MANUAL PENTRU CLASA A V-A

CORINT

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Radu Gologan (coordonator)
Camelia Elena Neța
Corina Mianda Mîinescu
Ciprian Constantin Neța
Ion Cătălin Mîinescu

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A V-A

CORINT

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Radu Gologan (coordonator)
Camelia Elena Neța
Corina Mianda Mîinescu
Ciprian Constantin Neța
Ion Cătălin Mîinescu

MATEMATICĂ

Date despre autori:

Coordonator **Radu GOLOGAN** – prof. dr. Facultatea de Automatică și Calculatoare – Universitatea Politehnică din București, președintele Societății de Științe Matematice din România, coordonatorul olimpiadelor de matematică, medaliat la olimpiade internaționale de matematică.

Camelia Elena NEȚA – profesor gradul didactic I, Școala Gimnazială nr. 2 din Piatra Neamț, inspector de specialitate la ISJ NEAMȚ, formator, membru în grupuri de lucru la nivel județean și național.

Ciprian Constantin NEȚA – profesor gradul didactic I, director al Școlii Gimnaziale nr. 2 din Piatra Neamț, metodist, formator.

Corina Mianda MÎINESCU – profesor gradul didactic I, Școala Gimnazială „Mihail Drumeș” din Balș, formator, membru în grupuri de lucru la nivel județean și național.

Cătălin MÎINESCU – profesor gradul didactic I, Școala Gimnazială „Mihail Drumeș” din Balș, formator, membru în grupuri de lucru la nivel județean și național.

Referenți:

Prof. dr. Mircea Olteanu, Universitatea Politehnică din București, Departamentul de metode și modele matematice

Prof. Camelia Maria Magdaș, gradul didactic I, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” din Dej

Redactare: **Corina Toader**
Tehnoredactare: **Lorena Ionică**
Design copertă: **Dan Mihalache**
Credite foto: shutterstock.com

În manual au fost folosite secvențe video din platforma de învățare a matematicii **mquest.ro,** cu acordul autorilor.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : manual pentru clasa a V-a /
Radu Gologan (coord.), Camelia Elena Neța, Corina Mianda Mîinescu, ... - București :
Corint Logistic, 2017
ISBN 978-606-94044-9-2

I. Gologan, Radu
II. Neța, Camelia Elena
III. Mîinescu, Corina Mianda

51

Pentru comenzi şi informaţii, contactaţi:
GRUPUL EDITORIAL CORINT
Departamentul de Vânzări
Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, Bucureşti,
cod poştal 010517. Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20
Depozit
Calea Plevnei nr. 145, sector 6, Bucureşti,
cod poştal 060012. Tel.: 021.310.15.30
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazin virtual: www.edituracorint.ro

CUPRINS

FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

PREFAȚĂ

Când am pornit la scrierea acestui manual, prima întrebare pe care ne-am pus-o a fost: ***Cui să se adreseze acest manual?*** Nu a fost o hotărâre ușor de luat, mai ales că acolo unde sunt mai multe persoane sunt desigur și multe păreri. Am hotărât până la urmă ca manualul nostru să se adeseze în același timp și elevilor, și părinților, și profesorilor.

Pentru ***elevi*** am prezentat noțiunile intuitiv, evitând abuzul de notații sau de abstractizare. Am încercat (și sperăm că am și reușit) să folosim noțiunile învățate în clasele primare ca bază pe care să construim noțiuni noi, am prezentat exerciții rezolvate prin care i-am învățat să gândească, să analizeze, să observe mediul înconjurător și să-și folosească imaginația pentru a extrage exemple din natură și mediul înconjurător. Am prezentat și tipuri de greșeli ce pot apărea în rezolvări pentru a atrage atenția asupra lor. Am vrut să dezvoltăm creativitatea, capacitatea de analiză și sinteză a informațiilor dintr-o situație-problemă prin rezolvarea de probleme folosind metode aritmetice, iar noțiunile de geometrie le-am prezentat intutiv, am învățat să le desenăm, să le decupăm, să le suprapunem și să le recunoaștem în jurul nostru. Și, de ce nu, de multe ori îi punem pe elevi în situația de a se juca, căci se știe că prin joc se pot învăța mult mai ușor lucruri care altfel par foarte grele.

Părinții sunt invitați să parcurgă manualul alături de copiii lor. Dacă nu vor să-i ajute la rezolvarea temelor, cu siguranță trebuie să-i ajute să facă planul casei, să facă împreună bugetul familiei sau pe cel personal al copilului, să proiecteze o excursie, să caute pe internet curiozități matematice, că construiască corpuri geometrice, să decupeze figuri geometrice, să joace împreună șah sau avioane...

Și, nu în ultimul rând, manualul reprezintă pentru ***profesor*** un instrument de orientare a activității didactice, respectiv de selectare a conținuturilor științifice valorificabile în vederea atingerii finalităților urmărite. Lecțiile sunt proiectate astfel încât programa școlară să poată fi parcursă în 75% din timpul alocat orelor de matematică, restul orelor (25%) fiind la dispoziția profesorului pentru activități remediale, de fixare sau de progres. Modul de prezentare a lecțiilor îi poate ajuta să-și proiecteze planificarea, aplicațiile practice propuse pot diversifica orele de matematică și pot ajuta la dezvoltarea motivației elevilor pentru a reuși în învățare și, implicit, pentru atragerea lor spre studiului disciplinei.

Recomandăm profesorilor de matematică să colaboreze cu profesorii care predau TIC și să-i îndrume pe elevi să utilizeze calculatorul pentru modelare (cum ar fi, de exemplu, un program de generare a unui șir, etc) sau folosirea programelor de generare a desenelor la geometrie.

AUTORII

Competențe generale și competențe specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate

1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate

1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora

2.2. Efectuarea de calcule cu fracții, folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice

2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale

3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparări, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale

4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date

4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

5.3. Interpretarea, prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI

varianta tipărită

varianta digitală

Simboluri folosite în varianta digitală

Rezolvă | Privește | Vizionează

NOU! Vă oferim posibilitatea de a accesa link-uri tematice prin intermediul unor coduri QR care pot fi citite de dispozitive mobile dotate cu cameră video și acces la internet:

1. Instalați o aplicație de citire QR Code.

2. Deschideți aplicația și scanați codul QR, astfel încât să fie vizibil pe ecranul dispozitivului.

3. Urmăriți link-ul citit, prin atingerea ecranului.

Manualul este structurat în trei capitole: NUMERE NATURALE; FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE; ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ. Fiecare capitol conține lecții care păstrează, în general, titlurile existente la „Conținuturi" în programa școlară. O lecție se poate întinde pe una sau mai multe ore, dând posibilitatea profesorului să-și adapteze planificarea materiei în funcție de posibilitățile psihointelectuale ale elevilor.

Conținuturile noi, specifice programei școlare, sunt prezentate în lecții la rubrica **SĂ ÎNVĂȚĂM!**. Această rubrică este precedată de rubrica **SĂ NE AMINTIM!** și de probleme rezolvate care sugerează introducerea noțiunilor noi. În cazul în care conținutul ce trebuie prezentat se poate intui prin prezentarea și analiza unor exemple, acestea sunt prezentate și comentate la rubrica **SĂ OBSERVĂM!**

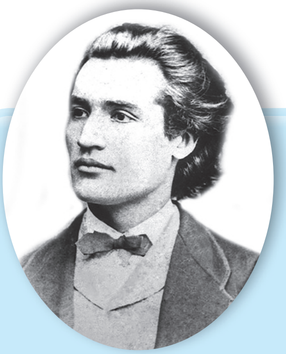
Fiecare rubrică **SĂ ÎNVĂȚĂM!** este continuată cu ***Să exersăm!***. Aici sunt prezentate exerciții rezolvate, comentate, exemple și contraexemple.

Rubrica **PROBLEME PROPUSE** conține, în general, probleme asemănătoare cu cele rezolvate. Dacă nu avem exemple rezolvate pentru unele tipuri de probleme propuse, atunci acestea au prezentate la finalul cărții rezolvarea completă sau indicații pentru rezolvare. Majoritatea lecțiilor au la final **PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI!** unde propunem probleme cu un grad mai mare de dificultate, care de asemenea sunt rezolvate sau au indicații la final.

Un set de lecții cu conținut legat noțional se finalizează cu un set de probleme propuse și teste de evaluare. Testele sunt grilă sau cu itemi deschiși, au la final răspunsurile, astfel încât elevii să poată verifica corectitudinea rezultatelor obținute și au punctaj pe fiecare problemă pentru a fi posibilă și autoevaluarea.

Noțiunile matematice sunt însoțite adesea de probleme distractive, curiozități, ***Știați că...,*** acestea aducând în atenția elevilor informații și din istoria matematicii. Aplicațiile practice, prin care punem elevii să pregătească diverse teme, au rolul de a provoca elevii să descopere și latura aplicativă a matematicii, frumusețea acesteia și de a-i atrage spre studiu.

1 NUMERE NATURALE



Cu mâine zilele-ți adaogi,
Cu ieri viața ta o scazi
Și ai cu toate astea-n față
De-a pururi ziua cea de azi

MIHAI EMINESCU,
„Cu mâine zilele-ți adaogi...”

Șirul lui Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
(*fiecare termen este diferența dintre cei doi termeni care îl încadrează*)
mâine – ieri = azi

OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

„Numărul este esența lucrurilor!”
Pitagora (580 î.H. – 495 î.H.)

Scrierea și citirea numerelor naturale

SĂ NE AMINTIM!

✓ *Șirul numerelor naturale* este următorul: 0, 1, 2, 3 și așa mai departe. Se pun următoarele întrebări: Câte numere naturale există? Cum se formează șirul lor?

✓ Dacă afirmăm că un număr natural este ultimul, adică este cel mai mare, atunci putem aduna la acesta pe 1 și îl obținem pe următorul. Continuând procedeul, se constată că șirul numerelor naturale este fără sfârșit (adică, în matematică, „infinit”).

✓ Numerele naturale sunt formate din una sau mai multe cifre. Cifrele sunt cele de pe tastatura telefonului, adică: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. Dacă vorbim despre telefon, este evident că putem forma cu aceste cifre orice număr.

✓ Când scriem și când citim un număr avem în vedere ***poziția*** pe care fiecare cifră o are în numărul respectiv. Astfel, ele sunt grupate în ***clase*** și ***ordine***. Poziția cifrelor în număr ne dă și denumirea lor.

Numele clasei	Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
Numele ordinului	Sute de milioane	Zeci de milioane	Unități de milioane	Sute de mii	Zeci de mii	Unități de mii	Sute	Zeci	Unități
Numărul ordinului	9	8	7	6	5	4	3	2	1

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Am văzut că șirul numerelor naturale este infinit. Cel mai mic număr natural este 0 și nu există cel mai mare număr natural.

Spunem că 5 este ***succesorul*** lui 4 și că 8 este ***predecesorul*** lui 9. ***Succesorul*** numărului natural n este $n + 1$ (următorul număr din șir). ***Predecesorul*** numărului natural nenul n este $n - 1$ (numărul anterior din șir).

Două ***numere naturale consecutive*** se notează n și $n + 1$. Trei numere naturale consecutive se notează n, $n + 1$ și $n + 2$.

Numerele naturale 12, 39, 71 sunt numere naturale de două cifre. În general, un număr natural de două cifre se poate scrie, simbolic, sub forma $\overline{ab}$, unde a și b sunt cifre și $a \neq 0$. Descompus, acest număr se poate scrie $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$. Un număr natural de trei cifre se scrie sub forma $\overline{abc}$, unde a, b și c sunt cifre și $a \neq 0$. Descompus, acest număr se poate scrie $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$. În mod analog, există scriere pentru un număr natural format din oricâte cifre.

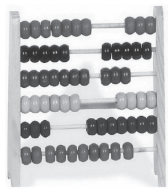
Să exersăm:

➤ Citiți și scrieți numerele din tabel. Numiți clasa și ordinul pentru fiecare cifră din numerele date. Care este succesorul și predecesorul fiecărui număr?

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U
	8	7	6	5	4	3	2	1
		1	2	4	3	8	1	0
			5	4	5	0	0	1
					3	1	2	0
							2	2

➤ Citiți și scrieți în cuvinte numărul 782015. Despărțiți, de la dreapta spre stânga, numărul în clase. El se citește ”șapte sute optzeci și două de mii cincisprezece”.

➤ Să scriem cu cifre numărul ”cincizeci și șase de mii opt”: 56008.



➤ Să scriem toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care au cifra zecilor 3 și cifra unităților mai mică decât cea a zecilor: 32, 31 și 30.

➤ Pe numărătoarea din imagine, pornind de jos în sus, fiecare linie reprezintă: unitățile, zecile, sutele, unitățile de mii... Citiți numărul format de bilele din partea dreaptă.

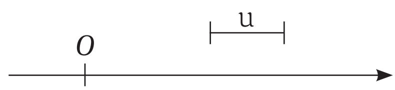
Rezolvare: Pe linia unităților nu avem în dreapta nicio bilă, deci 0, pe linia zecilor avem în dreapta 7 bile, deci 7. Continuăm explicațiile și obținem numărul 353470.

♦ Reprezentarea pe axa numerelor

SĂ ÎNVĂȚĂM!

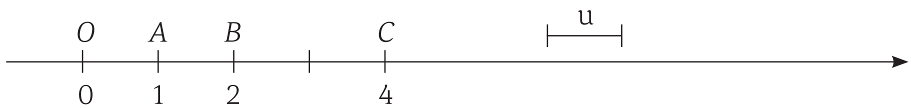
Să desenăm o dreaptă. Se ia un punct pe dreaptă, pe care îl notăm cu O și căruia îi corespunde numărul zero. Tot ceea ce vom face mai departe se va întâmpla de la punctul O spre dreapta și vom marca acest lucru punând o săgeată spre dreapta. Pentru a reprezenta numerele avem nevoie de o unitate de măsură pe care o vom alege convenabil.

