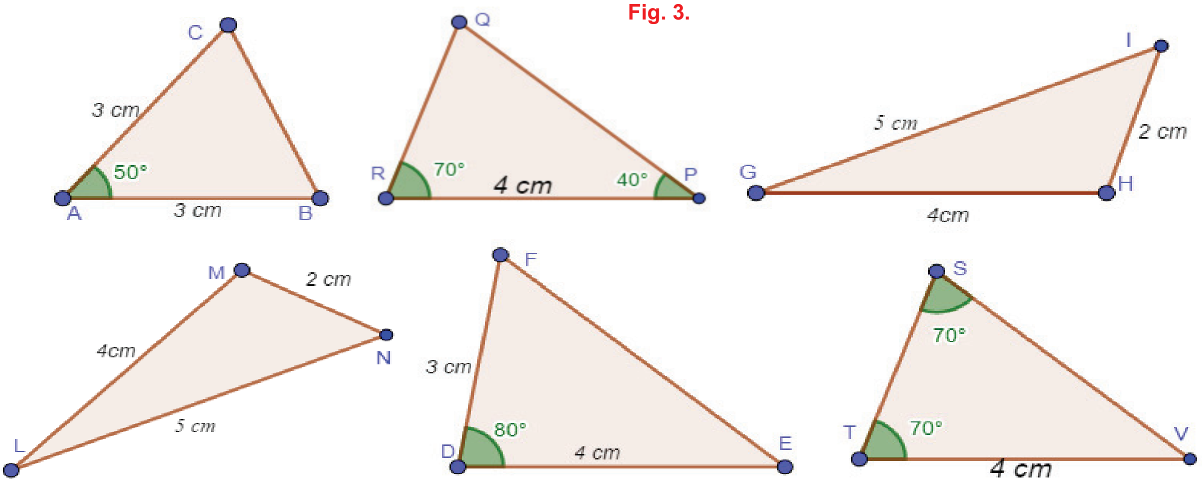
9. Despre două triunghiuri ABC și MNP se știe că: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $AB = 4\,\text{cm}$, $\sphericalangle A = 60°$ și $MP = 7\,\text{cm}$.

a) Scrieți perechile de laturi congruente ale celor două triunghiuri.
b) Scrieți perechile de unghiuri congruente ale triunghiurilor.
c) Construiți triunghiul ABC , folosind datele obținute, cu ajutorul instrumentelor geometrice.

10. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ așa încât $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Dacă $AB + A'B' = 10\,\text{cm}$, $AC + A'B' = 15\,\text{cm}$ iar perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este 23 cm, calculați lungimile laturilor triunghiului ABC .

11. În *figura 3*, sunt reprezentate mai multe triunghiuri. Identificați perechile de triunghiuri congruente, precizați cazul de congruență și completați tabelul alăturat figurii.

Fig. 3.



Perechea de triunghiuri congruente	Justificare	Cazul de congruență
...		

12. Triunghiurile isoscele ABC și DBC au baza comună BC iar $AB \equiv DC$. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$. Scrieți toate congruențele care au loc între elementele celor două triunghiuri.

13. Segmentele congruente AB și CD se intersectează în punctul E astfel încât $AE \equiv EC$ (*figura 4*).

a) Demonstrați că ΔBDE este isoscel.

b) Demonstrați că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$.

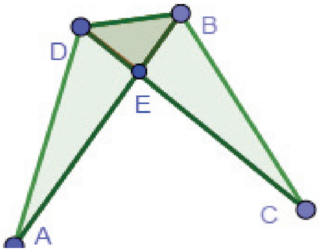


Fig. 4.

14. Demonstrați că dacă două triunghiuri isoscele au bazele congruente și perimetrele egale, atunci triunghiurile sunt congruente.

15. Pe laturile OX și OY, ale unghiului XOY, se consideră punctele A, respectiv B, astfel încât $OA \equiv OB$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$ intersectează segmentul AB în punctul D. Demonstrați că $\Delta AOD \equiv \Delta BOD$ și că $\sphericalangle ADO = \sphericalangle BDO = 90°$

16. Triunghiurile ABC și MNP sunt congruente, BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$ și NQ este bisectoarea unghiului MNP, $Q \in NP$.

a) Arătați că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle MNQ$.

b) Arătați că $\Delta ABD \equiv \Delta MNQ$.

17. Punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, iar punctul M' este mijlocul laturii $A'B'$ a triunghiului $A'B'C'$. Demonstrați că dacă $\Delta BCM \equiv \Delta B'C'M'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

18. Punctul H este în interiorul triunghiului ABC și $\Delta AHB \equiv \Delta BHC \equiv \Delta CHA$.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

b) Calculați măsura unghiului BHC.

19. În *figura 5* sunt ilustrate două cercuri secante, având centrele A, respectiv B. Cele două cercuri se intersectează în punctele M și N. Demonstrați că $\Delta AMB \equiv \Delta ANB$. Scrieți toate congruențele care au loc între elementele celor două triunghiuri.

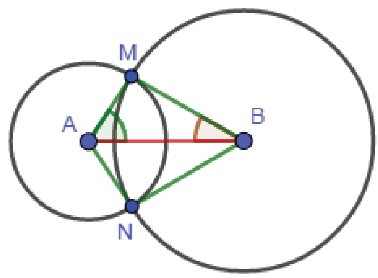


Fig. 5.

20. Pe dreptele a și b, $a \parallel b$ se consideră $A, D \in a$, $B, C \in b$ astfel încât AC este bisectoarea unghiului BAD, BD este bisectoarea ABC, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrați că:

a) $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$; b) $AB \parallel CD$; c) $AC \perp BD$.

21. Pe prelungirile laturilor AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M respectiv N astfel încât $AM \equiv AB$ și $AN \equiv AC$.

Să se demonstreze:

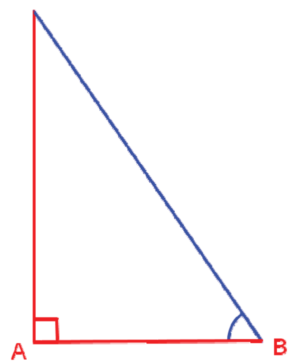
a) $MN \equiv BC$; b) $MN \parallel BC$.

6.9. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență

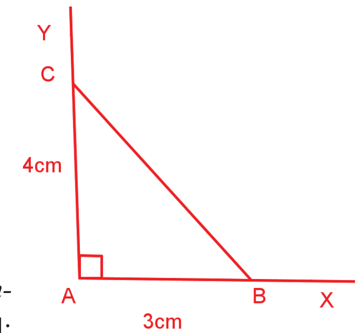
În lecțiile anterioare, am demonstrat că două triunghiuri sunt congruente, folosind doar trei congruențe. Pentru triunghiurile dreptunghice, lucrurile sunt și mai interesante. Unghiul drept, întotdeauna 90°, ne permite să căutăm doar două alte elemente corespunzătoare, congruente.

Ne amintim

Triunghiul care are un unghi drept se numește *triunghi dreptunghic*. Latura care se opune unghiului drept se numește *ipotenuză*. Laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*. În figura alăturată, triunghiul ΔABC este un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza BC și catetele AB și AC.

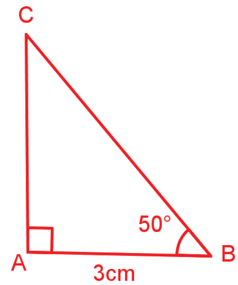


Rezolvăm și descoperim



1. Construiți un triunghi *ABC*, știind că $AB = 3$ cm, $\hat{A} = 90°$ și $AC = 4$ cm.
Rezolvare:
- construim un unghi $X\hat{A}Y$ cu măsura de 90°;
- pe semidreapta *AX* luăm un punct *B* astfel încât $AB = 3$ cm;
- pe semidreapta *AY* luăm un punct *C* astfel încât $AC = 4$ cm;
- punem în evidență segmentul *BC*, ΔABC este triunghiul căutat.

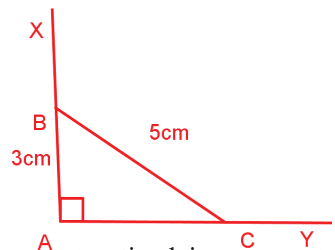
Observăm: Triunghiul *ABC* a fost construit conform *criteriului de construcție* LUL. Știind că $\hat{A} = 90°$, problema poate fi reformulată astfel: construiți un triunghi dreptunghi *ABC*, $\hat{A} = 90°$, cunoscând $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Criteriul LUL se transformă în *criteriul de construcție CC* (catetă – catetă)



2. Construiți un triunghi *ABC*, știind că $AB = 3$ cm, $\hat{A} = 90°$ și $\hat{B} = 50°$.
Rezolvare
- construim segmentul $AB = 3$ cm;
- construim perpendiculara în punctul *A* pe dreapta *AB*;
- măsurăm, cu raportorul, un unghi $A\hat{B}C = 50°$, ΔABC este triunghiul căutat.

Observăm: Triunghiul *ABC* a fost construit conform criteriului de construcție ULU. Având în vedere că $\hat{A} = 90°$, problema poate fi reformulată astfel: construiți un triunghi dreptunghi *ABC*, $\hat{A} = 90°$, cunoscând lungimea unei catete și măsura unghiului ascuțit, alăturat acestei catete. Criteriul ULU se transformă astfel, în *criteriul de construcție CU* (catetă – unghi).

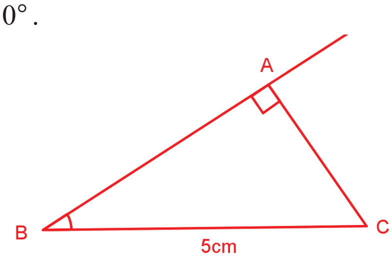
3. Construiți un triunghi *ABC*, știind că $AB = 3$ cm, $\hat{A} = 90°$ și $\hat{C} = 50°$.
Rezolvare: În problema 2. apare o catetă și unghiul ascuțit alăturat acestei catete, iar acum, apare o catetă și unghiul ascuțit, opus acestei catete. Știind că unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare, putem calcula unghiul alăturat catetei, complementul unghiului opus catetei, iar rezolvarea problemei se reduce la rezolvarea problemei 2, obținând *cazul de construcție notat CU* (catetă – unghi).



4. Construiți un triunghi *ABC*, știind că $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $\hat{A} = 90°$.
Rezolvare
- construim un unghi $X\hat{A}Y$;
- pe semidreapta *AX* luăm un punct *B*, astfel încât $AB = 3$ cm;
- cu centrul în punctul *B* construim un cerc de raza 5 cm și notăm cu *C* punctul de intersecție dintre cerc și semidreapta *AY*;
- triunghiul *ABC* este triunghiul căutat.

Observăm: Triunghiul *ABC* nu a fost construit folosind un criteriu de construcție deja cunoscut. Problema poate fi reformulată astfel: Construiți un triunghi dreptunghi *ABC*, $\hat{A} = 90°$ cunoscând lungimea unei catete și a ipotenuzei. Acest *criteriu de construcție se numește CI* (catetă – ipotenuză).

5. Construiți un triunghi *ABC*, știind că $\hat{A} = 90°$, $BC = 5$ cm și $\hat{B} = 30°$.
Rezolvare



- construim un segment $BC = 5$ cm;
- construim unghiul $C\hat{B}X$ cu măsura de 30°;
- construim perpendiculara din punctul *C* pe semidreapta *BX* și notăm cu *A* piciorul perpendicularei din punctul *C* pe semidreapta *BX*;
- triunghiul *ABC* este triunghiul căutat.

Observăm: Triunghiul *ABC* nu a fost construit folosind un criteriu de construcție deja cunoscut. Triunghiul *ABC* poate fi construit folosind un criteriu de construcție deja cunoscut, dacă ținem seama că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° și calculăm unghiul $\hat{C}$ astfel: $\hat{C} = 180° - (90° + 30°) = 180° - 120° = 60°$. Construim un triunghi *ABC*, cunoscând $\hat{A} = 90°$, $BC = 5$ cm și $\hat{B} = 30°$, ceea ce înseamnă că ne încadrăm în cazul ULU. Problema poate fi reformulată astfel: Construiți un triunghi dreptunghi ABC, $\hat{A} = 90°$ cunoscând lungimea ipotenuzei și măsura unui unghi ascuțit. Acest *criteriu de construcție se numește IU* (ipotenuză – unghi)

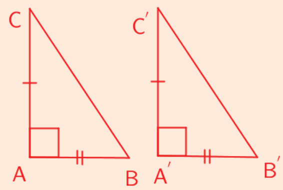
Conform criteriilor de construcție ale triunghiurilor dreptunghice, enunțate anterior, se pot formula criteriile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice:

1. Cazul CC	*2. Cazul CU*	*3. Cazul CI*	*4. Cazul IU*
(catetă – catetă)	*(catetă – unghi)*	*(catetă – ipotenuză)*	*(ipotenuză – unghi)*

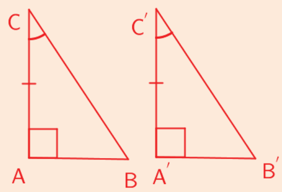
Rezumăm cunoștințele

Criteriile de congruență pentru triunghiurile dreptunghice

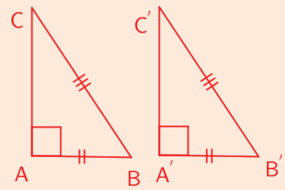
• *Criteriul CC (catetă – catetă)*:
Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



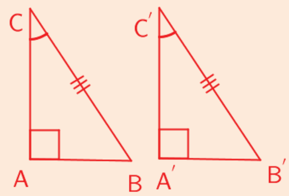
• *Criteriul CU (catetă – unghi)*:
Dacă două triunghiuri dreptunghice au o pereche de catete respectiv congruente și o pereche de unghiuri ascuțite respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



• *Criteriul CI (catetă – ipotenuză)*:
Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

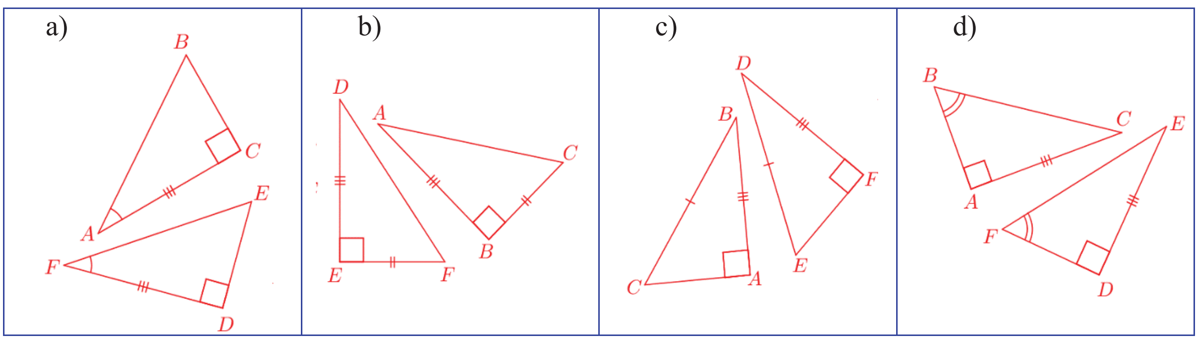


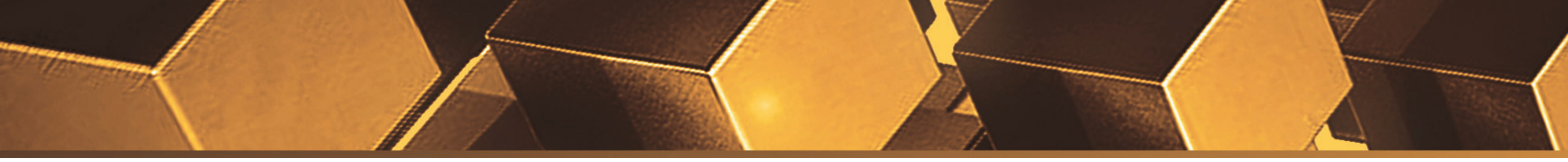
• *Criteriul IU (ipotenuză – unghi)*:
Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele respectiv congruente și o pereche de unghiuri ascuțite respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



Aplicăm cunoștințele

6. Se consideră triunghiurile dreptunghice ABC și DEF din figura de mai jos. Elementele marcate pe cele două figuri sunt congruente, demonstrați că cele două triunghiuri sunt congruente în fiecare caz, stabilind mai întâi, perechile de elemente congruente ale celor două triunghiuri și apoi cazul de congruență.





Ne verificăm

7. a) $AC = FD, \hat{A} \equiv \hat{F}, \hat{C} = \hat{D} = 90° \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta FED$ (CU);

b) $AB = DE, BC = EF, \hat{B} = \hat{E} = 90° \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$ (CC)

c) $AC = FD, BC = DE, \hat{A} = \hat{F} = 90° \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta FED$ (CI)

d) $BC = DE, \hat{B} \equiv \hat{D}, \hat{C} = \hat{E} = 90° \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta FDE$ (IU)

e) $BC = DE, \hat{B} \equiv \hat{D}, \hat{C} = \hat{E} = 90° \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta FDE$ (CU)

Activități de învățare

1. Se consideră triunghiurile ABC și DEF, cu $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF = 90°$. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Dacă $AB \equiv DE$ și $AC \equiv DF$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta ...$.

b) Dacă $BC \equiv EF$ și $AC \equiv DF$, atunci $\Delta ACB \equiv \Delta ...$.

c) Dacă $BC \equiv EF$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$, atunci $\Delta EDF \equiv \Delta ...$.

d) Dacă $AC \equiv DF$ și $\sphericalangle B + \sphericalangle F = 90°$, atunci $\Delta DEF \equiv \Delta ...$.

2. Triunghiurile MNP și ABC sunt congruente, $\sphericalangle M = \sphericalangle A = 90°$, iar MQ și AD sunt înălțimi ale celor două triunghiuri. Demonstrați că:

a) $MQ \equiv AD$; b) $PQ \equiv CD$; c) $\Delta MQP \equiv \Delta ADC$.

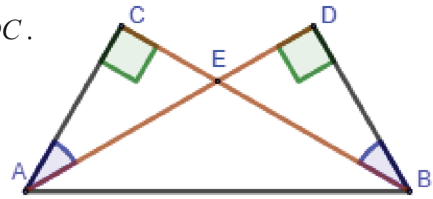


Fig. 1.

3. În *figura 1* $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$, $AD \cap BC = \{E\}$ și $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 30°$. Demonstrați că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$;

b) ΔABE este isoscel;

c) $\Delta ACE \equiv \Delta BDE$.

4. În *figura 2*, unghiul XOY este drept iar semidreapta OZ este opusă semidreptei OX. Cercul de centru O și rază 3 cm, intersectează semidreptele OX, OY, OZ respectiv în punctele A, B, C.

a) Determinați lungimile segmentelor OA, OB, OC și AC

b) Determinați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COA.

c) Demonstrați că $\Delta AOB \equiv \Delta BOC$; scrieți apoi, toate congruențele care au loc între elementele celor două triunghiuri.

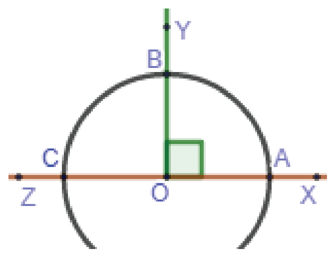


Fig. 2.

5. Punctul O este mijlocul segmentului AB, iar C și D sunt picioarele perpendicularelor din A, respectiv B pe o dreaptă d, care trece prin O. Demonstrați că:

a) $AC \equiv BD$; b) $AC \parallel BD$; c) $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$.

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 4\,\text{cm}, AC = 3\,\text{cm}$. Pe semidreapta BA, se reprezintă punctul D astfel încât $BD = 7\,\text{cm}$, iar pe semidreapta AC, se reprezintă punctul E astfel încât $AE = 4\,\text{cm}$. Demonstrați că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta AED$; b) $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$; c) $CD < CB$.

7. În *figura 3* dreptele AC și BD sunt perpendiculare pe dreapta AB, iar $AM + AC = BM + BD = AB$. Demonstrați că $CM \equiv DM$ și calculați măsurile unghiurilor triunghiului CDM

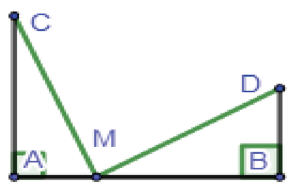


Fig. 3.

8. În figura 4, segmentele AB și CD se intersectează în punctul O iar unghiurile ABC și BAD sunt drepte. Se construiesc $AE \perp DC$, $BF \perp DC$, $E, F \in CD$. Știind că $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$, demonstrați că:

a) $\Delta AEO \equiv \Delta BFQ$;

b) O este mijlocul segmentului AB.

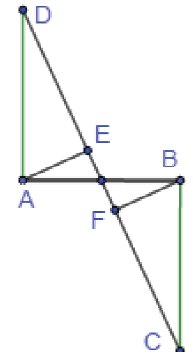


Fig. 4.

9. În interiorul unghiului ascuțit ABC, se consideră punctul D astfel încât $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°$ și $\Delta BAD \equiv \Delta BCD$. Știind că $AD \cap BC = \{P\}$ și $CD \cap AB = \{Q\}$, demonstrați că:

a) $\Delta ABP \equiv \Delta CBQ$; b) $\Delta ADQ \equiv \Delta CDP$.

10. Punctele distincte P și Q sunt situate pe mediatoarea segmentului AB, la aceeași distanță de dreapta AB. Demonstrați că $AP \equiv BP \equiv AQ \equiv BQ$.