Așadar, ansamblul format din: o dreaptă numită ***direcție***, un punct pe dreaptă (notat cu O) numit ***origine***, un ***sens*** (spre dreapta), o ***unitate de măsură,*** formează ***axa numerelor naturale***. Orice număr natural poate fi reprezentat pe axă, folosind unitatea de măsură cu care măsurăm, începând de la origine. Lui îi va corespunde un punct notat cu o literă mare. Se spune că numărul este *coordonata* punctului respectiv. De exemplu, dacă punctului A îi corespunde numărul 1, vom nota $A(1)$ și vom citi „A de coordonată 1”.



Să exersăm:

➢ Să reprezentăm pe axă punctele care au coordonatele 1, 2 și 4:



PROBLEME PROPUSE:

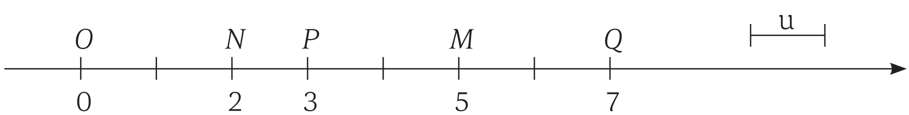
1. Citiți numerele 32, 801, 12345, 2005, 1698420, apoi scrieți succesorul și predecesorul fiecăruia dintre ele.

2. Scrieți, cu ajutorul cifrelor, numerele: a) patru sute optzeci și doi; b) șapte mii unu; c) două milioane trei sute optzeci și patru de mii.

3. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care au cifra unităților 7, iar cifra zecilor să fie mai mică decât cea a unităților.

4. Scrieți numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care au toate cifrele egale.

5. Citiți punctele și coordonatele lor de pe axa de mai jos:



6. Explicați cum utilizați unitatea de măsură în reprezentarea numerelor naturale pe axă.

7. Reprezentați pe axă numerele 3, 5 și 9. Alegeți unitatea de măsură convenabil.

8. Cum trebuie aleasă unitatea de măsură pentru a reprezenta pe aceeași dreaptă numerele 40, 60 și 100?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Scrieți un număr natural de: a) șapte cifre diferite; b) zece cifre diferite.

2. Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{2b3}$ și de forma $\overline{b5}$.

3. Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ cu toate cifrele identice.

4. Scrieți numerele naturale de forma $\overline{ab00}$ care au suma cifrelor egală cu 3.

5. Reprezentați pe axă numerele 3 și 8. Câte unități sunt între ele?

6. Găsiți o regulă prin care puteți calcula numărul de unități dintre două puncte reprezentate pe axă.

7. Câte numere naturale sunt de la 1 la 15? Dar de la 1 la 99?

8. Sunt reprezentate pe axă numerele de la 5 la 90. Câte numere sunt?

Compararea și ordonarea numerelor naturale

Călin și mama sa au cumpărat de la „lactate” produse de 25 lei, produsele de la „cosmetice” au costat 112 lei, iar de la „patiserie” au cumpărat de 19 lei. Unde au cheltuit cel mai puțin? Dar cel mai mult? Puneți sumele în ordine crescătoare.

Rezolvare: Cel mai puțin s-a cheltuit la patiserie, 19 lei. Cei mai mulți bani au fost cheltuiți la cosmetice. Ordonate crescător, avem: $19<25<112$.

SĂ NE AMINTIM!

✓ Considerăm, la întâmplare, două numere naturale. Există trei posibilități:
- primul număr este mai mare decât al doilea (>);
- primul număr este mai mic decât al doilea (<);
- cele două numere sunt egale (=).

✓ ***A compara două numere*** înseamnă a vedea în care dintre cele trei situații de mai sus ne situăm. ***A ordona crescător*** un șir de numere înseamnă să scriem numerele „de la cel mai mic la cel mai mare”. ***A ordona descrescător*** un șir de numere înseamnă să scriem numerele „de la cel mai mare la cel mai mic”.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Când comparăm două numere naturale care au un număr diferit de cifre, este mai mare cel care are mai multe cifre. De exemplu, dintre 127 și 99, este mai mare 127. Scriem $127>99$.

Dacă numerele care trebuie comparate au același număr de cifre, le vom compara cifră cu cifră, începând de la stânga. Astfel, 23904 este mai mare decât 23875 pentru că: cifrele zecilor de mii sunt egale, cifrele miilor sunt egale, dar, la primul număr cifra sutelor este 9, în timp ce la al doilea număr cifra sutelor este 8. Cum $9>8$, urmează că $23904>23875$.

Fiecare număr natural este mai mare decât cel de dinaintea sa (***predecesorul*** său) și este mai mic decât numărul de după el (***succesorul*** său). De exemplu, $7>6$ (6 este predecesorul lui 7) și $7<8$ (8 este succesorul lui 7).

Dacă vrem să spunem că numerele nu sunt egale, scriem $13\neq 9$ și citim „13 este diferit de 9”.

Se folosesc și simbolurile „≤” și „≥”, care se citesc „mai mic sau egal” și „mai mare sau egal”. Acestea sunt utilizate, mai ales, într-o scriere de forma $x\leq 5$. Dar, evident că putem scrie și $7\leq 7$.

Să exersăm:

➤ Să comparăm 237 cu 273 și 45092 cu 9998. Numărul 237 este mai mic decât 273 și vom scrie: $237 < 273$. Evident că $45092 > 9998$, ceea ce se poate observa și după numărul de cifre al fiecărui număr.

➤ Să scriem numerele naturale mai mici sau egale cu 4: 0, 1, 2, 3 și 4.

➤ Să reprezentăm pe axă numerele 3 și 11. Știm că 3 < 11, dar ce observăm din punct de vedere al așezării lor pe axă? Numărul cel mai mic este așezat în stânga numărului mai mare.

➤ Să ordonăm crescător numerele: 52, 36, 14, 78, 99. Obținem: 14, 36, 52, 78, 99.

➤ Să ordonăm descrescător numerele: 512, 126, 146, 178, 199. Obținem: 512, 199, 178, 146, 126.

➤ Să aflăm cel mai mic și cel mai mare număr de trei cifre diferite: cel mai mic număr de trei cifre diferite este 102; cel mai mare număr de trei cifre diferite este 987.

♦ Aproximări. Probleme de estimare

Știați că...

... Un cal de dimensiuni medii poate avea 400-500 kg? Delfinul comun poate ajunge la dimensiuni de la 2 m până la 3 m și poate cântări până la 135 kg? O cămilă cântărește între 300 kg și 700 kg?

SĂ NE AMINTIM!

Dacă un obiect costă puțin peste 300 de lei, sau puțin sub această sumă, de multe ori spunem că el costă „circa 300 de lei” sau „vreo 300 de lei” sau „*aproximativ* 300 de lei”. Deci, dacă nu este foarte important să spunem exact un număr, putem să folosim o *aproximare* a lui.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Putem *aproxima* un număr *prin lipsă* sau *prin adaos*:

• *Aproximarea prin lipsă* până la zeci (sute, mii) a unui număr natural este cel mai mare număr format numai din zeci (sute, mii), mai mic sau egal decât numărul dat.

• *Aproximarea prin adaos* până la zeci (sute, mii) a unui număr natural este cel mai mic număr format numai din zeci (sute, mii), mai mare decât numărul dat.

• *Rotunjirea* unui număr până la zeci (sute, mii) este aproximarea prin lipsă sau prin adaos mai „apropiată” de numărul respectiv. Dacă ambele aproximări sunt la fel de „apropiate” de numărul respectiv, atunci se ia aproximarea prin adaos.

• *Estimarea* este o aproximare a datelor, o apreciere a valorii pe baza unor date incomplete.

Să exersăm:

➢ Să se rotunjească numărul 3857.

Numărul	Aproximarea până la zeci		Rotunjirea până la zeci	Aproximarea până la sute		Rotunjirea până la sute	Aproximarea până la mii		Rotunjirea până la mii
	prin lipsă	prin adaos		prin lipsă	prin adaos		prin lipsă	prin adaos	
3857	3850	3860	3860	3800	3900	3900	3000	4000	4000

➢ Numărul 342, fiind mai aproape de 340 decât de 350, îl rotunjim la 340 (aproximare prin lipsă). Numărul 2858 se rotunjește la 2860 (aproximare prin adaos).

➢ **Cristina** dorește să-și cumpere o bicicletă care costă 584 de lei, dar dispune doar de bancnote de 100 de lei. Câte bancnote îi sunt necesare?

Răspuns: 6 bancnote.

➢ **Estimează lungimea clasei, înălțimea colegilor, lungimea băncii.**

Răspuns: lungimea unei săli de clasă este cam 7-8 m, înălțimea colegilor este între 1m și 2 m, lungimea băncii este de aproximativ 1 m.

PROBLEME PROPUSE:

1. Comparați un număr de două cifre cu un număr de trei cifre. Ce puteți spune? Este nevoie să cunoaștem numerele?

2. Care este predecesorul și care este succesorul lui 17?

3. Ordonați descrescător numerele de două cifre identice.

4. Aproximați convenabil numerele: 59, 81, 226, 950, 569425.

5. Aproximați prin lipsă până la sute numerele: 6930, 71950, 563290.

6. Andra dorește să-și cumpere o minge care costă 35 de lei. Aflați numărul minim de bancnote de 10 lei necesar cumpărării mingii.

7. La magazin prețurile sunt următoarele: un ceas – 325 de lei, o geantă – 436 de lei, un stilou – 45 de lei, un serviciu de cafea – 105 lei, un pachet de cafea – 14 lei, o carte – 37 de lei, o bluză – 103 lei, o jucărie – 75 de lei. Estimați câte obiecte pot să cumpăr dacă am 1000 de lei? Verificați apoi prin calcul estimările făcute.

8. La un concurs de matematică se acordă 5 puncte pentru o problema rezolvată corect și se scad 2 puncte pentru o problemă rezolvată greșit. Ionuț a trimis 20 de probleme rezolvate și a primit 72 de puncte. Câte probleme a rezolvat bine și câte a greșit?

9. În tabelul următor avem o listă ordonată alfabetic cu câteva râuri din România:

Râu	Argeș	Bistrița	Dâmbovița	Jiu	Mureș	Olt	Someș
Lungime (km)	350	283	283	339	761	615	376

Rearanjați-le în ordinea crescătoare a lungimilor lor.

Adunarea numerelor naturale

În bibliotecă sunt 15632 de cărți. În luna mai s-au cumpărat 354 de cărți, iar în iunie încă 545 de cărți. Câte cărți sunt acum în bibliotecă?

Rezolvare: 15632 + 354 + 545 = 16531 (cărți).

SĂ NE AMINTIM!

Prin adunarea unor numere naturale se obține un număr natural, $a + b = c$. Numerele care se adună se numesc ***termeni***. Rezultatul adunării se numește ***sumă***.

SĂ OBSERVĂM:

✓ Calculați sumele: 301 + 102 și 102 + 301. Veți vedea că rezultatul se păstrează, indiferent de ordinea termenilor.

✓ Calculați 15 + 350 + 50.

Rezolvare: Putem calcula (15 + 350) + 50 = 365 + 50 = 415 sau 15 + (350 + 50) = =15 + 400 = 415. Așadar, grupând termenii unei sume în diverse moduri, rezultatul nu se schimbă.

✓ Făcând o grupare convenabilă a termenilor unei sume, putem calcula mai ușor: 11 + 22 + 78 + 89 = (11 + 89) + (22 + 78) = 100 + 100 = 200.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Suma a oricare două sau mai multe numere nu se schimă dacă:

- schimbăm ordinea termenilor, $a + b = b + a$ (adunarea este ***comutativă***).
- grupăm termenii în moduri diferite, $a + (b + c) = (a + b) + c$ (adunarea este ***asociativă***).

Numărul 0 este element neutru la adunare, $a + 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a.

Să exersăm:

➢ Numărul cu 12 mai mare decât 18 este 12+18=30 .

➢ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	b	c	$a + b$	$c + b$	$a + (b + c)$	$(a + b) + c$	$a + b + c$
29	31	56	60	87	116	116	116
368	159	753					
7264	1472	301					

➢ Ana are 25 de lei, iar Victor are cu 17 lei mai mult. Câți lei au împreună copiii?

Rezolvare: După ce aflăm câți lei are Victor, adică 25 + 17 = 42 (lei), adunăm sumele celor doi copii: 25 + 42 = 67 (lei).

➢ Calculați, grupând convenabil termenii sumelor:

a) 7 + 37 + 13 + 50 + 93 = (7 + 93) + (37 + 13) + 50 = 100 + 50 + 50 = 200;

b) 71 + 27 + 29 + 73 = (71 + 29) + (27 + 73) = 100 + 100 = 200.

➢ Calculați sumele, așezând numerele unele sub altele:

2513 + 234; 4517 + 12328; 153 + 24912 + 5723.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 2513\,+ \\ 234 \\ \hline 2747 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4517\,+ \\ 12328 \\ \hline 16845 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 153\,+ \\ 24912 \\ 5723 \\ \hline 30788 \end{array}$$

➢ Înlocuiți steluțele cu cifre:

$$\begin{array}{r} 5\star1\,+ \\ 3\star \\ \hline 548 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\star15\,+ \\ 8\star\star \\ \hline 5445 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \star\star9\,+ \\ 82\star \\ \hline 1765 \end{array}$$

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 511\,+ \\ 37 \\ \hline 548 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4615\,+ \\ 830 \\ \hline 5445 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 939\,+ \\ 826 \\ \hline 1765 \end{array}$$

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați oral:

a) 5 + 35; b) 0 + 64; c) 7 + 49 + 13; d) 100 + 10 + 1; e) 222 + 111 + 333;
f) 4 + 6 + 8 + 10 + 12.