11. Punctele A, B și C sunt necoliniare și $AB = BC$. Perpendiculara în A pe AC intersectează dreapta BC în punctul D iar perpendiculara în C pe AC intersectează dreapta AB în punctul E. Demonstrați că:

a) $AD \equiv CE$; b) $AE \equiv CD$; c) $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CED = 90°$

6.10. Metoda triunghiurilor congruente

Ne amintim

În lecțiile anterioare am învățat despre criteriile de congruență ale triunghiurilor. Vom vedea că aceste criterii sunt foarte utile în determinarea unor lungimi de segmente și unor măsuri de unghiuri sau în identificarea și demonstrarea unor relații, deci în rezolvarea problemelor. Unele propoziții matematice se numesc *axiome*, iar adevărurile exprimate de acestea se acceptă fără demonstrație, de exemplu:

1. *Axioma lui Euclid* sau axioma paralelelor: *printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la acea dreaptă.*
2. *Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.*

Alte propoziții matematice se numesc *definiții*, prin ele se introduc noțiuni noi, de exemplu:

1. *Bisectoarea unui unghi este semidreapta interioară unghiului, care determină cu laturile acestuia două unghiuri congruente.*
2. *Două unghiuri se numesc unghiuri complementare, dacă suma măsurilor lor este egală cu* $90°$.

Proprietățile matematice care se deduc, prin raționament, din axiome și definiții se numesc *teoreme*. Orice teoremă se poate enunța astfel: *„dacă ..., atunci ...”.*

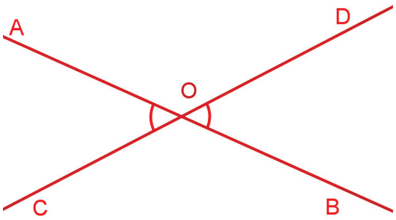
Partea din enunțul teoremei care urmează după *dacă* prezintă ceea ce este dat, ceea ce se presupune adevărat și se numește *ipoteza teoremei*.

Partea din enunțul teoremei care urmează după *atunci* anunță ceea ce trebuie să se demonstreze pe baza a ceea ce este dat și se numește *concluzia teoremei*.

Urmează *demonstrația teoremei.* Aceasta trebuie să convingă pe oricine că, acceptând ipoteza, concluzia nu poate în nici un caz să fie falsă, de exemplu:

1. Teoremă: *Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente.*

Vom realiza un desen care să ilustreze datele problemei.



Ipoteză: $\hat{AOC}$ și $\hat{BOD}$ – unghiuri opuse la vârf.

Concluzia: $\hat{AOC} = \hat{BOD}$

Demonstrația: Faptul că $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$ este echivalent cu faptul că semidreptele OA și OB respectiv OC și OD sunt semidrepte opuse, adică:

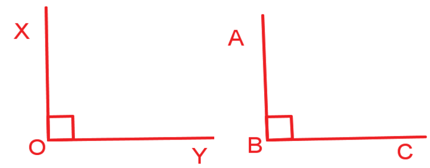
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} = 180^\circ - \widehat{AOD} \\ \widehat{AOD} + \widehat{AOC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOD} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{AOC}.$$

$\widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 180^\circ$ (definiția unghiurilor opuse la vârf, *AO, BO* semidrepte opuse)

$\widehat{AOD} + \widehat{AOC} = 180^\circ$ (definiția unghiurilor opuse la vârf, *DO, CO* semidrepte opuse)

Se scad relațiile și se obține: $\widehat{DOB} - \widehat{AOC} = 0^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{AOC}$.

Observăm



1. Atât *ipoteza* cât și *concluzia* unei teoreme pot să conțină una sau mai multe propoziții. Dacă schimbăm una sau mai multe propoziții din concluzie, cu una sau mai multe propoziții din ipoteză, obținem o nouă propoziție matematică numită *reciproca teoremei*. Unele reciproce sunt *adevărate* și devin la rândul lor teoreme, alte reciproce sunt *false*. Pentru reciprocă, teorema din care rezultă se numește *teoremă directă*. Vom numi *consecințe* ale unei teoreme o serie de rezultate care se obțin dintr-o teoremă și care pot fi considerate, la rândul lor teoreme.
2. *Reciproca* teoremei demonstrate anterior, ar putea fi reformulată astfel: „*Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci ele sunt opuse la vârf*”.
   Se poate constata foarte simplu că această propoziție, care este *reciproca teoremei* demonstrate anterior, *este falsă* și ca urmare *nu este o teoremă*.
3. Pentru a demonstra că o propoziție este falsă este suficient să găsim un *contraexemplu*, adică un caz în care propoziția nu este adevărată.
   În cazul nostru, considerăm unghiurile din figura alăturată, care sunt congruente dar nu sunt opuse la vârf. Avem că $\widehat{XOY} \equiv \widehat{ABC}$ deoarece $\widehat{XOY} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ dar nu sunt opuse la vârf.
   De multe ori, în problemele de geometrie, se cere să demonstrăm că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. Pentru a demonstra, se utilizează ***metoda triunghiurilor congruente***.
   Așa cum am învățat la cazurile de congruență ale triunghiurilor, pentru a demonstra congruența a două triunghiuri, sunt suficiente trei perechi de congruențe, corespunzătoare cazurilor de congruență (*ULU, LUL, LLL*). Dacă *două triunghiuri sunt congruente, conform definiției congruenței triunghiurilor, rezultă că toate elementele celor două triunghiuri sunt congruente, două câte două, deci mai găsim încă trei perechi de elemente congruente.*

Pentru a rezolva o problemă prin metoda triunghiurilor congruente se parcurg următorii pași:
- se identifică două triunghiuri care conțin cele două segmente sau cele două unghiuri, despre care trebuie să arătăm că sunt congruente;
- se identifică, în cele două triunghiuri, segmente și unghiuri, în poziții corespunzătoare, despre a căror congruență știm sau putem demonstra;
- identificăm atâtea elemente câte avem nevoie să ne încadrăm într-un caz de congruență;
- conform cazului de congruență identificat, triunghiurile sunt congruente;
- din definiția triunghiurilor congruente, deducem că toate elementele sunt respectiv congruente, adică și segmentele sau unghiurilor cerute.

Vocabular

Definiție *– propoziție matematică prin care se introduc noțiuni noi.*
Axiomă *– propoziție matemtică ce exprimă adevăruri acceptate fără demonstrație.*
Teoremă *– propoziție matematică care se deduce prin raționamente logice din axiome și definiții, se demonstrează.*

Rezumăm cunoștințele

Orice teoremă cuprinde trei părți: ***ipoteză***, ***concluzie*** *și* ***demonstrație***. *Ipoteza reprezintă ceea ce se consideră adevărat.* ***Concluzia*** *reprezintă ceea ce trebuie demonstrat.* ***Demonstrația*** *reprezintă rezolvarea problemei, adică un șir de raționamente logice prin care se ajunge de la ipoteză la concluzie.*

Pentru a demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente, se folosește ***metoda triunghiurilor congruente***, *care presupune următorul raționament:*

- *identificarea a două triunghiuri care conțin ca elemente laturile sau unghiurile căutate;*
- *încadrarea într-un caz de congruență (LUL, ULU, LLL);*
- *folosind definiția triunghiurilor congruente, rezultă că toate elementele sunt congruente două câte două.*

Aplicăm cunoștințele

1. Se consideră trei puncte necoliniare, astfel încât unghiurile $A\hat{B}C$ și $A\hat{C}B$ să fie congruente.

a) Arătați că punctul A este egal depărtat de punctele B și C.

b) Ce fel de triunghi este triunghiul ΔABC?

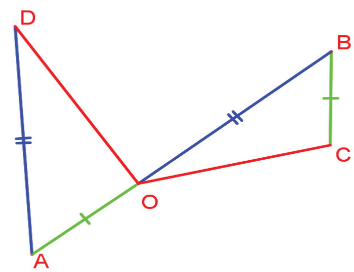
c) Reformulați problema sub forma unei teoreme.

2. Se consideră punctele coliniare A, O, B și respectiv M, O, N, astfel încât $AO \equiv BO$ și $MO \equiv NO$. Demonstrați că:

a) $AM \equiv BN$; b) $AN \equiv BM$; c) $\Delta AMN \equiv \Delta BNM$.

3. În figura alăturată, se știe că A, O, B, puncte coliniare, $AD \equiv BO, AO \equiv BC$ și $AD \parallel BC$.

Demonstrați că $DO \equiv CO$.



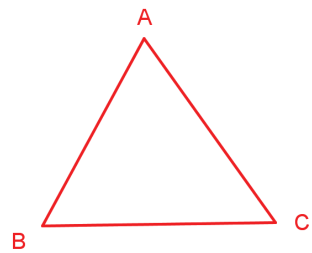
Ne verificăm

1. a) *Ipoteza*: figura alăturată, $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$.

Concluzia: $AB = AC$.

Demonstrație: folosim metoda triunghiurilor congruente, comparăm ΔABC cu ΔACB. $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$ (ipoteză) (1), $BC = CB$ (latură comună) (2), $A\hat{C}B \equiv A\hat{B}C$ (ipoteză) (3).

Din (1), (2), (3) $\overset{ULU}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACO \overset{def}{\Rightarrow} AB = AC$.



b) Triunghiul ΔABC este isoscel.

c) Dacă într-un triunghi, unghiurile alăturate bazei sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

2. *Ipoteza*: figura alăturată, $AO \equiv BO, MO \equiv NO$.

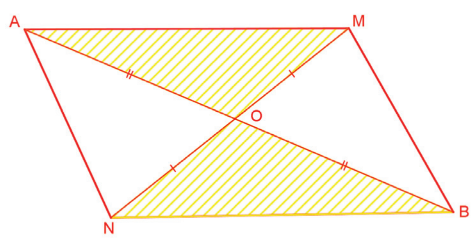
Concluzia: a) $AM \equiv BN$.

Demonstrație: Compar ΔAMO cu ΔBNO.

$AO \equiv BO$ (ipoteză) (1), $MO \equiv NO$ (ipoteză) (2)

$A\hat{O}M \equiv B\hat{O}N$ (unghiuri opuse la vârf) (3),

Din (1), (2), (3) $\overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta AMO \equiv \Delta BNO \overset{def}{\Rightarrow} AM \equiv BN$.



Concluzia: b) $AN \equiv BM$.

Demonstrație: Compar ΔANO cu ΔBMO. $AO \equiv BO$ (ipoteză) (1), $NO \equiv MO$ (ipoteză) (2)

$A\hat{O}N \equiv B\hat{O}M$ (unghiuri opuse la vârf) (3)Din (1), (2), (3) $\overset{ULU}{\Rightarrow} \Delta ANO \equiv \Delta BMO \overset{def}{\Rightarrow} AN \equiv BM$.

Concluzia: c) $\Delta AMN \equiv \Delta BNM$.

Demonstrație: Compar ΔAMN cu ΔBNM. $AM \equiv BN$ (demonstrat la a) (1) $AN \equiv BM$ (demonstrat la b) (2). $MN \equiv NM$ (latură comună) (3). Din (1), (2), (3) $\overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta AMN \equiv \Delta BNM$.

3. *Ipoteza*: figura, $AD \equiv BO, AO \equiv BC, AD \parallel BC$.

Concluzia: $DO \equiv CO$.

Demonstrație: Compar ΔADO cu ΔBOC. $AD \equiv BO$ (ipoteză) (1). $AO \equiv BC$ (ipoteză) (2) $D\hat{A}O \equiv O\hat{B}C$ (unghiuri alterne interne) (3).

Din (1), (2), (3) $\overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta ADO \equiv \Delta BOC \overset{def}{\Rightarrow} DO = OC$.

Activități de învățare

1. Pe segmentul AB se consideră punctul O, iar M și N sunt două puncte situate de o parte și de alta a dreptei AB astfel încât $OM \equiv ON$ și $BM \equiv BN$. Demonstrați că $AM \equiv AN$ și $MN \perp AB$.

2. Se consideră triunghiurile oarecare ABC și DEF. Pentru fiecare din situațiile următoare, realizați câte un desen care să corespundă datelor și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Completați, în căsuța alăturată enunțului, litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

a) Dacă $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$ și $CA \equiv FD$, atunci:

a_1) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$; ☐ a_2) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle E$; ☐ a_3) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle F$. ☐

b) Dacă $AB \equiv DE$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $BC \equiv EF$, atunci:

b_1) $AC \equiv EF$; ☐ b_2) $AC \equiv DF$; ☐ b_3) $AC \equiv DE$. ☐

c) Dacă $CA \equiv FE$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$, atunci:

c_1) $AB \equiv DF$; ☐ c_2) $AB \equiv DE$; ☐ c_3) $AB \equiv EF$. ☐

3. În *figura 1*, $AB \equiv CD$ și $BC \equiv AD$.

a) Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$.

b) Completați spațiile libere astfel încât congruențele să fie adevărate: $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle \ldots$, $\sphericalangle \ldots \equiv \sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle \ldots$.

Discutați cu colega/colegul de bancă argumentele folosite

Fig. 1.

4. Despre triunghiurile DEF și MNP se știe că $DE \equiv MN$, $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle M$ și $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle N$.

a) Demonstrați că $\Delta DEF \equiv \Delta MNP$;

b) Completați spațiile libere pentru ca enunțurile obținute să fie propoziții adevărate: $EF \equiv \ldots$ și $\ldots \equiv MP$.

5. Pe laturile unghiului propriu XOY se consideră punctele $A, B \in OX$ astfel încât $OA = 3\,\text{cm}$, $OB = 5\,\text{cm}$ și punctele $C, D \in OY$ astfel ca $OD = 5\,\text{cm}$, $CD = 2\,\text{cm}$ iar $OC < OD$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$. c) Demonstrați că $AD \equiv BC$.

6. Se prelungesc laturile AB și AC, ale triunghiului ABC, cu segmentele $AM \equiv AB$ și $AN \equiv AC$. Demonstrați că:

a) $MN \equiv BC$; b) $MN \parallel BC$.

7. În *figura 2*, triunghiurile ABC și DBC sunt isoscele, cu baza comună BC. Demonstrați că:

a) $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$;

b) AD este bisectoarea unghiului BAC.

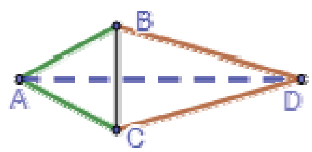


Fig. 2.

8. Pe laturile unghiului propriu XOY se consideră punctele $A \in OX$ și $B \in OY$ astfel încât $OA = OB$. Un punct C, situat în interiorul unghiului XOY, satisface condiția $CA = CB$. Știind că $\sphericalangle AOC = 41°30'$, calculați măsura unghiului XOY.

9. Se dă unghiul propriu XOY. Pe semidreapta OX se consideră punctele distincte A și B astfel încât $OA = AB = 2 \cdot a$ iar pe semidreapta OY se consideră punctele distincte C, D, E, F astfel încât $OC = CD = DE = EF = a$.

a) Demonstrați că $AF \equiv BD$. b) Demonstrați că $AD \parallel BF$.

c) Calculați măsurile unghiurilor triunghiurilor OAD și OBF, în funcție de u, măsura unghiului XOY.

10. În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii BC, iar punctul $P \in AM$ și $P \neq M$. Demonstrați că dacă $BP \equiv CP$, atunci $AB \equiv AC$. Analizați toate cazurile posibile.

11. Semidreptele AP și BQ sunt situate pe două drepte paralele, punctele P și Q fiind de o parte și de alta a dreptei AB iar $AP \equiv BQ$. Demonstrați că:

a) $AQ \equiv BP$; b) $\Delta APQ \equiv \Delta BQP$.

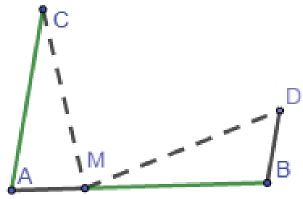


Fig. 4.

12. În *figura 4* dreptele AC și BD sunt paralele iar $\Delta ACM \equiv \Delta BMD$. Determinați măsura unghiului CMD.

13. Desenați punctele coliniare A, B, C și D astfel încât $AB = BC = CD$. De o parte a dreptei AB construiți triunghiurile echilaterale ABE și BDF, iar de cealaltă parte a dreptei AB construiți triunghiurile echilaterale ACH și CDG. Demonstrați că:

a) $AG \equiv DE$; b) $\Delta AGH \equiv \Delta DEF$.

14. În *figura 5*, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FED$, $BC \equiv ED$ și $AB = EF$.
Demonstrați că: $AD \equiv FC$ și $AC \parallel FD$.

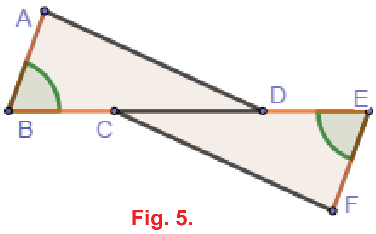


Fig. 5.

6.11. Proprietățile triunghiului isoscel. Proprietățile triunghiului echilateral

Triunghiul isoscel și triunghiul echilateral au câteva proprietăți specifice, foarte utile în rezolvarea problemelor: proprietatea unghiurilor unui triunghi isoscel și ale unui triunghi echilateral, relații între liniile importante într-un triunghi isoscel și într-un triunghi echilateral, metode prin care se poate demonstra că un triunghi este isoscel sau echilateral.

Ne verificăm

1. a) Definiția triunghiului isoscel; b) definiția triunghiului echilateral.

2. a) Construiți un triunghi ABC cu AB = 3 cm, $\hat{A} = 100°$, AC = 6,5 cm;

b) Construiți înălțimea corespunzătoare bazei BC și notați-o cu AH;

c) Construiți bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$ și notați-o $AA', A' \in BC$;

d) Construiți mediana AM; e) Construiți mediatoarea laturii BC și notați-o cu d.

Triunghiul construit este un triunghi oarecare. Observați că cele patru elemente desenate, bisectoarea unghiului opus unei laturi (bază) și celelalte trei linii importante, corespunzătoare acestei laturi (mediana, înălțimea și mediatoarea), sunt situate pe drepte distincte. Repetați cerințele problemei 2. considerând AB, baza triunghiului, apoi considerând AC bază a triunghiului. Cele patru elemente reprezentate sunt, de fiecare dată, situate pe drepte distincte. Vom *cerceta* dacă într-un triunghi isoscel sau echilateral se întâmplă la fel.

3. *Se lucrează individual*

a) Pe o foaie de hârtie, desenați triunghiul isoscel cu $AB = AC$ = 4 cm și $\hat{A} = 45°$.

b) Construiți bisectoarea unghiului $\hat{A}$, apoi mediana AM, mediatoarea și înălțimea, corespunzătoare laturii BC. Ce observați?

c) Decupați triunghiul ABC și pliați-l după dreapta AM. Ce observați?

Observăm că *bisectoarea corespunzătoare unghiului* $\hat{A}$ *și celelalte linii importante corespunzătoare bazei BC, determină segmente identice. Prin pliere după dreapta* AM *, unghiul* $\hat{C}$ *s-a suprapus peste unghiul* $\hat{B}$ *și latura AC s-a suprapus peste latura AB.*

Știm, din definiția triunghiului isoscel, că $AB \equiv AC$.

Deducem că, dacă triunghiul este isoscel, *unghiurile alăturate bazei sunt congruente*.

Din faptul că cele două triunghiuri *ABM* și *ACM* s-au suprapus, rezultă că dreapta după care am pliat triunghiul, adică *AM*, este *axă de simetrie a triunghiului ABC.*

Propozițiile enunțate au și reciproce: *dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci triunghiul este isoscel și dacă într-un triunghi o linie importantă are două calități* (mediană și bisectoare, sau mediană și înălțime, sau mediană și mediatoare, sau bisectoare și mediană, sau înălțime și mediatoare), *atunci triunghiul este isoscel*.

Pentru a arăta că un triunghi este isoscel este suficient să arătăm că: *unghiurile alăturate bazei sunt congruente, sau că două linii importante, corespunzătoare unei laturi, coincid.*

Dacă un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 60°, atunci *triunghiul este echilateral*.

Avem următoarele cazuri:

a) ΔABC este isoscel cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$ și $\hat{A} = 60°$, rezultă $\hat{B} = \hat{C} = (180° - 60°) : 2 = 120° : 2 = 60°$.

b) ΔABC este isoscel cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$ și $\hat{B} = 60°$, rezultă $\hat{B} = \hat{C} = 60° \Rightarrow \hat{A} = 180° - 120° = 60°$.

Deci, indiferent care dintre unghiurile unui triunghi isoscel este de $60°$, rezultă că și celelalte unghiuri au $60°$, adică triunghiul este echilateral.

În cele ce urmează vom analiza *triunghiul echilateral și proprietățile acestuia*.

4. *Se lucrează pe grupe*

Fiecare grupă își alege un căpitan, care va primi sarcinile de realizat de la profesor și își va instrui apoi grupa. Fiecare copil are o coală de hârtie, instrumente geometrice, creion, un foarfece și va construi un triunghi echilateral *ABC* cu latura de 6 cm.

Grupa 1 va construi bisectoarele unghiurilor triunghiului *ABC* și va nota cu *I* punctul de intersecție al bisectoarelor. Căpitanul se va asigura că cei din grupa lui cunosc noțiunea de bisectoare și procedeul de construcție al bisectoarelor.

Grupa 2 va construi înălțimile triunghiului *ABC* și va nota cu *H* punctul de intersecție al înălțimilor. Căpitanul se va asigura că cei din grupa lui cunosc noțiunea de înălțime și procedeul de construcție al înălțimilor.

Grupa 3 va construi mediatoarele laturilor triunghiului *ABC* și va nota cu *O* punctul de intersecție a mediatoarelor. Căpitanul se va asigura că cei din grupa lui cunosc noțiunea de mediatoare a laturilor triunghiului și procedeul de construcție a mediatoarelor.

Grupa 4 va construi medianele triunghiului *ABC* și va nota cu *G* punctul de intersecție a medianelor. Căpitanul se va asigura că cei din grupa lui cunosc noțiunea de mediană în triunghi și procedeul de construcție a medianelor.