2. Aflați numărul cu 308 mai mare decât 11459.

3. Efectuați:

a) $1060+592$; b) $36+805+2887$; c) $1+2+3+4+5+85$; d) $2098+550+4189$.

4. Calculați sumele și spuneți ce proprietate a adunării a fost folosită în:

a) $589+19=19+589$; b) $0+5007=5007+0=5007$;

c) $(12+123)+489=12+(123+489)$ d) 1 + 25 + 75 + 99 = (1 + 99) + (25 + 75).

5. Pe un raft sunt 27 de cărți. Pe altul sunt cu 9 mai multe. Câte cărți sunt în total?

6. Un agricultor a recoltat de pe un teren 867 kg cartofi, iar de pe altul, cu 209 kg mai mult. Câte kilograme de cartofi a recoltat agricultorul de pe ambele terenuri?

7. Calculați suma primelor 9 numere naturale diferite de zero.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. În curtea școlii s-au adunat trei grupuri de elevi. În primul grup sunt 31 de elevi, în al doilea sunt cu 11 mai mulți decât în primul, iar în al treilea grup sunt cu 3 mai mulți decât în primele două grupuri la un loc. Câți elevi sunt în curtea școlii?

2. Scrieți numărul 7 ca sumă a două numere naturale, știind că primul număr este mai mic decât al doilea. Câte soluții are problema?

3. Înlocuiți steluțele cu cifre:
$$\begin{array}{r} \star\,\star\,1\ + \\ 2\,\star\ \ \\ \hline 4\,6\,7\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,\star\,1\,\star\ + \\ 8\,\star\,\star\ \ \\ \hline 4\,4\,4\,4\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} \star\,5\,\star\,\star\,8\ + \\ \star\,7\,2\,\star\ \ \\ \hline 5\,4\,3\,2\,1\ \ \end{array}$$

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

• *Pătratul magic de ordinul 3* se obține completând pătrățelele careului alăturat, de regulă, cu cifre naturale distincte, astfel încât suma numerelor de pe orice rând, coloană sau diagonală să fie aceeași. Acest număr se numește constanta magică. *Pătratul magic normal de ordinul 3* se obține completând pătrățelele careului cu toate numerele de la 1 la 9.

• În mod analog, *pătratul magic de ordinul 4* se obține completând pătrățelele careului alăturat, de regulă, cu cifre naturale distincte, astfel încât suma numerelor de pe orice rând, coloană sau diagonală să fie aceeași. *Pătratul magic normal de ordinul 4* se obține completând pătrățelele careului cu toate numerele de la 1 la 16.

Știați că ...

➤ *Legenda pătratelor magice.*

Într-o bună zi s-a revărsat un râu, iar oamenii, înfricoșați, au început să aducă ofrande zeilor râului pentru a-i calma furia. Însă, de fiecare dată, apărea o broască țestoasă care încercuia ofrandele, fără să le accepte. În cele din urmă, un băiat a observat marcajele speciale de pe carapacea ei și le-a interpretat. El le-a spus oamenilor că trebuie adusă o anumita cantitate (15) și astfel zeul va fi mulțumit. Acest lucru s-a și întâmplat, iar apele au fost readuse în matcă.

➤ Chinezii inventaseră și practicau aceste exerciții matematice cu 5000 de ani înaintea erei noastre. Pătratele magice indiene, vechi de peste 2000 de ani, sunt de asemenea cunoscute.

Scăderea numerelor naturale

Bianca vrea să-și facă abonament la Gazeta Matematică. Ea a aflat că abonamentul costă 85 de lei. Ce sumă de bani îi rămâne Biancăi, dacă ea are 100 de lei? Verifică rezultatul efectuând proba prin adunare și prin scădere.

Rezolvare: 100 – 85 = 15 (lei). Proba prin adunare: 85 + 15 = 100 (lei).
Proba prin scădere: 100 – 15 = 85 (lei).

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La o scădere, $d - s = r$, d se numește ***descăzut***, s se numește ***scăzător*** și r se numește ***rest*** sau ***diferență***. Descăzutul este mai mare sau egal cu scăzătorul.

Proba adunării se face prin scădere. Proba scăderii se face sau prin adunare sau prin scădere.

Adunarea: termen (a) + termen (b) = suma (s). Proba: $a = s - b$; $b = s - a$.

Scăderea: descăzut (d) – scăzător (s) = diferență (r). Proba: $d = s + r$; $s = d - r$.

Să exersăm:

➢ Numărul cu 39 mai mic decât 152 este $152 - 39 = 113$.

➢ Din cele 582 kg de roșii pe care le are, un magazin vinde într-o zi 179 kg. Câte kilograme au rămas în magazin? 582 – 179 = 403 kg.

➢ Calculați și apoi faceți proba: 659 – 361 = 298. Proba: 361 + 298 = 659 sau 659 – 298 = 361.

➢ Calculați, așezând numerele unele sub altele:

2513–234; 12345–3718; 24712–15723.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 2513 - \\ 234 \\ \hline 2279 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345 - \\ 3718 \\ \hline 8627 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24712 - \\ 15723 \\ \hline 8989 \end{array}$$

➢ Refaceți scăderile înlocuind steluțele cu cifre:

$$\begin{array}{r} 5\star 1 - \\ 3\star \\ \hline 474 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\star 15 - \\ 8\star\star \\ \hline 3785 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \star 6\star\star 9 - \\ 1\star 82\star \\ \hline 19113 \end{array}$$

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 511 - \\ 37 \\ \hline 474 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4615 - \\ 830 \\ \hline 3785 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36939 - \\ 17826 \\ \hline 19113 \end{array}$$

➢ Ana și Maria au de rezolvat scăderea: 58 – 12 – 8. Ana scrie: 58 – 12 – 8 = = 46 – 8 = 38, iar Maria scrie 58 – 12 – 8 = 58 – 4 = 54. Cine a greșit?

Răspuns: Maria a greșit, pentru că nu a rezolvat scăderile în ordinea din exercițiu.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă într-un exercițiu avem mai multe adunări și scăderi, acestea se rezolvă de la stânga la dreapta. Dacă într-un exercițiu avem paranteze, prima dată se rezolvă operațiile din paranteze.

Să exersăm:

➤ Calculați: a) 123 + 27 – 52; b) 2816 – 3 – 29 – 183; c) 45 – (56 – 29 + 1).

Rezolvare: a) 123 + 27 – 52 = 150 – 52 = 98; b) 2816 – 3 – 29 – 183 = 2813 – – 29 – 183 = 2784 – 183 = 2601; c) 45 – (56 – 29 + 1) = 45 – (27 + 1) = 45 – 28 = 17.

➤ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	b	c	$a-b$	$c-b$	$a+(c-b)$	$(a-b)+c$	$a+b-c$
57	31	51	26	20	77	77	37
368	159	453					

➤ Câte numere sunt de la 1 la 15? Dar de la 5 la 24? Dar de la 78 la 153?

Rezolvare: De la 1 la 15 sunt 15 numere. De la 5 la 24 sunt 24 – 5 + 1 = 20 numere.

PROBLEME PROPUSE:

1. Aflați numărul cu 2503 mai mic decât 12311.

2. Efectuați: a) 1256 – 422; b) 100000 – 5667; c) 200885 – 20088; d) 96023 – 5959; e) 42001 – 39999; f) 123123 – 32198; g) 126 – (45 – 31 + 26).

3. Cât scădem din 5066 pentru a obține 857? Cu cât este 2844 mai mare decât 583?

4. Cu o bancnotă de 200 de lei am cumpărat un stilou de 52 de lei și o carte de 98 de lei. Ce rest am primit?

5. Într-un oraș sunt trei școli. În prima învață 344 de elevi, în a doua cu 49 de elevi mai puțini decât în prima, iar în a treia învață cu 69 de elevi mai puțini decât în primele două la un loc. Câți elevi învață la școlile din oraș?

6. Suma a trei numere este 483. Aflați primul număr știind că al doilea este 59, iar al treilea este cu 15 mai mic decât al doilea.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați: 2000 – 1999 + 1998 – 1997 + ... + 4 – 3 + 2 – 1.

2. Aflați numerele a și b știind că a este cel mai mic număr natural de două cifre, iar suma lor este 29.

3. Ina a primit de la mama 24 de lei și de la tata 35 de lei pentru a-și cumpăra jocul care costă 123 de lei. De câți lei mai are nevoie?

Înmulțirea numerelor naturale

Trei fete au fiecare câte 4 mere. Câte mere au în total?
Rezolvare: Putem calcula $4+4+4=12$ (mere), sau $4 \cdot 3=12$ (mere).

SĂ NE AMINTIM!

✓ Înmulțirea este o adunare repetată. Numerele care se înmulțesc se numesc ***factori***, iar rezultatul înmulțirii se numește ***produs***, $a \times b = c$.

✓ Când înmulțim un număr natural ***a*** cu 10, cu 100, cu 1000 etc., la rezultat vom scrie numărul ***a*** urmat de atâtea zerouri câte are celălalt factor.

Să exersăm:

➢ Dacă înmulțim 321 · 3 sau 3 · 321 obținem acelați rezultat. Aceasta înseamnă 321 + 321 + 321 sau 3 + 3 + 3 + ... + 3 de 321 de ori.

➢ La înmulțirea 15 · 2 · 378 putem face calculele în ordinea scrierii, putem grupa (15 · 2) · 378 sau 15 · (2 · 378). De fiecare dată obținem același rezultat.

➢ Marga cumpără 2 pixuri și Ionel 5 pixuri. Un pix costă 8 lei. Cât au plătit în total?

Rezolvare: Metoda I. Marga plătește 8 · 2 = 16 (lei) și Ionel 8 · 5 = 40 (lei). Cei doi copii plătesc împreună 16 + 40 = 56 (lei).

Metoda II. Calculăm întâi câte pixuri au cumpărat cei doi copii, 2 + 5 = 7 (pixuri). Cele 7 pixuri costă 8 · 7 = 56 (lei). Putem spune că: 8 · 2 + 8 · 5 = 8 · (2 + 5).

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul a oricăror două sau mai multe numere nu se schimă dacă:
– schimbăm ordinea factorilor: $a \cdot b = b \cdot a$ (înmulțirea este ***comutativă***);
– grupăm factorii în moduri diferite: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (înmulțirea este ***asociativă***).
Numărul 1 este ***element neutru*** la înmulțire, adică ***a*** · 1 = ***a***, oricare ar fi ***a*** natural.
Înmulțind orice număr natural cu zero, produsul este egal cu zero: $a \cdot 0 = 0$.
Înmulțirea este ***distributivă față de adunare și față de scădere***, adică $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi ***a***, ***b***, ***c*** numere naturale.

Să exersăm:

➢ Numărul de 5 ori mai mare decât 12 este 5 · 12=60.

➢ Să calculăm, așezând numerele unele sub altele: 75 · 38; 102 · 26; 243 · 304.

$$\begin{array}{r} 75\cdot \\ 38 \\ \hline 600 \\ 225 \\ \hline 2850 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 102\cdot \\ 26 \\ \hline 612 \\ 204 \\ \hline 2652 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 246\cdot \\ 304 \\ \hline 984 \\ 738 \\ \hline 74784 \end{array}$$

➢ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$(a - b) \cdot c$	$a \cdot b - a \cdot c$
21	14	11	294	154	525	77	63
102	98	75					

➢ Matei a rezolvat 25 de exerciții, Ioana de două ori mai multe, iar Robert a rezolvat de trei ori mai multe exerciții decât cei doi copii la un loc. Câte exerciții au rezolvat împreună?

Rezolvare: Ioana a rezolvat $2 \cdot 25 = 50$ (exerciții), Robert a rezolvat $3 \cdot (25 + 50) = 225$ (exerciții), iar în total au rezolvat $25 + 50 + 225 = 300$ (exerciții). Putem rezolva problema și direct: $25 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot (25 + 2 \cdot 25) = 300$ (exerciții).

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Exemplu. Anca și Maria au rezolvat corect exercițiul: $12 \cdot 42 \cdot 5$. Anca a păstrat ordinea efectuării operațiilor $12 \cdot 42 \cdot 5 = 504 \cdot 5 = 2520$, iar Maria a folosit comutativitatea și asociativitatea înmulțirii $12 \cdot 42 \cdot 5 = (12 \cdot 5) \cdot 42 = 60 \cdot 42 = 2520$.

Dacă într-un exercițiu avem mai multe adunări, scăderi și înmulțiri, întâi rezolvăm înmulțirile și apoi efectuăm adunările și scăderile de la stânga la dreapta. Dacă într-un exercițiu avem paranteze rotunde și pătrate, efectuăm întâi operațiile din parantezele rotunde după care efectuăm operațiile din parantezele pătrate, iar la final efectuăm restul operațiilor.

Să exersăm:

➢ $2010 - 26 \cdot 13 + (31 + 2 \cdot 5) = 2010 - 338 + (31 + 10) = 2010 - 338 + 41 = 1713$.

➢ $2 \cdot [52 + (81 - 4 \cdot 12 + 31) - 26 \cdot 3] = 2 \cdot [52 + (81 - 48 + 31) - 78] = 2 \cdot [52 + (33 + 31) - 78] = 2 \cdot (52 + 64 - 78) = 2 \cdot (116 - 78) = 2 \cdot 38 = 76$.