După ce toți elevii au rezolvat sarcinile de lucru, decupați triunghiurile și suprapuneți triunghiurile din grupa 1 cu cele din grupa 2, cu cele din grupa 3 și cu cele din grupa 4.

Prin suprapunerea triunghiurilor se poate observa că *cele patru linii importante* (*bisectoarea, înălțimea, mediatoarea și mediana*) *coincid*, chiar dacă elevii au avut sarcini diferite.

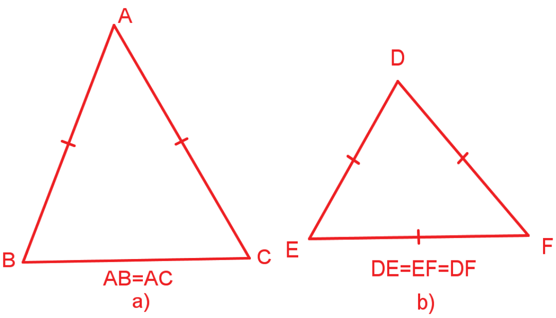
Se observă că *punctul de intersecție a bisectoarelor* (centru cercului înscris), *punctul de intersecție al înălțimilor* (ortocentrul), *punctul de intersecție a mediatoarelor* (centrul cercului circumscris) și *punctul de intersecție al medianelor* (centrul de greutate) *coincid*.

Într-un triunghi echilateral, centrul cercului înscris, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate coincid și se află la o treime de bază și la două treimi de vârf, pe fiecare linie importantă. Acest punct este *egal depărtat de laturile triunghiului* și de *vârfurile triunghiului*.

Rezumăm cunoștințele

- *Într-un **triunghi isoscel**, unghiurile alăturate bazei sunt congruente.*
- *Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci el este isoscel, laturile congruente fiind cele opuse unghiurilor congruente.*
- *Într-un triunghi isoscel mediatoarea, înălțimea, mediana corespunzătoare bazei și bisectoarea unghiului opus bazei, determină segmente identice(se suprapun).*
- *Dacă într-un triunghi, o linie importantă are două calități, atunci triunghiul este isoscel, laturile congruente fiind cele care pornesc din același vârf cu liniile importante considerate.*
- *Într-un triunghi echilateral, toate unghiurile sunt congruente, fiecare unghi având măsura de $60°$.*
- *Dacă într-un triunghi toate unghiurile sunt congruente, atunci triunghiul este echilateral.*
- *Un triunghi isoscel cu un unghi de $60°$ este echilateral.*
- *Într-un **triunghi echilateral**, bisectoarea oricărui unghi, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii opuse acelui unghi, coincid.*
- *Într-un triunghi echilateral, centrul cercului înscris, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate, coincid.*

Ne verificăm



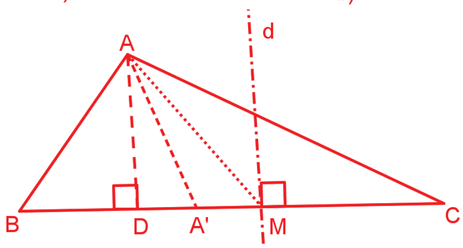
1. a) Se numește triunghi isoscel, triunghiul cu două laturi congruente *(AB=AC);* b) Se numește triunghi echilateral triunghiul cu toate laturile congruente (*DE* = *EF* = *DF*).

2. $AD \perp BC, D \in BC, AD$ înălțime,

$B\hat{A}A' = C\hat{A}A', AA'$ bisectoarea unghiului ABC,

$BM = MC, M \in BC, AM$ mediană,

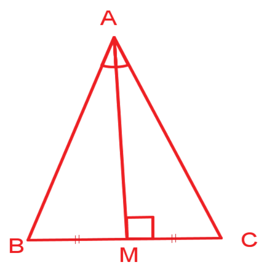
$BM = MC, M \in BC, d \perp BC, d$ mediatoarea laturii BC



3. a) Figura alăturată.

b) $AB = BC$, triunghiul ABC isoscel $B\hat{A}M = C\hat{A}M$, AM bisectoare, $BM = CM$, $M \in BC$, AM, mediană, $AM \perp BC$, $M \in BC, AM$ înălţime, $BM = CM, M \in BC$, $BM = CM, M \in BC, AM \perp BC, AM$ *mediatoare.*

c) Cele două triunghiuri formate, ABM și ACM se suprapun. Unghiul $\hat{C}$ se suprapune peste unghiul $\hat{B}$ și latura *AC* se suprapune peste latura *AB*.



4. Grupa 1. Bisectoarea unui unghi este semidreapta interioară unghiului, cu originea în vârful unghiului, care formează cu laturile unghiului, două unghiuri congruente.

Pentru a construi bisectoarea unghiului $\hat{A}$, se măsoară unghiul cu raportorul și se trasează bisectoarea AA'. Se repetă operația pentru bisectoarea unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ și se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor.

Grupa 2. O înălțime a unui triunghi este segmentul determinat de un vârf al triunghiului cu piciorul perpendicularei din acel vârf, pe latura opusă. Pentru a construi înălțimea corespunzătoare bazei *BC,* se fixează echerul astfel încât o catetă să se sprijine pe baza *BC*, iar cealaltă să treacă prin punctul *A*.

Se repetă procedeul pentru celelalte două înălțimi ale triunghiului ABC și se notează cu H punctul de intersecție a înălțimilor, care este și ortocentrul triunghiului ABC.

Grupa 3. Mediatoarea unei laturi a triunghiului ABC este perpendiculara pe mijlocul laturii respective. Pentru a construi mediatoarea laturii BC, notăm cu M mijlocul laturii BC și construim perpendiculara în punctul M pe latura BC. Se repetă procedeul pentru mediatoarele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC și se notează cu O punctul de intersecție al mediatoarelor care este și centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Grupa 4. O mediană a unui triunghi este segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse. Pentru a construi, de exemplu, mediana AM, $M \in BC$ se măsoară latura BC, se fixează mijlocul laturii și se notează cu M, apoi se pune în evidență segmentul AM. Se repetă procedeul, pentru fiecare mediană și se notează cu G, punctul de intersecție a medianelor, care este și centrul de greutate al triunghiului.

Activități de învățare

1. Construiți un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$, pentru fiecare set de date:

a) $AB = 4$ cm, $\sphericalangle A = 40°$; b) $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm; c) $BC = 8$ cm, $\sphericalangle A = 70°$.

2. Triunghiul ABC este isoscel. Calculați lungimea laturii BC, pentru fiecare set de date, analizând toate cazurile posibile.

a) $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm; b) $AB = 3$ cm și $AC = 7$ cm;

c) Perimetrul triunghiului este 8 cm iar lungimile laturilor sunt exprimate în cm, prin numere naturale.

3. Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are măsura de 40°. Calculați măsurile celorlalte unghiuri, analizând toate cazurile posibile.

4. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile 80°, respectiv 50°. Stabiliți natura triunghiului.

5. În triunghiul isoscel ABC, se construiește $EF \parallel BC$, $E \in AB$ și $F \in AC$. Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel, analizând toate cazurile posibile.

6. Punctul M este mijlocul laturii BC, a triunghiului ABC iar $AM \perp BC$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel; numiți baza acestuia. $BC = 14$ cm, $M \in BC$

7. Triunghiul ABC este isoscel, $AB \equiv AC$, $BC = 14$ cm, $M \in BC$ și $BM = 7$ cm. Demonstrați că $\sphericalangle AMC = 90°$.

8. În triunghiul ABC, se consideră înălțimea AD, iar E și F sunt picioarele perpendicularelor din punctul D pe AB respectiv AC. Demonstrați că:

a) Dacă $DE \equiv DF$, atunci ΔABC este isoscel.

b) Dacă ΔABC este isoscel, atunci $DE \equiv DF$.

9. În triunghiul ABC, AA' este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $A' \in BC$. Dacă $AA' \perp BC$, demonstrați că triunghiul ABC este isoscel; numiți baza acestuia.

10. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$ și $AP \perp BC, P \in BC$.

a) Calculați măsura unghiului BAP.

b) Dacă D este mijlocul segmentului AB, calculați măsura unghiului APD.

11. În triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, punctul M este mijlocul laturii BC, $\sphericalangle BAM = 20°$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiurilor ABM și ABC.

12. Punctul Q aparține laturii NP a triunghiului MNP.

a) Dacă $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle PMQ$ și $NQ = 10$ cm, calculați lungimea laturii NP și măsura unghiului MQN.

b) Dacă $MN \equiv MP$, $NQ \equiv PQ$ și $\sphericalangle NMQ = 24°$, calculați $\sphericalangle NMP$ și $\sphericalangle MQP$.

13. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și $AO \equiv AM$. Demonstrați că $AM \parallel BO$.

14. În triunghiul isoscel ABC, cu baza BC, considerăm $CD \perp AB$, $D \in AB$. Măsurile unghiurilor BCD și ACD sunt direct proporționale cu numerele 2 și 8. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

15. În interiorul unghiului ascuțit XOY, se consideră punctul P. Punctele A și B sunt simetricele punctului P față de dreptele OX respectiv OY.

a) Demonstrați că triunghiul AOB este isoscel. $\sphericalangle A = 120°$

b) Dacă $\sphericalangle XOY = 34°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului AOB.

16. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle A = 120°$ se consideră $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $DE \perp AC$, $E \in AC$. Perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta DE în punctul F. Demonstrați că triunghiul ADF este isoscel.

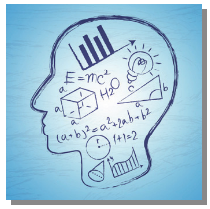
17. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB \equiv AC$ și semidreapta AD, opusă semidreptei AC. Demonstrați că bisectoarea unghiului BAD este paralelă cu dreapta BC.

18. În triunghiul ABC se consideră punctele D, pe latura AB și E, pe latura BC, cu proprietățile: $AD = x$ cm, $BD = y$ cm, $BE = 5$ cm, $BC = 12$ cm și $\Delta ABE \equiv \Delta CBD$.

a) Aflați numerele x și y. b)Dacă $AE \cap CD = \{P\}$, arătați că triunghiul APC este isoscel.

19. În triunghiul echilateral ABC, AD este bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$, BE este înălțime și F este mijlocul laturii AB, iar $AD \cap BE = \{G\}$. Demonstrați că:

a) $AD \perp BC$;
b) $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CBE$;
c) $\sphericalangle AFC = 90°$;
d) $AE \equiv EC$;
e) $BF \equiv CE$;
f) ΔBFD este echilateral;
g) $AD \perp EF$;
h) $BE \equiv CF \equiv AD$;
i) $\triangle DEF$ este echilateral.
j) punctele C, G, F sunt coliniare.



20. Pe laturile AB, BC, AC, ale triunghiului echilateral ABC, se consideră punctele D, E, respectiv F, astfel încât $AD \equiv BE \equiv CF$. Demonstrați că triunghiul DEF este echilateral.