➢ Să înlocuim steluțele cu cifre:

$$\begin{array}{r} 2\star 1\ \cdot \\ \star \\ \hline 884 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \star 6 \star 5\ \cdot \\ \star 5 \\ \hline 8125 \\ 4\star 7\star\ \ \\ \hline \star\star\star\star\star \end{array} \qquad \begin{array}{r} \star\star 4\ \cdot \\ \star\star\star \\ \hline 1884 \\ 6\star\star\ \ \ \ \\ \hline \star\star\star\star\star \end{array}$$

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 221\ \cdot \\ 4 \\ \hline 884 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1625\ \cdot \\ 35 \\ \hline 8125 \\ 4875\ \ \\ \hline 56875 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 314\ \cdot \\ 206 \\ \hline 1884 \\ 628\ \ \ \ \\ \hline 64684 \end{array}$$

♦ Factor comun

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă $9 \cdot (4+8) = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 8$, atunci putem scrie și că $9 \cdot 4 + 9 \cdot 8 = 9 \cdot (4+8)$. Deci, în cazul general, ajungem la: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$ și $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b-c)$. Observăm că, în prima parte a egalității, cei doi termeni au ca *factor comun* pe a. Spunem că „scoatem factor comun pe *a*” sau că „dăm factor comun pe *a*”.

Dacă factorul comun nu este evidențiat, adică „nu se vede”, putem scoate factor comun un număr la care fiecare termen se împarte exact, de obicei cel mai mare număr cu această proprietate. *De exemplu:* $12+14 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (6+7)$.

După ce dăm factor comun în paranteză vom avea tot atâția termeni, fiecare dintre ei fiind rezultatul împărțirii termenului inițial la factorul comun.

Să exersăm:

➢ $7 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (6+4) = 7 \cdot 10 = 70$; $3 \cdot 4 + 3 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 3 \cdot (4+9-6) = 3 \cdot 7 = 21$; $12 + 6 \cdot x = 6 \cdot 2 + 6 \cdot x = 6 \cdot (2+x)$; $12 + 14 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (6+7) = 2 \cdot 13 = 26$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați: a) $24 \cdot 9$; b) $34 \cdot 100$; c) $724 \cdot 24$; d) $3200 \cdot 10$; e) $2008 \cdot 789$; f) $21 \cdot 500 \cdot 13$; g) $8007 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 23$; h) $25 \cdot 1034 \cdot 4$; i) $235 \cdot 358 \cdot 4699 \cdot 0$; j) $1005 - 24 + 2 \cdot 50$; k) $10 + 2\,(1750 - 15 \cdot 40)$.

2. Completați: a) $789 \cdot \square = 789$; b) $27 \cdot (13+591) = 27 \cdot \square + \square \cdot 591$.

3. Aflați numărul de 203 ori mai mare decât 304.

4. Într-un coș sunt 48 de mere. În al doilea coș numărul de mere este dublu numărului de mere din primul coș, iar în al treilea, triplul numărului de mere din primul coș. Câte mere sunt în fiecare coș?

5. Un tricou costă 23 de lei. O bluză costă de 7 ori mai mult decât tricoul. Cât costă 26 de bluze și 13 tricouri la un loc?

6. Care număr, înmulțit cu 3, dă cel mai mare număr natural de două cifre identice?

7. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{25x}$ care au produsul cifrelor 90.

8. Aflați toate numerele naturale $\overline{2a3b}$ care au produsul cifrelor 60.

9. Calculați, scoțând factor comun: a) $7 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; b) $8 \cdot 11 - 8 \cdot 1$; c) $4 \cdot 9 + 6 \cdot 4$; d) $44 \cdot 876 + 876 \cdot 56$; e) $178 \cdot 7 + 178 \cdot 98 - 5 \cdot 178$; f) $7x + 7y - 7z$; g) $10 + 2a$.

10. Dacă $x = 7$ și $a + b = 11$, aflați: a) $3x + 2a + 2b$; b) $x + 13a + 13b$; c) $ax + xb$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Despre trei numere știm că al doilea este dublul primului, iar al treilea este triplul celui de-al doilea. De câte ori este mai mare a treilea decât primul?

2. Scrieți numărul 5 ca produs de două numere naturale. Apoi, ca produs de trei numere naturale. Se poate scrie 5 ca un produs de trei numere naturale diferite?

3. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ în care cifrele ***a***, ***b*** și ***c*** sunt consecutive, în această ordine, iar produsul lor este un număr de două cifre.

4. Câte numere de forma $\overline{5x6y}$, care au produsul cifrelor egal cu zero, există?

5. Aflați ***x***, dacă $a+b=8$: a) $x+2a+2b=20$; b) $5a+5b-x=12$; c) $x+6=23+7a+7b$.

6. Scoateți factor comun: a) $6a-8b$; b) $3\cdot9+4\cdot9-7\cdot2$.

7. Aflați numărul natural ***x***, dacă $a-b=17$: a) $x-2a+2b=11$; b) $2b-2a+x=45$.

SĂ NE AMUZĂM!

• Doi țărani duceau la târg, fiecare, câte 4 găini, 2 cocoși, 3 rațe. Câte picioare mergeau la târg?

(4 picioare)

• Un tren electric merge de la est spre vest cu viteza de 100 km pe oră. Dacă însă suflă vântul de la vest spre est, trenul va avea viteza de 80 km pe oră. În ce direcție va fi dus fumul trenului?

(Trenul electric nu scoate fum.)

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

• *Pătratul magic de ordinul 3 la înmulțire* se obține completând un careu 3×3 cu numere, de regulă, naturale, astfel încât produsul numerelor de pe fiecare rând, coloană sau diagonală să fie aceeași. Produsul obținut se numește „produs magic”.

Încercați și voi! Completați careul alăturat pentru a fi magic:

	100	2
4	10	
50		

• La un concurs pe echipe s-a propus următorul exercițiu spre rezolvare dar, din cauza imprimantei, nu s-au tipăit și parantezele. Cele patru echipe participante au obținut rezultate diferite, numerele 11, 8, 5 și 23, dar totuși au primit punctaje maxime. Pune și tu parantezele pentru a obține cele patru rezultate. Verifică dacă se mai pot obține și alte rezultate.

$$3\cdot5+3-2\cdot7+1$$

Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

➢ Maria are o cutie cu 20 de bomboane și vrea să le împartă în mod egal cu fratele ei. Câte bomboane va avea fiecare copil?

Rezolvare: $20 : 2 = 10$, deci fiecare copil va primi 10 bomboane și nu va rămâne nicio bomboană. Spunem că împărțirea s-a efectuat exact.

➢ Dacă împărțim 44 de mere unui grup de patru copii, fiecare va primi 11 mere și nu va rămâne niciun măr. Împărțirea s-a efectuat exact, adică restul a fost zero.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La o împărțire cu rest 0, $d : î = c$, numărul natural d se numește ***deîmpărțit,*** $î$ se numește ***împărțitor***, iar c se numește ***cât***. Împărțitorul nu este niciodată egal cu 0, adică împărțirea la 0 nu este definită.

Proba înmulțirii se face prin împărțire, iar proba împărțirii se face prin înmulțire sau împărțire:

• *Înmulțire:*

factor (a) · factor (b) = produs (c); proba înmulțirii: $a = c : b$ sau $b = c : a$.

• *Împărțire:*

deîmpărțit (d) : împărțitor ($î$) = cât (c); proba împărțirii: $d = î \cdot c$ sau $î = d : c$.

Împărțirea cu rest 0 se mai numește și ***împărțire exactă.***

Să exersăm:

➢ Să împărțim numerele 35 și 7. Calculăm $35 : 7 = 5$, care poate fi scris și $35 = 7 \cdot 5$. Deducem următoarele: 35 se împarte exact la 7; 35 se împarte exact la 5; 35 este de 7 ori mai mare decât 5; 35 este de 5 ori mai mare decât 7; 5 este de 7 ori mai mic decât 35; 7 este de 5 ori mai mic decât 35.

➢ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

d	$î$	$d : î$	numărul de 3 ori mai mic decât d	numărul de 5 ori mai mic decât $î$	numărul de 3 ori mai mare decât d	numărul de 5 ori mai mare decât $î$
15	5	3	5	1	45	25
45	15					
105	15					
225	25					
1005	5					

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Un număr natural par se poate nota $n = 2 \cdot k$; un număr care se împarte exact la 3 se poate nota $n = 3 \cdot p$ și așa mai departe.

SĂ NE AMINTIM!

✓ Să calculăm: $5600 : 100 = 56$; $1560000 : 10000 = 156$; $89000 : 10 = 8900$.

Un număr natural se poate împărți la 10, 100, 1000 etc. tăind, de la sfârșitul acestuia, atâtea zerouri câte are împărțitorul (un zero dacă împărțitorul este 10, două zerouri dacă împărțitorul este 100 etc.).

Exemplu: $520000 : 10000 = 52$ (împărțitorul are patru zerouri, așadar tăiem ultimele patru zerouri ale deîmpărțitului)

✓ Am învățat să împărțim un număr natural la un împărțitor format dintr-o singură cifră și la un împărțitor format din două cifre. Să ne amintim împărțind 6642 la 54.

```
6642 : 54 = 123
54
124
108
=162
 162
 ===
```

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Același algoritm se folosește și la împărțirea unui număr natural la un număr de 3 sau mai multe cifre.

Proba împărțirii făcută prin înmulțire este: $598 \cdot 231 = 138138$, iar proba împărțirii făcută prin împărțire este: $138138 : 231 = 598$.

```
138138 : 598 = 231
1196
=1853
 1794
 ==598
   598
   ===
```

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelele pe caiete și completați-le:

a	b	$a : b$
25600	100	
69301000	1000	
900000	10000	
3420000	10	

d	$î$	$d : î$
23454	9	
10105	5	
111285		45
39746	7	

m	n	$m : n$
15876	126	
72541		241
103415	215	
216315		345

2. Calculați numărul de 8 ori mai mic decât 1880.

3. Cât primește fiecare dintre cei 5 frați, dacă mama le împarte în mod egal 780 lei?

4. În câte bancnote de 50 de lei poate fi schimbată suma de 77800 de lei?

5. Maria cumpără 20 de caiete a câte 4 lei bucata și o trusă de 8 pixuri identice, plătind în total 96 de lei. Cât costă un pix?

Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Într-un coș sunt 28 de mere, pe care vrem să le împărțim în mod egal la 4 copii. Câte mere primește fiecare copil? 28 : 4 = 7, deci fiecare copil primește 7 mere.

Dar dacă în coș sunt 27 de mere? 27 : 4 = 6 rest 3, deci fiecare copil primește 6 mere și rămân 3 mere, număr mai mic decât numărul de copii.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Astfel, când împărțim un număr natural d la un număr natural $î$, d se numește ***deîmpărțit***, iar $î$ se numește ***împărțitor***. În urma efectuării operației obținem ***câtul*** c și ***restul*** r. Restul împărțirii unui număr natural la altul este întotdeauna mai mic strict decât împărțitorul!

Proba împărțirii cu rest este $d = î \cdot c + r$, $0 \leqslant r < î$.

Să exersăm:

➢ Copiați tabelele pe caiete și completați-le după model:

d	$î$	c	r	$c \cdot î + r$
634	5	126	4	126 · 5+4=634
833	17			
572	21			
482	7			
90000	360			

d	$î$	c	r	$c \cdot î + r$
13843	112	123	67	13843
54210	240			
250163	123			
2700	108			
200043	7409			

➢ Aflați numărul care împărțit la 11 dă câtul 8 și restul 5.

Rezolvare: Numărul este 8 · 11 + 5 = 88 + 5 = 93.

➢ Aflați numerele naturale care împărțite la 8 dau câtul 9.

Rezolvare: Dacă împărțim un număr la 8 se poate obține orice rest mai mic decât 8, adică restul poate fi 0, 1, 2, ..., 7. Numerele cerute sunt: 9 · 8 + 0 = 72, 9 · 8 + 1 = 73; 74, 75, 76, 77, 78, 79.

➢ Să aflăm cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 28 dă restul 25. Cel mai mic număr de 4 cifre este 1000. Împărțim 1000 la 28 și obținem câtul 35 și restul 20. Deci 28 · 35 + 20 = 1000, iar pentru restul 25 avem 28 · 35 + 25 = 1005 numărul cerut de problemă.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Am văzut că un număr par, n, poate fi scris sub forma $n = 2 \cdot k$; un număr impar poate fi scris sub forma $n = 2 \cdot k + 1$, pentru că restul împărțirii lui la 2 este 1.

Un număr care se împarte exact la 3 se poate nota: $n = 3 \cdot p$. Restul, diferit de 0, al împărțirii unui număr natural la 3 este 1 sau 2. Numerele care nu se împart exact la trei au forma $n = 3 \cdot p + 1$ sau $n = 3 \cdot p + 2$.

Să exersăm:

➢ Să calculăm suma primelor 100 de numere naturale nenule: scriem numerele de două ori, de la 1 la 100 și de la 100 la 1, unele sub altele și adunăm fiecare coloană. Sunt 100 de coloane având suma 101, deci suma totală este $101 \cdot 100$. Șirul celor 100 de numere este scris de 2 ori, așadar: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 100 \cdot 101 : 2$.

1	2	3	...	99	100
100	99	98	...	2	1
101	101	101		101	101

Analog, suma primelor n numere naturale nenule: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n + 1) : 2$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

d	$î$	c	r	$c \cdot î + r$
6812		126	8	
954	27			
389	35			
482		56	34	

d	$î$	c	r	$c \cdot î + r$
	112	801	55	
1597530	240			
35610	123			
2700		90	0	

2. Trebuie așezate 322 de ouă în cartoane de câte 30 de ouă. Câte cartoane sunt necesare și câte ouă vor fi în ultimul carton?

Indicație: Vom avea un număr de cartoane pline și un carton incomplet!

3. Folosind relația dintre numerele care apar la împărțire, determinați toate numele naturale nenule care, împărțite la 6, să dea câtul 5.

4. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit la 10 dă restul 9 și un cât nenul.

5. Sub ce formă se scriu numerele naturale care împărțite la 7 dau restul 6?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 4 dau câtul egal cu restul. *Indicație*: Folosiți relația dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest în care c și r sunt egale. Nu uitați că restul este întotdeauna mai mic strict decât împărțitorul!

2. Suma a două numere este 101. Se știe că, dacă împărțim numărul cel mare la numărul cel mic, obținem câtul 7 și restul 5. Aflați cele două numere.

3. Diferența a două numere naturale este 125. Aflați cele două numere știind că, dacă împărțim pe cel mare la cel mic, obținem câtul 4 și restul 14.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Scrieți, folosind cifrele și literele: a) anul în care suntem; b) ultimul an al secolului al XX-lea; c) anul în care v-ați născut.

2. Scrieți numerele naturale de cinci cifre care au o cifră egală cu 5, iar celelalte cifre egale cu 1. Câte soluții are problema?

3. Câte numerele naturale de trei cifre există, astfel încât suma dintre prima și ultima cifră să fie 10?

4. Reprezentați pe axa numerelor două puncte care să aibă coordonatele numere de două cifre.

5. Scrieți numerele de trei cifre care să aibă suma cifrelor egală cu 2.

6. Câte numere naturale sunt între 13 și 31?

7. Câte zerouri se folosesc pentru scrierea primelor o sută de numere naturale?

8. Scrieți numărul 30 ca o sumă de cinci termeni egali.

9. Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	b	$a+b$	$a \cdot b$	câtul împărțirii lui a la b	restul împărțirii lui a la b
509	17	526	8653	29	16
345	45				
8796	100				
1002	102				

10. Comparați suma primelor 56 de numere naturale nenule cu suma numerelor naturale cuprinse între 23 și 79.

11. Victor calculează cât trebuie să plătească pentru a achita facturile lunii februarie: 162 de lei – curent electric, 123 de lei – abonamente la telefonie, 408 lei – gaze și 39 de lei – cablu TV. Ce sumă obține Victor?

12. Aflați numărul care împărțit la jumătatea sa dă rezultatul 2. Câte soluții are problema?

13. Comparați 111111 cu 99999. Care este diferența lor?

14. Calculați, folosind factorul comun:

a) $23 \cdot 18 + 18 \cdot 55 - 78 \cdot 18$; b) $59 \cdot x + 64 \cdot x + x$; c) $(x+3) \cdot 67 + 33 \cdot (x+3)$.

15. Reconstituiți operațiile:

```
 4☺☺ –        ☺832 +        5☺3 ·
 ☺89           ☺☺6           ☺☺
 ---          -----         ------
  42          5398          16 89
                          ☺☺☺☺
                          ☺☺☺☺☺
```

16. Completați căsuțele libere, astfel încât produsul numerelor din oricare trei căsuțe consecutive să fie 108.

		9				

17. Câte cifre se folosesc pentru a scrie numerele de la 1 la 23?

18. Într-un cofraj încap 30 de ouă. Calculați numărul minim de cofraje necesar transportului unui număr de 486 de ouă.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. De câte ori se folosește cifra 3 în scrierea tuturor numerelor de la 1 la 100?

2. Câte cifre se folosesc pentru numerotarea unei reviste care are 46 de pagini?

3. Aflați jumătatea sumei dintre predecesorul și succesorul lui 48. Ce observați?

4. Câte numere de trei cifre există în care cifra unităților și cea a zecilor sunt egale?

5. Scrieți următorii trei termeni pentru fiecare dintre șirurile:

a) 1, 4, 7, 10, ...; b) 14, 21, 28, 35, ...; c) 12, 23, 34, 45, ...; d) 1, 4, 9, 16, ...

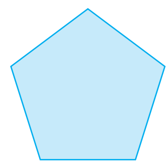
6. Aflați valorile lui x pentru care propozițiile următoare să fie adevărate:

a) $\overline{2x} < 23$; b) $158 < \overline{15x}$; c) $\overline{45x3} < 4564$; d) $5563 < \overline{55xx}$.

7. Calculați suma dintre primele cinci numere naturale mai mari strict decât 457 și cel mai mare număr natural mai mic decât 1002.

8. Calculați în două moduri: $59 \cdot 87 - 31 \cdot 87 + 28 \cdot 99$.

9. Un teren având 5 laturi de câte 8 m trebuie împrejmuit cu trei rânduri de sârmă ghimpată. Poarta ocupă un sfert dintr-o latură și nu se acoperă cu sârmă. Câtă sârmă ghimpată este necesară?



a) 120 m; b) 114 m; c) 40 m; d) 38 m.

10. Rezultatul calculului 5 + 10 + 15 + ... + 255 este:

a) 6630; b) 260; c) 285; d) 5305.

11. Produsul a două numere este 345. Dacă mărim unul dintre ele cu 7 obținem 450. Aflați numerele.

12. Comparați numerele a și b, știind că a este situat pe axă în dreapta numărului b.

13. Aflați cinci numere consecutive, știind că cel din mijloc este 567.

14. Fie numerele $\overline{3x2}$ și $\overline{34y}$. Aflați x și y pentru care $\overline{3x2} < \overline{34y}$.

PROIECT

• Căutați pe internet distanța de la Pământ la Soare, de la Pământ la Lună și de la Pământ la planeta Mercur. Exprimați aceste numere prin aproximări ale lor care se pot ține minte ușor.

• Căutați apoi următoarele vârfuri muntoase din România și ordonați-le crescător după înălțimea lor: Măgura Branului, Ciucaș, Găina, Gutâiul Mare, Moldoveanu, Negoiu, Ocolașu Mare, Omu (Suhard), Omu (Bucegi), Parângul Mare, Papușa, Rarău, Văratec, Toaca.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Succesorul lui 47 este:
a) 46; b) 47; c) 48; d) Nu există.

2. Numărul numerelor naturale cuprinse între 26 și 69 este:
a) 43; b) 69; c) 26; d) 42.

3. Suma dintre cel mai mare număr natural par de trei cifre diferite și cel mai mic număr natural nenul care se împarte exact la 5 este:
a) 989; b) 1002; c) 991; d) 987.

4. Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$ are la sfârșit:
a) un zero; b) două zerouri; c) trei zerouri; d) niciunul.

5. Când împărțim pe 4589 la 18 obținem câtul:
a) 17; b) 262; c) 253; d) 254.

6. Fie $a = 25 \cdot 73 + 3 \cdot (100 - 5 \cdot 13)$. Numărul cu 2017 mai mare decât numărul a este:
a) 3947; b) 2017; c) 3945; d) 5530.

7. Diferența a două numere este 34. Dacă împărțim numărul mare la cel mic obținem câtul 3 și restul 8. Atunci numărul cel mic este:
a) 8; b) 13; c) 3; d) 47.

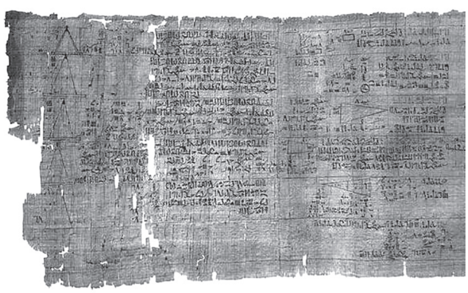
8. Suma numerelor care împărțite la 8 dau câtul 11, iar restul un număr impar, este:
a) 88; b) 368; c) 104; d) 364.

9. Efectuând calculele $22+\left[15\cdot(17-7\cdot2)-35\right]\cdot18-714:7$ obținem:
a) 260; b) 4690; c) 100; d) 3695.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p; 1p din oficiu.

SĂ NE AMUZĂM • SĂ NE AMUZĂM

Problemele lui Ahmes:



1. Pe când mergeam la St. Ives,
M-am întâlnit cu un bărbat cu 7 soții.
Fiecare soție avea 7 saci,
Fiecare sac avea 7 pisici,
Fiecare pisică avea 7 pui,
Pui, pisici, saci și neveste,
Câți merg la St. Ives ?

2. În 7 case sunt câte 7 pisici. Fiecare pisică mănâncă 7 șoareci. Dacă ar fi trăit, fiecare șoarece ar fi mâncat 7 saci de grâu. Din fiecare sac de grâu s-ar fi măcinat 7 kg de făină. Câte kilograme de făină au fost salvate de pisici?

Testul 2

1. Comparați numerele $a = 23 + 17 \cdot 5 - 8$ și $b = 23 \cdot 5 - 17 + 2$.

2. Efectuați următoarele împărțiri și faceți proba:
a) $56 : 12$; b) $1042 : 27$.

3. Efectuați: $17+3\cdot\left[4\cdot(22+54:6)-55\right]$.

4. Dacă $x \cdot y = 153$ și $x \cdot z = 119$, aflați valoarea expresiei $x \cdot (y - z) + 16$.

5. Scrieți-l pe 100 ca produs de patru numere naturale distincte.

6. Într-un parc sunt 18 bănci pe care stau câte 4 oameni, 17 bănci ocupate cu câte trei persoane, iar 15 bănci sunt libere. Câte bănci sunt în parc? Câți oameni sunt așezați pe ele?

7. Puneți paranteze astfel încât scrierea să fie corectă: $17-5\cdot2+125:5:27+8=20$.

Punctaj: 1p, 2p, 1p, 1p, 1p, 2p, 1p; 1p din oficiu.

Testul 3

1. Comparați numerele $a = 27 + 19 \cdot 5 - 4$ și $b = 27 \cdot 5 - 19 \cdot 4$.

2. Efectuați următoarele împărțiri și faceți proba:
a) $129 : 9$; b) $100001 : 516$.

3. Efectuați: $610:5+5\cdot\left[12\cdot6-4\cdot11-8\right]:100+13$.

4. Dacă $a \cdot b = 135$ și $a \cdot c = 105$, aflați valoarea expresiei $a \cdot (b + c) + 10$.

5. Scrieți-l pe 196 ca produs de patru numere naturale distincte.

6. Un agricultor a recoltat de pe terenurile sale 563 kg de pere, 485 kg de mere și 258 kg de nuci. El le-a vândut la piață, astfel: 4 lei kilogramul de pere, 2 lei cel de mere, iar nucile le-a vândut cu 26 de lei kilogramul. Câți bani a avut agricultorul după ce a vândut tot?

7. Puneți paranteze astfel încât scrierea să fie corectă: $9-3\cdot6+11-16-8=39$.

Punctaj: 1p, 2p, 1p, 1p, 1p, 2p, 1p; 1p din oficiu.

SĂ NE JUCĂM

• Înmulțiți numărul 273 cu vârsta voastră și apoi înmulțiți rezultatul obținut cu 37. Observați legătura dintre numărul obținut și vârsta voastră.

• Alegeți un număr format din patru cifre diferite. Aranjați cifrele în așa fel încât să obțineti cel mai mare și cel mai mic număr format din acele cifre și scădeți-le. Repetați acest proces pentru fiecare număr nou obținut. După cel mult 7 astfel de calcule veți ajunge la numărul 6174.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul $5 \cdot 5$ se poate scrie 5^2 și se citește „cinci la puterea a doua” sau „pătratul numărului 5”. Produsul $4 \cdot 4 \cdot 4$ se poate scrie 4^3 și se citește „patru la puterea a treia” sau „cubul numărului 4”. Produsul $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ se poate scrie 3^4 și se citește „trei la puterea a patra”.

În general, pentru orice numere naturale ***a*** și ***n***, $n \neq 0, n \neq 1$, avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$. Putem spune că ***a ridica un număr la o putere*** înseamnă a înmulți baza cu ea însăși, astfel încât numărul factorilor să fie egal cu exponentul. În această scriere, ***a*** se numește ***bază***, iar ***n*** se numește ***exponent.***

Convenim că $a^1 = a$ pentru orice valoare a lui ***a***. De asemenea, tot prin convenție, $a^0 = 1$ pentru orice valoare nenulă a lui ***a***, iar pentru 0^0 spunem că această scriere nu este definită sau nu are sens.

Să exersăm:

- În scrierea $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, numărul 5 este baza și 2 este exponentul;
- În scrierea $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, numărul 3 este baza și 4 este exponentul;
- $2017^0 = 1$; $273^1 = 273$; $0^7 = 0$.
- Să calculăm primele patru puteri ale lui 10: $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$. Să scriem numărul 5000 ca produsul dintre o cifră și o putere a lui 10: $5000 = 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^3$.
- Completați tabelul:

$10^0 = 1$	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$	$5^0 = 1$	$6^0 = 1$	$7^0 = 1$	$8^0 = 1$
$10^1 = 10$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	$6^1 = 6$	$7^1 = 7$	$8^1 = 8$
$10^2 = 100$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	7^2	8^2
10^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3
10^4	2^4	3^4	4^4	5^4	6^4	7^4	
10^5	2^5	3^5	4^5	5^5	6^5		
10^6	2^6	3^6	4^6	5^6			
10^7	2^7	3^7	4^7				
10^8	2^8	3^8					
10^9	2^9						
10^{10}							

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Într-un exercițiu în care apar și ridicări la putere, acestea se rezolvă înaintea celorlalte operații.

Să exersăm:

- $3^2+5^0-2\cdot5=9+1-10=0$; $2\cdot7^2-13=2\cdot49-13=98-13=85$.
- $4^2-3^2+1^{109}=16-9+1=7+1=8$; $5+5^2+5^3=5+25+125=155$.
- $[(14^2-13^2):27-2^0]\cdot2+2004^0=[(196-169):27-1]\cdot2+1=(27:27-1)\cdot2+1=1$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați (încercați să calculați oral): 1^3; 2^0; 3^2; 5^2; 10^6.

2. Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

Puterea este:	5^8	9^{125}		15		0^{14}	
Baza este:			14		1		a
Exponentul este:			2		23		124

3. Scrieți sub formă de putere:

a) $7\cdot7\cdot7\cdot7$; b) $11\cdot11\cdot11$; c) $32\cdot32$; d) 17; e) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$.

4. Scrieți ca înmulțire repetată:

a) 4^5; b) 5^2; c) 7^3; d) 3^6; e) 8^7; f) 13^3.

5. Calculați:

a) 5^2+2^3; b) $3\cdot6^2$; c) 2^5-22; d) $10^2+10^1+10^0$; e) $4^3+3\cdot2^3-5\cdot2+1$;
f) $6^2-4^2+0^{2017}-1^{2018}$; g) $(678^3+876^3)^0$; h) $5^2-4^2-3^2+1^{111}-0^9$;
i) $(24^2:2^4-6^2):4+6^2$; j) $(5^3-2^5:2-3^3:3):10^2-201^0$.

6. Scrieți numărul 13 ca sumă de puteri cu baze diferite.

7. Scrieți numărul 12 ca sumă de puteri cu aceeași bază.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați: $3\cdot10^3+7\cdot10^2+9\cdot10^1+2$ și $8\cdot10^5+5\cdot10^4+3\cdot10^2+7\cdot10+1$. Ce observați?

2. Calculați:

a) $\left(2+2^2+2^3\right):\left(10^1-3\right)$; b) $15^2-\left(14\cdot15+15\right):15^2$; c) $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2$;
d) $\left(3+5^2\cdot2158\right):\left(3+5^2\cdot2158\right)$; e) $\left[2\cdot(3^2+5^3-13)+3\cdot17-23\right]\cdot10^3$.

Reguli de calcul pentru puteri cu aceeași bază

Produsul puterilor care au aceeași bază

$5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$. Observăm că rezultatul este o putere care are aceeași bază ca și puterile care se înmulțesc, iar ca exponent, suma exponenților puterilor inițiale.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru orice numere naturale ***a***, ***m*** și ***n*** are loc relația: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Spunem că, ***pentru a înmulți puteri care au aceeași bază, la rezultat copiem baza și adunăm exponenții.***

Să exersăm:

➤ $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$; $6^8 \cdot 6^7 \cdot 6^6 = 6^{8+7} \cdot 6^6 = 6^{15} \cdot 6^6 = 6^{15+6} = 6^{21}$; $2^4 \cdot 2^5 \cdot 2 = 2^{4+5+1} = 2^{10}$ (ultimul factor, 2, l-am scris ca o putere, adică 2^1);
$3^6 \cdot 9 = 3^6 \cdot 3^2 = 3^8$ (l-am scris pe 9 ca o putere a lui 3 și apoi am aplicat regula).

➤ Să calculăm $2^3 \cdot 3^2$. Nu sunt puteri cu aceeași bază, deci regula nu se aplică. Calculăm fiecare putere și apoi efectuăm produsul: $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

➤ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \cdot a^m$	a	n	m	a^n	a^m	$a^n \cdot a^m$
3	15	26	3^{15}	3^{26}	3^{41}	18	18	28	18^{18}	18^{28}	18^{46}
4	123	49				25	52	36			

Câtul puterilor care au aceeași bază

$5^6 : 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^2 = 25$. Observăm că rezultatul este o putere care are aceeași bază ca și puterile care se împart, iar ca exponent, diferența exponenților puterilor inițiale.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

În general, pentru orice numere naturale *a*, *m*, *n*, $m \geq n$, are loc relația $a^m : a^n = a^{m-n}$. Spunem că, ***pentru a împărți două puteri care au aceeași bază, la rezultat copiem baza și scădem exponenții.***

Să exersăm:

- $7^{13}:7^{11}=7^2=49$ (când numerele sunt mici, putem efectua toate calculele).
- Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \cdot a^m$	$a^n : a^m$
2	87	55	2^{87}	2^{55}	2^{142}	2^{32}
5	612	542				
21	2017	1905				

- $9^{125}:9^{25}:9^{50}=9^{125-25}:9^{50}=9^{100}:9^{50}=9^{100-50}=9^{50}$.
- $\left(7^{15}\cdot 7^4\right):\left(7^{25}:7^9\right)=7^{15+4}:7^{25-9}=7^{19}:7^{16}=7^{19-16}=7^3$.
- Ca să calculăm $2^{52}-2^{51}$ trebuie să ridicăm 2 la cele două puteri, apoi să facem scăderea. Cum exponenții sunt prea mari, putem aduce la o formă mai simplă expresia, astfel: $2^{52}-2^{51}=2^{51}(2^{52}:2^{51}-2^{51}:2^{51})=2^{51}(2^{52-51}-1)=2^{51}(2^1-1)=2^{51}$.
- Să calculăm $2^{10}-2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-2^1-2^0$. Și la acest exercițiu am putea să ridicăm pe 2 la fiecare putere și să efectuăm scăderile, sau să scoatem factor comun din primele două numere, apoi din rezultat cu al treilea număr și tot așa până la final: $2^{10}-2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-2^1-2^0=2^9(2-1)-2^8-\ldots-2^0=$ $=2^9-2^8-\ldots-2^0=2^8(2-1)-2^7-\ldots-2^0=2^8-2^7-\ldots-2^0=2^7(2-1)-2^6-\ldots-2^0=$ $=2^7-2^6-\ldots-2^0=2^7(2-1)-2^6-\ldots-2^0=\ \ldots=2^1-2^0=1$.

Puterea unei puteri

$\left(3^4\right)^2=3^4\cdot 3^4=3^8$. Observăm că exponentul rezultatului este produsul exponenților de la început.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru orice numere naturale *a*, *m* și *n* are loc relația: $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$.

Spunem că, *pentru a ridica o putere la o altă putere, la rezultat copiem baza și înmulțim exponenții.*

Să exersăm:

- Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \cdot a^m$	$a^n : a^m$	$(a^n)^m$
3	15	5	3^{15}	3^5	3^{20}	3^{10}	3^{75}
6	28	9					
18	101	62					

➢ $\left(7^3\right)^5 = 7^{3\cdot5} = 7^{15}$.

➢ Scrieți ca putere cu baza 3: $9 = 3\cdot3 = 3^2$; $81^5 = \left(9\cdot9\right)^5 = \left(3^2\cdot3^2\right)^5 = \left(3^4\right)^5 = 3^{20}$.

➢ Arătați că $4^{3^{2^1}} = 2^{18}$. Calculăm $4^{3^{2^1}} = 4^{3^2} = 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$.

➢ $0^{1995} : 1^0 + 2^4 : 4^2 + 3^9 : 9^3 : 3^3 + 4^{16} : 16^4 : 4^4 : 2^2 =$

$= 0:1 + 2^4 : (2^2)^2 + 3^9 : (3^2)^3 : 3^3 + 4^{16} : (4^2)^4 : 4^4 : 4 =$

$= 0 + 2^4 : 2^4 + 3^9 : 3^6 : 3^3 + 4^{16} : 4^8 : 4^4 : 4 = 0 + 1 + 3^3 : 3^3 + 4^8 : 4^4 : 4 =$

$= 0 + 1 + 1 + 4^4 : 4 = 2 + 4^3 = 66$.

➢ Arătați că $N = 4 + 3\cdot4^1 + 3\cdot4^2 + 3\cdot4^3 + \ldots + 3\cdot4^{120}$ este egal cu 2^{242}.

Rezolvare: $N = 4 + 3\cdot4^1 + 3\cdot4^2 + 3\cdot4^3 + \ldots + 3\cdot4^{120} =$
$4^1(1+3) + 3\cdot4^2 + 3\cdot4^3 + \ldots + 3\cdot4^{120} = 4^2 + 3\cdot4^2 + 3\cdot4^3 + \ldots + 3\cdot4^{120} =$
$4^2(1+3) + 3\cdot4^3 + 3\cdot4^4 + \ldots + 3\cdot4^{120} = \ldots = 4^{120}(1+3) = 4^{121} = (2^2)^{121} = 2^{242}$.

➢ Scrieți 2017 ca o sumă de puteri ale lui 2 cu exponenți diferiți.

Rezolvare: Calculăm puterile lui 2 care dau rezultat mai mic ca 2017.
$2017 = 1024 + 993 = 2^{10} + 512 + 481 = 2^{10} + 2^9 + 256 + 225 =$
$= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 128 + 97 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 64 + 33 =$
$= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 32 + 1 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^0$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Scrieți sub forma unei singure puteri:

a) $2^2\cdot2^4\cdot2^6$; b) $5\cdot5^2\cdot5^3$; c) $3^8\cdot3^{12}\cdot3^{10}\cdot3^4$; d) $10^4\cdot10\cdot10^0$; e) $2^5\cdot4$;
f) $5^6\cdot25\cdot5$; g) $2\cdot2^2\cdot2^3\cdot8$; h) $2\cdot4\cdot8$; i) $2^{10}:2^6$; j) $7^9:7^5$; k) $15^{21}:15^{17}$;
l) $10^{56}:10^{49}$; m) $123^{88}:123^{88}$; n) $1001^{37}:1001^0$; o) $\left(2^5\right)^3$; p) $\left(5^3\right)^{10}$;
r) $\left(11^6\right)^7$; s) $\left[\left(2^5\right)^3\right]^4$; t) $\left(1^4\right)^{15}$; u) $\left\{\left[\left(3^4\right)^7\right]^5\right\}^2$.

2. Scrieți ca putere cu baza 2 numerele: 2; 16; 8; 32; 4^6; 16^5; 64^{10}.

3. Calculați și apoi scrieți sub forma unei singure puteri:

a) $2^4\cdot3^2 - 2^4$; b) $7^5\cdot7^6\cdot7 - 7^3\cdot7^6\cdot7^2\cdot7$; c) $\left(5^3\right)^4 : 5^{11}$; d) $\left(2^3\right)^5 : \left(2^4\right)^3$;
e) $\left(1 + 3^{14} : 3^9\right) : \left(1 + 3^4\cdot3^2 : 3\right)$.

4. Scrieți ca putere cu baza 5 numerele: 25^6; $\left(5^6\right)^6\cdot25$; 625^8.

Reguli de calcul pentru puteri cu același exponent

Produsul de puteri de numere naturale cu același exponent

$2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3$. Observăm că rezultatul este puterea comună a produsului celor două baze.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru orice numere naturale ***a, b*** și ***n*** are loc relația: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Spunem că, *pentru a înmulți două puteri cu același exponent, înmulțim bazele și scriem la rezultat exponentul comun.*

Să exersăm:

- $7^{11} \cdot 5^{11} = (7 \cdot 5)^{11}$; $11^{1000} \cdot 13^{1000} = (11 \cdot 13)^{1000}$; $3^{28} \cdot 5^7 = (3^4)^7 \cdot 5^7 = (3^4 \cdot 5)^7$.
- Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	b	n	a^n	b^n	$a^n \cdot b^n$	$(a \cdot b)^n$
31	12	15	31^{15}	12^{15}	$31^{15} \cdot 12^{15}$	$(31 \cdot 12)^{15}$
6	28	28				
18	101	101				

- $(5 \cdot 8)^{125} : (5^{112} \cdot 8^{121}) = (5^{125} \cdot 8^{125}) : (5^{112} \cdot 8^{121}) = (5^{125} : 5^{112}) \cdot (8^{125} : 8^{121}) = 5^{13} \cdot 8^4$.
- Câte cifre are numărul: $2^5 \cdot 2^{32} \cdot 5^{37}$? Câte zerouri are numărul obținut?

Rezolvare: $2^5 \cdot 2^{32} \cdot 5^{37} = 2^{5+32} \cdot 5^{37} = 2^{37} \cdot 5^{37} = (2 \cdot 5)^{37} = 10^{37} = 100...0$. Numărul are 38 de cifre, dintre care 37 sunt zerouri.

Puterea unui cât de numere naturale care se împart

$125^3 : 5^3 = (5^3)^3 : 5^3 = 5^9 : 5^3 = 5^6$. Putem rezolva exercițiul și așa: $125^3 : 5^3 =$
$= (125 \cdot 125 \cdot 125) : (5 \cdot 5 \cdot 5) = (125 : 5) \cdot (125 : 5) \cdot (125 : 5) = (125 : 5)^3 = 25^3 = (5^2)^3 = 5^6$.
Observăm că rezultatul este câtul celor două baze cu exponentul comun.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru orice numere naturale ***a, b*** și ***n*** are loc relația: $a^n : b^n = (a : b)^n$.

Spunem că, *pentru a împărți două puteri cu același exponent, împărțim bazele și scriem la rezultat exponentul comun. Facem observația că vom folosi baze care se împart exact.*

Să exersăm:

➤ $175^{11}:5^{11}=(175:5)^{11}=35^{11}$; $1100^{1000}:11^{1000}=(1100:11)^{1000}=100^{1000}$.

➤ Copiați tabelul pe caiete și completați-l după model:

a	b	n	a^n	b^n	$a^n:b^n$	$(a:b)^n$
144	18	15	144^{15}	18^{15}	$144^{15}\cdot 18^{15}$	8^{15}
36	6	28				
1300	13	101				

➤ $24^{123}\cdot 3^{123}:36^{123}=(24\cdot 3)^{123}:36^{123}=72^{123}:36^{123}=(72:36)^{123}=2^{123}$.

➤ Ce rest se obține la împărțirea numerelor: a) 45^{35} și 15^{35}; b) $(26^8)^{12}\cdot 9^{96}$ și 18^{96}?