21. Triunghiul ABC este echilateral, iar bisectoarele unghiurilor exterioare B și C se intersectează în punctul D. Demonstrați că ΔBCD este echilateral.

22. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2 \cdot (\sphericalangle A)$ și punctul P în interiorul triunghiului astfel încât $PB = BC = CP$.

a)Demonstrați că $\Delta ABP \equiv \Delta ACP$; b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului APC.

23. Triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$, iar O este punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor AB și BC. Știind că $\sphericalangle BOC = 120°$, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

24. Triunghiul ABC este echilateral, $AD \perp BC, D \in BC$, iar E este mijlocul laturii AC. Arătați că triunghiul CDE este echilateral.

25. Desenați medianele AD și BE ale triunghiului echilateral ABC și reprezentați punctul G, în care acestea se intersectează.

a) Dacă $GD = 2$ cm, calculați lungimile segmentelor AD și GE.

b) Dacă $AD + BE = 24$ cm, calculați distanța de la punctul G la dreapta AB.

26. Punctul C aparține segmentului AB. De aceeași parte a dreptei AB, se construiesc triunghiurile echilaterale ACD și CBE. Realizați, folosind instrumentele geometrice, configurația necesară și demonstrați că $AE \equiv BD$.

27. Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC. Arătați că:

a) Dacă ΔABC este echilateral, atunci $HA = HB = HC$.

b) Dacă $HA = HB = HC$, atunci ΔABC este echilateral.

28. Triunghiul ABC, din figura 1, este echilateral, $AM \perp AC, BN \perp AB$, $CQ \perp BC$ și $AM = BN = CQ$. Demonstrați că triunghiul MNQ este echilateral.

29. Pe latura BC a triunghiului echilateral ABC, se consideră punctele D și E astfel încât $BD = DE = EC$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează BC în punctul M.

a) Demonstrați că M este mijlocul segmentului DE.

b) Demonstrați că distanța de la punctul D la dreapta AC este egală cu distanța de la punctul E la dreapta AB.

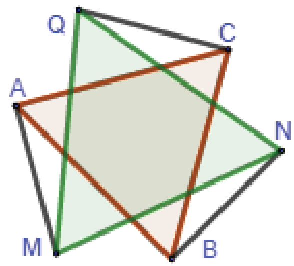
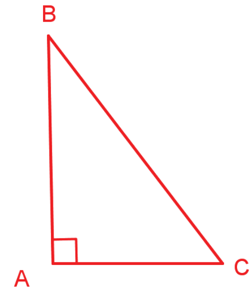


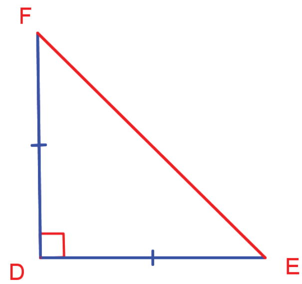
Fig. 1.

6.12. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice

Ne amintim



Ne amintim: „Triunghiul dreptunghic este triunghiul care are un unghi drept. Triunghiul ABC din figura alăturată, este dreptunghic pentru că măsura unghiului $\hat{A}$ este egală cu 90°. Laturile unghiului drept se vor numi *catete* (AB și AC sunt catete), iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză* (BC este ipotenuză). În orice triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt complementare ($\hat{B} + \hat{C} = 90°$) și reciproc, dacă într-un triunghi, unghiurile ascuțite sunt complementare, atunci triunghiul este dreptunghic.



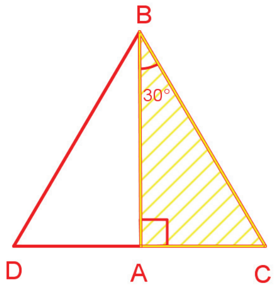
Desenați, pe caiete, câte un triunghi dreptunghic. Măsurați catetele, apoi ipotenuza și observați că: fiecare catetă este mai mică decât ipotenuza (în $\Delta ABC, AB < BC, AC < BC$, iar în $\Delta DEF, DE < FE, DF < FE$).

Desenați un triunghi dreptunghic isoscel (ca ΔDEF) și alegeți, ca bază, ipotenuza triunghiului. Măsurați unghiurile de la bază și comparați valorile găsite. Demonstrați, apoi, folosind proprietatea unghiurilor de la baza triunghiului isoscel, că: În orice triunghi dreptunghic isoscel, unghiurile ascuțite sunt congruente, fiecare având măsura 45°.

Vom deduce, apoi vom demonstra un rezultat foarte util în rezolvarea problemelor.

Activitate practică: Desenați pe un carton subțire, un triunghi dreptunghic ABC, cu $B = 30°$. Îndoiți cartonul după dreapta AB, așa încât să vedeți vârfurile triunghiului, înțepați cartonul cu vârful compasului, în punctul C, dezdoiți cartonul, notați punctul obținut prin perforare cu D și desenați segmentele BD și AD. Ați obținut configurația alăturată. Puteți constata, prin măsurători, că ΔBDC este echilateral și că BD, fiind înălțime, va fi și mediană, deci $AC = \frac{DC}{2} = \frac{BC}{2}$. Este ușor să verificăm și reciproca; dacă triunghiul dreptunghic ABC se construiește folosind faptul că $AB = \frac{BC}{2}$ și repetăm procedeul de pliere și înțepare, vom crea triunghiul echilateral ABD, din care deducem că AM este bisectoare, deci $\sphericalangle ABC = 30°$. Am descoperit următoarele rezultate:

Teorema directă. Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit cu măsura de 30°, *atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.* Vom scrie teorema sub forma:



Ipoteză: $\Delta ABC,\ \hat{A} = 90°,\ \hat{B} = 30°$ *Concluzia*: $AC = \dfrac{BC}{2}$

Demonstrație: Realiza o construcție ajutătoare, sugerată de activitatea practică. Vom nota cu D simetricul punctului C față de punctul A, $A \in DC$ și $AD = AC$ și vom compara ΔADB cu ΔACB.

$AD = AC$ (definiția simetricului). (1), $AB = AB$ (latură comună) (2)

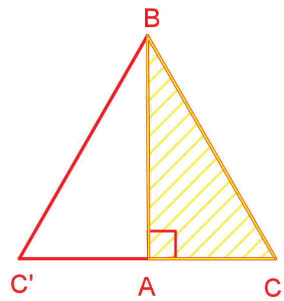
$D\hat{A}B = C\hat{A}B = 90°$ (D, A, C coliniare și $C\hat{A}B = 90°$) (3)

Din (1), (2) și (3) $\overset{C.C}{\Rightarrow}$ $\Delta ADB \equiv \Delta ACB \overset{def}{\Rightarrow} BD = BC$ *și* $D\hat{B}A = C\hat{B}A = 30°$.

Dar, $D\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}A = 30° + 30° = 60°$. Cum triunghiul DCB este isoscel, cu măsura unghiului $D\hat{B}C = 60°$, rezultă ca triunghiul DCB este echilateral, adică $DC = BD = BC$. Cum $AC = \dfrac{DC}{2}$ și $DC = BC$, rezultă $AC = \dfrac{BC}{2}$.

Teorema reciprocă. Dacă într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci măsura unghiului opus acestei catete este egală cu 30°. Vom scrie teorema sub forma:

Ipoteză: $\Delta ABC,\ \hat{A} = 90°,\ AC = \dfrac{BC}{2}$ *Concluzia*: $C\hat{B}A = 30°$



Demonstrație: Realizăm o construcție ajutătoare, ca în figura alăturată. Vom nota cu C' simetricul punctului C față de punctul A, $A \in CC'$ și $AC' = AC$ și vom compara ΔACB cu $\Delta AC'B$.

$AC' = AC$ (definiția simetricului) (1)

$C'\hat{A}B = C\hat{A}B = 90^0$ (C', A, C coliniare și $C\hat{A}B = 90^0$) (2)

$AB = AB$ (latură comună) (3)

Din (1), (2) și (3) $\overset{C.C}{\Rightarrow} \Delta C'AB \equiv \Delta CAB \overset{def}{\Rightarrow} BC' = BC$ (4) și că $A\hat{B}C' = A\hat{B}C$ (5).

Din ipoteză $AC = \dfrac{BC}{2}$ și cum $AC = \dfrac{CC'}{2}$ rezultă $BC = CC'$ (6).

Din (4) și (6) rezultă triunghiul BCC' este echilateral și ținând de (5) rezultă $C\hat{B}A = C'\hat{B}A = \dfrac{60°}{2} = 30°$ adică, $C\hat{B}A = 30°$.

Activitate practică:

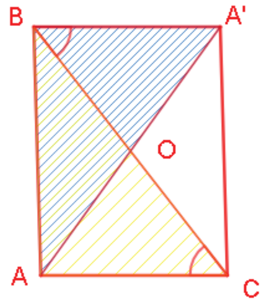
1. Desenați pe un carton subțire, un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Construiți mediana AM, corespunzătoare ipotenuzei, măsurați mediana construită și comparați-o cu lungimile segmentelor BM și CM. Construiți cercul cu centrul M și de rază MA, cu atenție. Veți constata că cercul trece și prin punctele B și C. Căutați o justificare! Deducem următoarele rezultate:

2. *Teoremă directă: În orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea acesteia*. Vom scrie teorema sub forma:

Ipoteză: $\Delta ABC,\ \sphericalangle A = 90°,\ O \in BC, OB = OC$ *Concluzia*: $AO = \dfrac{BC}{2}$

Demonstrație: Fie O mijlocul laturii BC, atunci $BO = CO$ și AO este mediană. Fie A' simetricul punctului A față de punctul O, $O \in AA'$ și $A'O = AO$.

a) Comparăm $\Delta A'BO$ cu ΔACO.



$A'O = AO$ (din construcție); (1)

$BO = CO$ (definiția medianei); (2)

$B\hat{O}A' = C\hat{O}A$ (unghiuri opuse la vârf); (3)

Din (1), (2), (3) $\overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta A'BO \equiv \Delta ACO \overset{def}{\Rightarrow} A'B = AC$; (4)

$B\hat{A}'O = C\hat{A}O$ (5) și $A'\hat{B}O = A\hat{C}O$ (6)

În triunghiul ABC, $\hat{A} = 90^\circ$, $A\hat{C}B + A\hat{B}C = 90^\circ \overset{(6)}{\Rightarrow} A'\hat{B}O + A\hat{B}C = 90^\circ$, adică $A'\hat{B}A = 90^\circ$; (7)

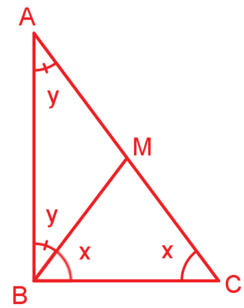
b) Comparăm $\Delta A'BA$ cu ΔCAB

$$\left.\begin{array}{l} A'B = CA \text{ (din (4))} \\ BA = AB \text{ (latură comună)} \\ A'\hat{B}A = C\hat{B}A = 90^\circ \text{ (din (7))} \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta A'BA \equiv \Delta CAB \overset{def}{\Rightarrow} A'A = BC.$$

Avem $\frac{AA'}{2} = \frac{BC}{2}$ și cum $AO = \frac{AA'}{2}$ rezultă $AO = \frac{BC}{2}$.