Rezolvare: a) $45^{35}:15^{35}=(45:15)^{35}=3^{35}$, deci restul împărțirii este 0;

b) Transformăm primul număr: $(26^8)^{12}\cdot 9^{96}=26^{8\cdot 12}\cdot 9^{96}=26^{96}\cdot 9^{96}=(26\cdot 9)^{96}$. Împărțirea numerelor este: $(26\cdot 9)^{96}:18^{96}=(26\cdot 9:18)^{96}=13^{96}$. Împărțirea este exactă.

➤ Cu câte zerouri se termină numărul: $4^{47}\cdot 125^{47}:5^{47}$?

Rezolvare: $4^{47}\cdot 125^{47}:5^{47}=(4\cdot 125:5)^{47}=100^{47}=(10^2)^{47}=10^{2\cdot 47}=10^{94}$, deci 94 de zerouri.

➤ Câte cifre de 3 are numărul $(10^8-1):3$?

Rezolvare: $(10^8-1):3=(100000000-1):3=99999999:3$ = 33333333; 8 cifre de 3.

PROBLEME PROPUSE:

1. Scrieți ca putere a unei singure baze: a) $7^{10}\cdot 8^{10}$; b) $11^8\cdot 5^8$; c) $3^{10}\cdot 5^{10}\cdot 7^{10}$; d) $15^{25}\cdot 4^{25}\cdot 7^{25}$; e) $32^{78}\cdot 25^{78}$; f) $6^{35}\cdot 5^{35}\cdot 30^{35}$; g) $2^{18}\cdot 3^{18}\cdot 4^{18}\cdot 5^{18}$; h) $425^{62}:25^{62}$; i) $64^{125}:16^{125}$; j) $225^{45}:15^{45}:5^{45}$; k) $130^{81}:26^{81}$; l) $144^{144}:36^{144}:4^{144}$; m) $(1+2+3+4+5)^{456}:5^{456}:3^{410}$.

2. Copiați tabelul pe caiete și completați-l.

a	b	n	a^n	b^n	$a^n\cdot b^n$	$(a\cdot b)^n$	$a^n:b^n$	$(a:b)^n$
169	13	53						
81	27	25						
625	25	111						

3. Calculați: a) $(7\cdot 9)^{223}:(7^{222}\cdot 9^{221})$; b) $153^{231}\cdot 17^{231}:(9^{222}\cdot 17^{222}\cdot 17^{222})$; c) $(9+3^5:3^4+1^{125}+5)^{625}:3^{625}$; d) $(3\cdot 5^4)^{269}\cdot (3^4\cdot 5)^{269}:(27\cdot 25)^{269}$; e) $(2^3\cdot 3^2)^{115}\cdot (3^3\cdot 2^2)^{115}:(3^4\cdot 2^4)^{115}$; f) $(13^5\cdot 3^4)^0\cdot (7^{99}\cdot 53^9)^0:(2^{55}\cdot 3^{64})^0$; g) $(1+2+3^2)^{657}\cdot (3\cdot 2^2)^{657}:12^{657}$.

4. Câte cifre are numărul: $4^5\cdot 25^5\cdot 10^{37}$? Câte zerouri are numărul obținut?

5. Ce rest se obține la împărțirea numerelor: a) 32^{32} și 8^{32}; b) $(16^{11})^{12}\cdot 9^{132}$ și 12^{132}?

6. Fie numerele $a = (1 + 2 + 3 + ... + 999) \cdot 2 : 10^2$ și $b = (2^{17} \cdot 5^{17})^{11} : 100^{93} : 10$. Calculați valoarea lui $c = 2 \cdot (a + b) - 1000$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați $X^Y + Y^X$, dacă:

$X = 8^{33} : \left[4^{32} \cdot 2^{34} + (2^5 \cdot 2^{20})^5 : (16 \cdot 2^{23}) + (7^5 : 7^5 - 1)^{32} \cdot 4\right]$,

$Y = \left[(11 - 0^{11}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2004}\right] \cdot (3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 2$.

2. Calculați: $7^{100} : \left[7^{40} \cdot 7^{58} - \left(7^{10} \cdot 7^{15}\right)^5 : 7^{27} + \left(8^{57} : 8^{56} - 1^{100}\right)^{97} \cdot 7\right]$.

3. Calculați $2^3 + [(2^3)^7 - (2^7)^3 + 3 \cdot 3^4 - 81] : \{3^2 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2^{73} : 2^{72} \cdot 3)]\}$.

4. Calculați: $2^3 + 2^{10} : 2^8 \cdot 2 + 2 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - 4 \cdot 2^3$.

5. Calculați: $[2^2 \cdot 2^4 + (1 + 5)^2] \cdot [14^2 : (30^2 : 15^2) : 7 - 18^3 : 9^3 : 4] - 2^2 \cdot 10^2$.

6. Calculați: $3 \cdot \{2 \cdot 3^2 + 30^2 : 6^2 + 2 \cdot [2^4 \cdot 3 - (2^{16} \cdot 3^{16})^2 : (2^{15})^2 : 3^{30} + 3 \cdot 5^2]\}$.

7. Calculați: $2 \cdot \{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 + 75^3 : 25^3 + 17 \cdot [5^4 : 5^3 + 2^{100} \cdot (8 + 2^3) - (2^8)^{13}]\}$.

8. Se consideră numărul $A = 13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13^3 + ... + 12 \cdot 13^{2003}$. Arătați că $A = 13^{2004}$;

9. Calculați $a^2 + 2ab - 2ac + d^2$, știind că $a = 3, b - c = 5$ și

$d = \left[2^{18} \cdot (2^3 \cdot 3)^{202}\right] : (8 \cdot 9 \cdot 2^{309} \cdot 3^{99})^2 + 3(1 + 2 + 3 + ... + 2005)^0$.

10. Învățați să folosiți calculul x^y cu aplicația CALCULATOR pe telefonul mobil sau pe calculator.

CURIOZITĂȚI MATEMATICE

Priviți tabelul:

a	a^2
1	1
11	121
111	12321
1111	1234321
11111	123454321

Completați și tabelul următor:

a	a^2
1	
11	
101	
1001	
10001	

Pătratul unui număr natural

➢ Produsul $5 \cdot 5$ se poate scrie 5^2 și se citește „cinci la puterea a doua” sau „pătratul numărului 5”.

➢ Numărul 36 este pătratul numărului 6. Scriem $36 = 6^2$.

➢ Numărul 3 nu este pătratul niciunui număr natural.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și ***pătratul*** acelui număr natural.

Oricare număr natural care poate fi scris ca puterea a doua a altui număr natural se numește ***pătrat perfect***. Numărul n este pătrat perfect dacă se poate scrie $n = a^2$.

Să exersăm:

o	o	o
o	o	o
o	o	o

➢ Numărul 9 poate fi scris și ca 3^2, deci este pătrat perfect. Putem considera că 9 este format din 9 unități; reprezentăm fiecare unitate sub formă de cerculeț și așezăm cerculețele sub forma unui pătrat (de aici a apărut ideea de *pătrat perfect*).

➢ Să calculăm pătratele numerelor: 11, 25, 16. Avem: $11^2 = 121$, $25^2 = 625$, $16^2 = 256$.

➢ Copiați tabelul pe caiete și completați-l cu pătratul cifrelor:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4							

➢ Numărul 10^{12} este pătrat perfect? Putem scrie $10^{12} = (10^6)^2$, deci este pătrat perfect.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Putem arăta că un număr este pătrat perfect dacă îl scriem sub forma a^2. Dacă un număr natural este scris ca o putere pară a altui număr natural, el este pătrat perfect: $n = a^{2k} = (a^k)^2$.

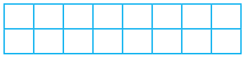
Din tabelul completat mai sus observăm că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Deducem astfel o metodă de a demonstra că un număr nu este pătrat perfect: arătăm că ultima cifră a lui este 2, 3, 7 sau 8. Dacă însă un număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, nu este obligatoriu pătrat perfect (6 nu este pătrat perfect).

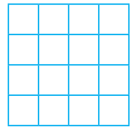
Un număr natural nu este pătrat perfect dacă se poate încadra între două pătrate perfecte consecutive: $a^2 < n < (a + 1)^2$.

Să exersăm:

➢ Ami și Mara trebuie să răspundă la întrebarea: numărul 4^3 este pătrat perfect? Ami răspunde rapid NU, iar Mara, după câteva calcule, răspunde DA. Cine are dreptate?

Rezolvare: Ami spune că 4^3 are exponent impar, deci nu este pătrat perfect. Mara transformă numărul $4^3 = 64 = 8^2$ și obține un pătrat perfect.

➢ Fie dreptunghiul: . Putem rearanja pătrățelele din dreptunghi astfel încât să obținem un pătrat perfect?



Rezolvare: Sunt 8 · 2 = 16 pătrățele, deci le putem aranja câte 4 pe rând.

➢ Să scriem numărul 25 ca sumă de două pătrate perfecte, apoi ca sumă de trei pătrate perfecte: $25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$; $25 = 4^2 + 3^2 + 0^2$.

➢ Numărul 135 este pătrat perfect? Nu. Putem încadra numărul 135 între două pătrate perfecte consecutive: $11^2 = 121 < 135 < 144 = 12^2$.

➢ Numărul $3^{74} + 2 \cdot 3^{75} + 3^{76}$ este pătrat perfect? Da, $3^{74} + 2 \cdot 3^{75} + 3^{76} = 3^{74}(1 + 2 \cdot 3 + 3^2) = 3^{74} \cdot 16 = (3^{37})^2 \cdot 4^2 = (3^{37} \cdot 4)^2$.

➢ Arătați că numărul A = $5 \cdot 2^{145} + 3$ nu poate fi pătrat perfect .

Rezolvare: 2^{145} este număr par, înmulțit cu 5 are ultima cifră 0 și adunat cu 3 are ultima cifră 3; așadar A are ultima cifră 3, deci nu este pătrat perfect.

PROBLEME PROPUSE

1. Explicați de ce numărul 49 este pătrat perfect.

2. Scrieți pătratele numerelor naturale cuprinse între 10 și 20.

3. Ce număr natural la pătrat este egal cu 144? Dar 361?

4. De ce numărul 56 nu este pătrat perfect?

5. În șirul de numere 81, 100, 136, 144, 225 unul singur nu este pătrat perfect. Care?

6. Găsiți un pătrat perfect de forma $\overline{22x}$.

7. Aflați toate pătratele perfecte de forma $\overline{a6}$.

8. Calculați 25^2 și 26^2, iar apoi arătați că numărul 639 nu este pătrat perfect.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Arătați că $n = 1 + 3 + ... + (2n + 1)$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

2. Arătați că $10 \cdot 2^{6n+2} + 3 \cdot 2^{6n+3}$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n.

3. Arătați că numărul $3^{2n+2} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n.

Compararea puterilor

Care număr este mai mare: a) 5^3 sau 5^4; b) 2^4 sau 3^4; c) 8^3 sau 2^7; d) 4^3 sau 27^2?

Rezolvare: a) Calculăm: $5^3=125$, $5^4=625$; $625>125$, deci $5^4>5^3$. Observăm că, dacă bazele sunt egale, este mai mare numărul cu exponentul mai mare; b) $2^4=16$, iar $3^4=81$; avem $3^4>2^4$. Dacă numerele au același exponent, este mai mare numărul care are baza mai mare; c) numerele nu au nici aceeași bază și nici același exponent. Vom transforma primul număr: $8^3=(2^3)^3=2^{3\cdot 3}=2^9$. Am obținut două numere cu aceeași bază, deci $8^3>2^7$; d) Transformăm cele două numere și încercăm să obținem aceeași bază sau același exponent: $4^3=(2^2)^3=2^6$ și $27^2=(3^3)^2=3^6$. Numărul mai mare este cel cu baza mai mare, $27^2>4^3$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Distingem trei situații:

1. *Compararea puterilor care au aceeași bază*

Dintre două puteri care au aceeași bază este mai mare cea care are exponentul mai mare.

2. *Compararea puterilor care au același exponent*

Dintre două puteri care au același exponent este mai mare puterea care are baza mai mare.

3. *Compararea puterilor care nu au nici aceeași bază, nici același exponent.*

Dacă puterile pe care trebuie să le comparăm nu au nici aceeași bază și nici același exponent, vom încerca prin „artificii de calcul" să facem aceeași bază sau, dacă nu se poate, același exponent.

Să exersăm:

➢ $13^{56}>13^{49}$ pentru că exponentul primei puteri este mai mare decât exponentul celei de-a doua.

➢ Dintre 101^{23} și 110^{23}, mai mare este 110^{23}.

➢ Copiați tabelele pe caiete și completați-le, comparând numerele, după model:

2^{24}	<	2^{32}
5^{75}		5^{57}
11^{11}		11^{22}
3^{17}		3^{21}
6^{42}		6^{24}
8^{55}		8^{66}
15^{15}		16^{16}

2^{24}	<	3^{24}
5^{75}		7^{75}
11^{11}		21^{11}
4^{92}		5^{92}
7^{31}		6^{31}
21^{21}		12^{21}
45^{70}		54^{70}

$8^{24}=(2^3)^{24}=2^{72}$	<	$9^{36}=(3^2)^{36}=3^{72}$
2^{51}		8^{17}
25^{400}		36^{200}
1^{2017}		0^{1908}
27^6		4^9
625^4		125^7
8^{10}		5^{15}

➤ Să comparăm 2^{24} cu 8^7; observăm că 2 și 8 sunt puteri ale lui 2, deci le putem scrie ca puteri cu baza 2: $8^7=\left(2^3\right)^7=2^{21}$, deci $2^{24}>8^7$.

Să comparăm 3^{24} și 2^{36}; cum nu putem obține aceeași bază, vom descompune exponenții în produs astfel încât unul dintre factori să fie comun: $3^{24}=3^{2\cdot 12}=\left(3^2\right)^{12}=9^{12}$, $2^{36}=2^{3\cdot 12}=\left(2^3\right)^{12}=8^{12}$, acum putând fi comparate.