Teorema reciprocă. Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătore, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind unghiul opus laturii căreia i s-a considerat mediana. Vom scrie teorema sub forma:

Ipoteză: $\Delta ABC, M \in BC, MB = MC, AM = \frac{BC}{2}$ *Concluzie*: $\hat{A} = 90^\circ$



Demonstrație: Din $AM = \frac{BC}{2}$ și $MB = MC$ rezultă $AM = MC = MB$.

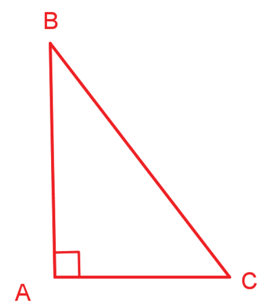
Triunghiul AMC este isoscel cu $M\hat{A}C = M\hat{C}A = x^\circ$, iar triunghiul AMB este isoscel cu $M\hat{B}A = M\hat{A}B = y^\circ$.

În triunghiul ABC scriem suma măsurilor unghiurilor și avem: $B\hat{A}B + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^\circ$, adică $x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ = 180^\circ$.

Efectuând calculele se obține $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$, ceea ce înseamnă că triunghiul ABC este dreptunghic cu $B\hat{A}C = 90^\circ$.

Alexandra, împreună cu Sonia și Mihai, merg în vizită la bunica ei. Bunica se bucură de vizita copiilor și în timp ce le pregătește clătite, îi solicită pe copii să o ajute să realizeze stratul cu flori, în formă de triunghi dreptunghic cu laturile de 4 cm și 3 cm. Bunica are ruletă, poate măsura laturile, dar nu știe cum ar putea realiza unghiul drept. Copiii savurează clătitele cu fructe de pădure, apoi merg în grădină cu bunica și se pun pe treabă. Cum credeți că au procedat?

3. Copiii au realizat, pe hârtie, un triunghi dreptunghic, cu catetele de 3 cm, respectiv 4 cm. Au măsurat ipotenuza și au constatat că are 5 cm. Deduc, de aici, că ipotenuza triunghiului pe care îl vor reprezenta în grădină va avea ipotenuza de 5 cm. Mihai observă că $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Construiți și voi un triunghi dreptunghic MNP cu $\sphericalangle M = 90^\circ$. Măsurați laturile triunghiului, calculați pătratele măsurilor lor și verificați dacă $MN^2 + MP^2 = NP^2$.

Această relație, între lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, este cunoscută ca *Teorema lui Pitagora* (matematician grec).

Teorema directă: Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

Vom scrie teorema sub forma:

Ipoteză: ΔABC, $\hat{A} = 90^\circ$ *Concluzia*: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Dacă notăm *AB* = *c*, *AC* = *b* și *BC* = *a*, teorema se va scrie $b^2 + c^2 = a^2$.

Teorema reciprocă: *Dacă într-un triunghi, suma pătratelor lungimilor a două dintre laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept, fiind opus laturii a treia.*

Vom scrie teorema sub forma:

Ipoteză: $\triangle ABC, AB^2 + AC^2 = BC^2$ *Concluzia*: $\hat{A} = 90°$

4. În triunghiul *ABC*, cu $\hat{A} = 90°$, se dau lungimile catetelor *AB* = 7 cm și *AC* = 24 cm. Calculați lungimea ipotenuzei *BC*.

Rezolvare: din teorema lui Pitagora, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ și înlocuind, $7^2 + 24^2 = BC^2$, adică $BC^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Deci, *BC* = 25 cm.

5. În triunghiul *ABC*, cu $\hat{A} = 90°$, lungimea catetei *AB* = 40 cm și lungimea ipotenuzei *BC* = 41 cm. Calculați lungimea catetei *AC*.

Rezolvare: din teorema lui Pitagora, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ și înlocuind, $40^2 + AC^2 = 41^2$, adică $1600 + AC^2 = 1681$, $AC^2 = 1681 - 1600 = 81 = 9^2$, deci, *AC* = 9 cm.

6. Lungimile laturilor unui triunghi *MNP,* sunt; *MN* = 11 cm, *MP* = 61 cm și *NP* = 60 cm. Verificați dacă triunghiul *MNP* este dreptunghic și indicați care este unghiul drept.

Rezolvare: verificăm dacă suma pătratelor lungimilor a două dintre laturi este egală cu pătratul laturii a treia. $11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721$, iar $61^2 = 3721$, deci $MN^2 + NP^2 = MP^2$ și triunghiul *MNP* este dreptunghic, cu unghiul drept în punctul *N*.

Rezumăm cunoștințele

- *Într-un triunghi dreptunghic* ***fiecare catetă este mai mică decât ipotenuza, iar unghiurile ascuțite sunt complementare.***
- *Într-un triunghi dreptunghic* ***lungimea catetei opuse unghiului cu măsura de 30°, este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.***
- *Dacă într-un triunghi dreptunghic,* ***lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci măsura unghiului opus acestei catete este egală cu 30°.***
- *În orice triunghi dreptunghic,* ***lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea acesteia.***
- *Dacă* ***mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătore, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind unghiul opus acestei laturi.***
- *Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci* ***suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei*** *(teorema lui Pitagora).*
- *Dacă într-un triunghi,* ***suma pătratelor lungimilor a două dintre laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind opus laturii a treia*** *(reciproca teoremei lui Pitagora).*

Aplicăm cunoștințele

7. Fie triunghiul *ABC*, cu $\hat{A} = 90°$.

a) Dacă *AB* = 16 cm, *AC* = 12 cm, calculați *BC*.

b) Dacă *AB* = 5 cm, *AC* = 13 cm, calculați *AC*.

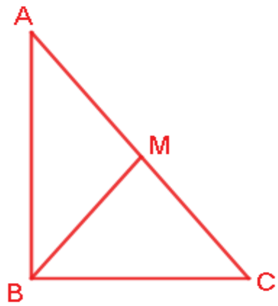
8. Stabiliți în care dintre cazurile de mai jos, triunghiul *VLD* este dreptunghic.

a) *VL* = 8 cm, *DL* = 17 cm și *VD* = 15 cm.

b) *VL* = 24 cm, *DL* = 25 cm și *VD* = 5 cm.

Ne verificăm

1. Mediana este segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.
2. În figura alăturată $M \in AC$ și $AM = CM$.



3. Mihai a cerut bunicii un ghem de sfoară și a fixat capătul sforii în pământ cu ajutorul unui țăruș. I-a spus Soniei să măsoare 3 m de sfoară, cu ruleta, începând de la țăruș, să facă un nod și să țină sfoara de acel nod. Alexandra va măsura 4 m de sfoară, de la nodul Soniei, va face un alt nod și va ține sfoara de acel nod. Mihai măsoară *5 m* de sfoară de la nodul Alexandrei și fixează capătul în țăruș. Sonia și Alexandra trag de sfoară până când sfoara este perfect întinsă și se mișcă până când, poziția triunghiului îi place bunicii. Mihai bate un țăruș în nodul pe care îl ține Sonia și un țăruș în nodul pe care îl ține Alexandra și formează cu țărușul inițial triunghiul dorit de bunica.

7. a) Cu teorema lui Pitagora, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, înlocuim și avem $BC^2 = 16^2 + 12^2$, $BC^2 = 400 = 20^2$ Deci, $BC = 20$ cm.

   b) Cu teorema lui Pitagora, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, înlocuim și avem $5^2 + AC^2 = 13^2 \Rightarrow 25 + AC^2 = 169 \Rightarrow AC^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$. Deci, $AC = 12$ cm.

8. a) Cum $8^2 + 15^2 = 289$ și $17^2 = 289$, rezultă $LV^2 + LD^2 = VD^2$ și triunghiul *VLD* este dreptunghic, cu unghiul drept în punctul *L*.

   b) Cum $24^2 + 5^2 = 576 + 25 = 601$ și $25^2 = 625$, iar $601 \neq 625$ rezultă triunghiul *VLD* nu este dreptunghic.

Activități de învățare

1. Triunghiul ABC este dreptunghic, $\hat{A} = 90°$. Calculați:
   a) măsura unghiului *C*, dacă $\sphericalangle B = 37°$;
   b) măsura unghiului B și măsura unghiului *C*, dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;
   c) măsura unghiului B și măsura unghiului *C*, dacă $\sphericalangle B = 4 \cdot \sphericalangle C$.
2. Calculați măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic știind că unul din unghiurile exterioare, ale acestui triunghi are măsura de 134°.
3. Triunghiul ABC este echilateral, iar punctul D este simetricul punctului B față de punctul *C*. Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic.
4. Se consideră triunghiul ABC, $\hat{A} = 90°$ și I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB.
   a) Calculați măsura unghiului BIC. b) Dacă $BI \equiv CI$, demonstrați că $AB \equiv AC$.
5. Se consideră triunghiul ABC cu $\hat{A} = 90°$. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
   a) Dacă $BC = 22$ cm și $\sphericalangle C = 30°$, atunci $AB = \ldots$ mm.
   b) Dacă $AB = 7{,}5$ cm și $\sphericalangle C = 30°$, atunci $BC = \ldots$ cm.
   c) Dacă $BC = 12$ cm și $\sphericalangle B = 60°$, atunci $AB = \ldots$ dm.
6. În triunghiul dreptunghic *AMN*, $\hat{A} = 90°$, $\sphericalangle M = 30°$ și $AN = 4{,}5$ cm. Se consideră *B*, simetricul punctului *N* față de dreapta AM și *C*, simetricul punctului *M* față de dreapta *AN*. Calculați perimetrul triunghiului *BCN*.
7. Fie triunghiul *ABC*, dreptunghic în A și AM mediană. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
   a) Dacă $BC = 14$ cm, atunci $AM = \ldots$ cm. b) Dacă $AM = 14$ cm, atunci $BC = \ldots$ cm.
   c) Dacă $CM = 14$ cm și $\sphericalangle C = 30°$, atunci $P_{\Delta ABM} = \ldots$ cm.
8. Punctul M este mijlocul ipotenuzei *BC*, a triunghiului dreptunghic ABC iar $AB \equiv AM$.
   a) Demonstrați că triunghiul ABM este echilateral.
   b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

9. Se consideră dreptele paralele a și b și punctele $A \in a, B \in b$. Bisectoarele unghiurilor formate de dreapta AB cu dreapta a intersectează dreapta b în punctele M, respectiv N (*figura 1*). Demonstrați că:

a) triunghiul AMN este dreptunghic;

b) triunghiul ABM este isoscel;

c) $AB = \dfrac{MN}{2}$.

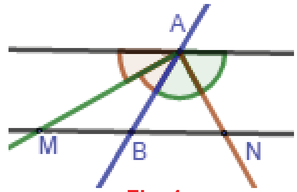


Fig. 1.

10. Se consideră DM, mediană a triunghiului DEF, $M \in EF$.
Demonstrați că dacă $DM = \dfrac{EF}{2}$, atunci $\sphericalangle EDF = 90°$.

11. Fie triunghiul ABC cu $\hat{A} = 90°$ și $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle C$. Se prelungește latura AB cu segmentul $AD \equiv AB$.

a) Știind că perimetrul triunghiului BCD este 36 cm, calculați lungimea laturii AB.

b) Dacă E și F sunt mijloacele segmentelor BC și CD, calculați perimetrul triunghiului AEF.

12. În triunghiul ABC, $\hat{A} = 90°$, AD este înălțime, iar AM este mediană. Demonstrați că dacă $AB \equiv AM$, atunci $BC = 4 \cdot BD$.

13. În triunghiul ABC cu $\hat{A} = 60°$, înălțimea AM determină pe latura BC segmente congruente. Știind că AM = 18 cm, calculați distanța de la punctul M la latura AB.

14. În triunghiul ABC se cunosc: $\hat{A} = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ iar CD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB, D \in AB$. Demonstrați că $CD = \dfrac{2}{3} \cdot AB$.

15. În triunghiul dreptunghic ABC, $\hat{A} = 90°$, AD este înălțime, AD = 12 cm, BD = 9 cm și $DC - BD$ = = 7 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

16. Fie triunghiul dreptunghic DEF cu $\sphericalangle EDF = 90°$ și A piciorul perpendicularei din D pe EF. Se știe că AE = 9 cm, EF = 25 cm și $AD = \dfrac{3}{4} \cdot AF$. Calculați lungimile segmentelor AF, AD, DE, DF.

17. În triunghiul MNP, $\sphericalangle N = 45°$, $\sphericalangle P = 30°$, $MA \perp NP, A \in NP$, iar MP = 12 cm.
Calculați $AP^2 + MN^2$.

18. Orașele A, B, C, D sunt legate de rețeaua de străzi, ca în *figura 2*. $AC \perp BD, AC \cap BD = \{O\}$, iar $AO = OC =$ 80 km, $BO = OD$ = 60 km. Un camion pleacă de la depozitul O și transportă marfă în cele patru localități. Alegeți traseul de lungime minimă și calculați distanța parcursă de camion, știind că se întoarce în O.

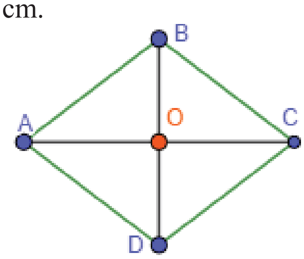


Fig. 2.

19. Punctul E este situat în interiorul segmentului BD = 14 cm, BE = 5 cm. De o parte și de alta a dreptei BD se consideră punctele A și C astfel încât $\sphericalangle EAB = 90°$, AE = 3 cm și $CE \perp BD$, CE = 12 cm. Calculați perimetrul figurii geometrice $ABCDE$.

20. Fie triunghiul $ABC, AB = AC$ și $BD \perp AC, BD$ = 24 cm, AD = 7 cm.

a) Determinați lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Demonstrați că triunghiul ABC nu este dreptunghic.

21. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle B = 90°$, BD este înălțime, iar BM este mediană, $D, M \in AC$. Știind că $\sphericalangle DBM = 20°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC și ABM.

22. În triunghiul AMN, se construiește bisectoarea AB, a unghiului MAN, $B \in MN$. Se construiesc, apoi, $BC \perp AM, C \in AM$ și $BD \perp AN, D \in AN$. Demonstrați că:

a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABD$; b) $AB \perp CD$.

23. Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, se construiesc, în exterior, triunghiurile echilaterale ABM și ACN. Demonstrați că $MN = CM = BN$.

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

Triunghiului ABC este isoscel, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$. Perpendiculara în A pe AC intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul D iar $AD \cap BC = \{E\}$. Atunci:

5 p	**1.** Triunghiul ABD este isoscel.	☐
5 p	**2.** Semidreapta DA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$.	☐
5 p	**3.** Triunghiurile ACE și BDE sunt congruente.	☐
5 p	**4.** Dreptele AB și CD sunt concurente.	☐
5 p	**5.** Măsura unghiului CPD este 60°, $\{P\} = AC \cap BD$.	☐
5 p	**6.** $BC > AD$.	☐

II. Asociați fiecare fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana **B**.

	A	B
5 p	**1.** În triunghiul ABC, $AB = AC$ și $\sphericalangle B = 40^\circ$. Măsura unghiului $\sphericalangle A$ este	**a.** 100°
5 p	**2.** Triunghiul isoscel DEF, are unghiul exterior $\sphericalangle F$ de 70°. $\sphericalangle E =$	**b.** 117°
5 p	**3.** Triunghiul ABC este isoscel cu baza AC și $\sphericalangle B = 54^\circ$. Bisectoarele AA' și CC' ale triunghiului formează un unghi obtuz cu măsura de	**c.** 25°
5 p	**4.** În triunghiul MNP, $\sphericalangle M = 36^\circ$, $\sphericalangle P = 72^\circ$, PT este înălțime $T \in MN$. Măsura unghiului $\sphericalangle MPT$ este	**d.** 18°

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 p **1.** Fie triunghiul $ABC, D \in BC$, astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$. Măsura unghiului $\sphericalangle ADB$ este:

A. 60° B. 90° C. 80° D. 40°

10 p **2.** În triunghiul ABC, $AB = AC$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ formează cu latura AB un unghi de 108°. Suma este $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC$ este:

A. 130° B. 131° C. 123° D. 132°

10 p **3.** Punctele T și P sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, $BP \cap CT = \{D\}$. Dacă $BD = 6$ cm, $DP = 3$ cm, atunci punctul D este:

A. ortocentrul ΔABC B. centrul de greutate al ΔABC C. centrul cercului circumscris ΔABC D. centrul cercului înscris în ΔABC

10 p **4.** Laturile triunghiului isoscel DEF sunt exprimate în cm prin numerele $2 \cdot x + 3$, $3 \cdot x + 2$ și $4 \cdot x + 4$. Perimetrul triunghiului ABP este:

A. 18 cm B. 20 cm C. 21 cm D. 22 cm

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

	Triunghiurile ABC și BDE sunt echilaterale, D este mijlocul laturii BC, $E \in Ext\,\Delta ABC$, iar $DE \cap AC = \{F\}$. Atunci:	
5 *p*	**1.** $\sphericalangle ADE = 150^\circ$.	☐
5 *p*	**2.** Triunghiul CDF este echilateral.	☐
5 *p*	**3.** $(AF) \equiv (BE)$.	☐
5 *p*	**4.** Dreptele AB și EF sunt paralele.	☐
5 *p*	**5.** $(AO) \equiv (OE)$, unde $\{O\} = AE \cap BF$.	☐
5 *p*	**6.** Semidreapta AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$.	☐

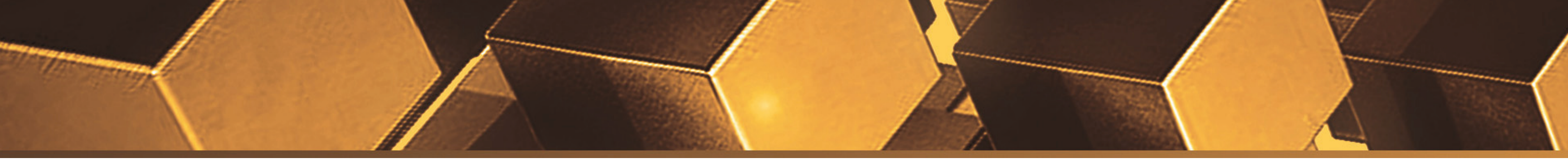
II. Asociaţi fiecare fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana B.

	A	B
	Triunghiul ABC este echilateral, E și F sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC, iar $AE \cap BF = \{O\}$.	
5 *p*	**1.** Suma unghiurile exterioare triunghiului ABC este	**a.** 30°
5 *p*	**2.** Măsura unghiului BEF este	**b.** 120°
5 *p*	**3.** Dreptele AE și BF formează un unghi ascuțit de	**c.** 720°
5 *p*	**4.** Unghiurile ascuțite ale triunghiului EFO au măsura	**d.** 60°

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10 *p*	Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $AB = 9$ cm $P \in BC$, $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PCA$ și $D \in AP$, $DP = 4{,}5$ cm.			
	1. Măsura unghiului $\sphericalangle ACB$ este:			
	A. 60°	B. 30°	C. 50°	D. 40°
10 *p*	**2.** Lungimea segmentului BC este:			
	A. 9 cm	B. 12 cm	C. 15 cm	D. 18 cm
10 *p*	**3.** Măsura unghiului ADB este:			
	A. 120°	B. 60°	C. 90°	D. 30°
10 *p*	**4.** Perimetrul triunghiului ABP este:			
	A. 27 cm	B. 24 cm	C. 36 cm	D. 45 cm

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														



Test de autoevaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

I. Completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

5 p	**1.** Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt suplementare.	☐
5 p	**2.** În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ, \sphericalangle B = 30^\circ$, are loc relația $AC = BC : 2$.	☐
5 p	**3.** Punctul M este mijlocul ipotenuzei BC, în triunghiul ABC. Atunci $BC = 2 \cdot AM$	☐
5 p	**4.** Bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic formează un unghi cu măsura de 135°.	☐
5 p	**5.** Mediatoarele laturilor unui triunghi dreptunghic conțin vârfurile triunghiului.	☐
5 p	**6.** Mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de vârfurile triunghiului.	☐

II. Asociați fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care numește completarea potrivită, aflată în coloana B, astfel încât propoziția să fie adevărată.

	A	B
	Triunghiul DEF este dreptunghic, $\sphericalangle D = 90^\circ$, $DE =$ 24 cm, $DF = 7$ cm, iar $M \in EF$, $ME = MF$.	
5 p	**1.** Lungimea ipotenuzei EF este…	**a.** 12, 5 cm
5 p	**2.** Perimetrul triunghiului DMF este …	**b.** 25 cm
5 p	**3.** Distanța de la punctul M la dreapta DF este egală cu…	**c.** 12 cm
5 p	**4.** Raza cercului circumscris triunghiului DEF este…	**d.** 32 cm

III. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

În triunghiul ABC, AB = 15 cm, AC = 20 cm, punctul D aparține segmentului BC $AD \perp BC$, $AD = 12$ cm.

10 p **1.** Lungimea segmentului BC este:

A. 20 cm; B. 24 cm; C. 25 cm; D. 30 cm.

10 p **2.** Unghiul BAC are măsura:

A. 90°; B. 60°; C. 120°; D. 80°;

10 p În triunghiul $ABC, AB \perp AC$, iar măsura unghiului exterior B este 130°.

3. Măsura unghiului ACB este:

A. 50°; B. 40°; C. 60°; D. 30°.

10 p **4.** Mediana AD și bisectoarea unghiului ABC formează un unghi de:

A. 100°; B. 90°; C. 75°; D. 105°.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

ISBN 978-606-31-0603-3
9 786063 106033