➤ Ordonați crescător numerele: a) 9^{12}, 3^{19}, 27^8; b) 5^{22}, 2^{55}, 3^{33}.

Rezolvare: a) Cele trei numere nu au nici aceeași bază și nici același exponent, dar observăm că bazele sunt puteri ale lui 3; $9^{12}=(3^2)^{12}=3^{24}$; $27^8=(3^3)^8=3^{24}$. Cum $3^{19}<3^{24}=3^{24}$, obținem $3^{19}<9^{12}=27^8$.

b) Cei trei exponenți se împart exact la 11: $5^{22}=5^{2\cdot 11}=(5^2)^{11}=25^{11}$; $2^{55}=2^{5\cdot 11}=(2^5)^{11}=32^{11}$; $3^{33}=3^{3\cdot 11}=(3^3)^{11}=27^{11}$; cum $25^{11}<27^{11}<32^{11}$, obținem $5^{22}<3^{33}<2^{55}$.

➤ Comparați puterile: a) $16\cdot 4^7$ cu 2^{19}; b) $3^{35}-9^{17}$ și 2^{52}.

Rezolvare: a) $16\cdot 4^7=2^4\cdot(2^2)^7=2^4\cdot 2^{14}=2^{18}<2^{19}$; b) $2^{52}=2^{51}\cdot 2=(2^3)^{17}\cdot 2=8^{17}\cdot 2$; $3^{35}-9^{17}=3^{35}-(3^2)^{17}=3^{35}-3^{34}=3^{34}(3-1)=3^{34}\cdot 2=(3^2)^{17}\cdot 2=9^{17}\cdot 2$.
Deci $3^{35}-9^{17}=9^{17}\cdot 2>8^{17}\cdot 2=2^{52}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelele pe caiete și completați-le, comparând numerele:

8^{75}		8^{67}
19^{21}		19^{22}
23^{37}		23^{21}
61^{412}		61^{424}
18^{515}		18^{506}
51^{15}		52^{25}

8^{15}		9^{15}
31^{12}		32^{12}
14^{90}		13^{90}
51^{111}		50^{111}
21^{12}		12^{12}
61^{82}		51^{82}

2^{51}		3^{34}
25^{150}		27^{100}
11^{24}		5^{36}
81^{5}		32^{4}
0^{4001}		1^{7001}
100^{62}		64^{93}

2. Ordonați crescător următoarele șiruri de numere naturale:
a) $2^5, 2^7, 2^0, 2^9, 2^4$; b) $5^{11}, 25^6, 125^5$; c) $8^{301}, 32^{119}, 64^{83}$; d) $7^2, 3^2, 17^2, 9^2, 5^2, 12^2$; e) $100^{41}, 1000^{37}, 10^{80}$; f) $36^{21}, 6^{43}, 216^{15}$; g) $2^{41}, 4^{21}, 16^{11}$; h) $25^{17}, 5^{33}, 125^{12}$; i) $243^{27}, 81^{37}, 27^{47}$.

3. Ordonați descrescător următoarele șiruri de numere naturale:
a) $2010^0, 2010^1, 3^2, 2^3, 2^4$; b) $3^5, 9^2, 27^3, 9^4$; c) $3^{404}, 2^{707}, 5^{303}$; d) $5^{36}, 2^{84}, 25^{17}$; e) $71^{31}, 4^{93}, 7^{62}$; f) $10^{38}, 5^{57}, 50^{19}$; g) $3^{40}, 4^{30}, 7^{20}$; h) $20^{40}, 40^{20}, 30^{30}$; i) $21^{106}, 4^{159}, 3^{530}$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Comparați: a) $2^{512}-2^{510}$ și 3^{341}; b) 2^{58} și $3^{39}-9^{19}$; c) $9^{21}-3^{40}$ și 2^{67}; d) $3^{33}-3^{32}-3^{30}$ și $2^{54}+2^{50}$; e) $4^{19}-2^{36}$ și 3^{28}; f) $9^3+36^4+25^5+15^3\cdot 2^3$ și $5^{10}+30^3+(6^4)^2+(3^2)^3$; g) $2^{487}-2^{486}-2^{485}$ și 6^{194}; h) $8\cdot 3^{n+2}\cdot 25^{n+1}$ și $7\cdot 5^{n+2}\cdot 15^{n+1}$; i) 4^{103} și $(5^{200}-4\cdot 5^{199}+9^{54}:3^{107}-5^{199})^{206}$; j) $3^{2n+1}-9^n$ și $2^{3n+1}-8^n$.

Baze de numerație

Scrierea numerelor naturale în baza 10

Numărul 873 se poate scrie sub forma $873 = 800 + 70 + 3 = 8 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$ și, folosind notațiile din lecțiile precedente, $873 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$. Observați legătura dintre exponentul lui 10 și poziția în numărul inițial a cifrei cu care este înmulțită puterea lui 10! Fiecare cifră este înmulțită cu o putere a lui 10 care are ca exponent numărul de cifre care sunt după ea: 8 este înmulțit cu 10^2 pentru că urmează două cifre după el, 7 este înmulțit cu 10^1 pentru că mai urmează o cifră după el, cifra unităților este, de fapt, înmulțită cu 10^0, care înseamnă 1, pentru că nu mai apare nimic după ea.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Această scriere a unui număr natural, cu ajutorul puterilor lui 10, se numește ***scrierea în baza 10***.

În general, un număr natural de două cifre, $\overline{ab}$, se scrie în baza 10 astfel: $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$. Un număr natural de patru cifre, $\overline{abcd}$, se scrie în baza 10 astfel: $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$.

Pentru scrierea numerelor naturale în baza 10 se folosesc cele 10 cifre (de la 0 la 9), adică numerele naturale mai mici decât baza.

Să exersăm:

➢ Să scriem în baza 10 numărul 70105: $70105 = 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$, adică $70105 = 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^2 + 5$

➢ Să scriem în baza 10 numărul $\overline{1ab6}$. Avem $\overline{1ab6} = 1 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 6$.

➢ Să scriem în baza 10 numărul: $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5$. Acesta este 345.

➢ Să scriem în baza 10 numărul: $7 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 6$. Acesta este 710006.

➢ Fie numărul 357486219. Indicați cifra: a) miilor; b) zecilor; c) unităților; d) milioanelor; e) sutelor de mii; f) zecilor de mii.

Rezolvare: a) 6; b) 1; c) 9; d) 7; e) 4; f) 8.

➢ Se poate spune că 11 este cifra sutelor numărului 781130?

Rezolvare: 11 nu este cifră.

Scrierea numerelor naturale în baza 2

Să scriem numerele 1, 3, 5, 7 și 9 ca sumă de puteri ale lui 2: $1 = 0 \cdot 2 + 1$; $3 = 1 \cdot 2 + 1$; $5 = 1 \cdot 2^2 + 1$; $7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$; $9 = 8 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1$. Așa cum un număr natural în baza 10 se poate scrie ca sumă de puteri ale lui 10, de ce nu am putea scrie și aceste numere altfel?

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Putem scrie un număr natural și în altă bază, de exemplu în baza 2. Comparând cu baza 10, putem spune că, pentru scrierea unui număr natural în baza 2, vom utiliza doar cele două cifre mai mici decât 2, respectiv pe 0 și pe 1.

Exemple de numere scrise în baza 2: 101; 10; 1001.

Să exersăm:

➢ Ce număr reprezintă în baza 10 numărul 1101 din baza 2? $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 13$; rezultatul obținut este un număr scris în baza 10, respectiv este numărul 13.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Atunci când lucrăm cu mai multe baze de numerație este necesar ca, în scrierea unui număr, să apară și baza în care este scris (de exemplu, 13 în baza 10 se va scrie $13_{(10)}$). Acest lucru nu este necesar atunci când lucrăm doar cu numere în baza 10.

Practic, în exercițiul de mai sus, am făcut transformarea unui număr din baza 2 în baza 10. În același mod putem transforma numerele 1, 3, 5, 7 și 9 din baza 10 în numere în baza 2: $1_{(10)} = 0 \cdot 2 + 1 = 1_{(2)}$; $3_{(10)} = 1 \cdot 2 + 1 = 11_{(2)}$;

$5_{(10)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 101_{(2)}$; $7_{(10)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 111_{(2)}$;

$9_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1001_{(2)}$.

Când vrem să transformăm un număr din baza 10 în baza 2 vom efectua împărțiri succesive la 2, iar numărul căutat va fi format din ultimul cât urmat de toate resturile obținute, luate în ordine inversă.

De exemplu, să îl transformăm pe 9 din baza 10 în baza 2: $9 : 2 = 4$ *rest* 1; $4 : 2 = 2$ *rest* 0; $2 : 2 = 1$ *rest* 0. Așadar, am obținut 1001.

Să exersăm:

➤ Transformați numerele 25 și 103 din baza 10 în baza 2.

Rezolvare: 25 : 2 = 12 rest 1; 12 : 2 = 6 rest 0; 6 : 2 = 3 rest 0; 3 : 2 = 1 rest 1. Atunci, $25_{(10)} = 11001_{(2)}$, iar $103_{(10)} = 1100111_{(2)}$.

➤ Transformați numerele 101 și 1010 din baza 2 în baza 10.

Rezolvare: $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 5$; $1010_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 10$.

➤ Scrieți toate numerele de patru cifre în baza 2 și corespondenții din baza 10.

$a_{(2)}$	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
$b_{(10)}$	8	9	10	11	12	13	14	15

PROBLEME PROPUSE:

1. Scrieți în formă desfășurată (în baza 10) numerele: 5; 42; 23; 897; 100000; 30040050; 1848; $\overline{abc}$, unde *a, b* și *c* sunt cifre, $a \neq 0$.

2. Fie numărul 1597643. Indicați cifra: a) zecilor; b) miilor; c) unităților; d) milioanelor; e) zecilor de mii; f) sutelor de mii.

3. Se poate spune că 15 este cifra miilor numărului 315012?

4. Scrieți în baza 2 numerele: 2; 13; 55.

5. Următoarele numere sunt scrise în baza 2: 11; 10101; 10111. Transformați-le în baza 10!

PROIECT

Atunci când lucrăm cu numere în baza 2 spunem că lucrăm în sistemul (de numerație) binar. Acesta este și cel mai natural mod de stocare a informației în domeniul calculatoarelor. Pentru a putea fi memorat, prelucrat și transmis tot ceea ce vedem pe ecranul monitorului unui computer sau tot ceea ce auzim – text, imagini, sunete, ... – acestea sunt mai întâi traduse în sistem binar, adică într-un șir foarte lung format din cifrele 0 și 1.

Căutați pe internet tabelul cu literele alfabetului codate în sistem binar. Folosiți-l pentru a traduce textul: 01001100 01110101 01101101 01100101 01100001 00100000 01100101 01110011 01110100 01100101 00100000 01100011 01101111 01101110 01100100 01110101 01110011 00000011 00100000 01100100 01100101 00100000 01101110 01110101 01101101 01100101 01110010 01100101 00101110 00100000 00101000 01010000 01101001 01110100 01100001 01100111 01101111 01110010 01100001 00101001

Lumea este condusă de numere. (Pitagora)

Ordinea efectuării operațiilor

SĂ NE AMINTIM!

✓ Dacă într-un exercițiu apar adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri și puteri, efectuăm mai întâi calculele cu puteri aplicând regulile învățate, apoi înmulțirile și împărțirile, iar apoi adunările și scăderile.

✓ Dacă într-un exercițiu sunt folosite paranteze rotunde, paranteze pătrate și acolade, atunci efectuăm întâi operațiile din parantezele rotunde, după care pe cele din parantezele pătrate, apoi operațiile din acolade, iar la final efectuăm restul operațiilor de la stânga la dreapta.

Să exersăm:

- $4+5\cdot3=4+15=19$;
- $3+2\cdot(5+2\cdot7)-2^3=3+2\cdot(5+14)-8=3+2\cdot19-8=3+38-8=33$.
- $\{12+2\cdot[13-2^2\cdot(9-2\cdot4)]\}\cdot5=\{12+2\cdot[13-4\cdot(9-8)]\}\cdot5=[12+2\cdot(13-4)]=$

$=(12+2\cdot9)\cdot5=(12+18)\cdot5=30\cdot5=150$;

- $1+\left[5^3\cdot5+5^{32}:5^{30}+\left(5^5\right)^4:5^{19}+555^0\right]:164=1+(5^4+5^2+5^{20}:5^{19}+1):164=$

$=1+(625+25+5+1):164=1+656:164=1+4=5$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Efectuați: a) $123+56-89$; b) $568-402-111$; c) $1365-99+157$; d) $14\cdot30:35$; e) $55:11\cdot5:25$; f) $2\cdot3\cdot4\cdot5:5$; g) $32\cdot3:8:2$; h) $3\cdot12-3\cdot12:18$.

2. Rezolvați: a) $3\cdot5+3^2$; b) $3^2\cdot5+3\cdot5^2$; c) 10^3+10^2-52; d) $7^3-7^8:7^6$; e) $5\cdot6^2+7^2\cdot8-99$; f) $15+5\cdot\left(23-4^2\cdot23^0\right)-49$; g) $2^4\cdot5-5\cdot\left(2^5-5^2\right)+25$.

3. Calculați: a) $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4\cdot3$; b) $3\cdot3^2\cdot\left[3+3^2+3^3+3^4\cdot\left(3^5-2\cdot11^2\right)\right]$; c) $2^2\cdot3^2\cdot5+\left(4\cdot8-5^2\right)\cdot3$; d) $\left(9^3:9+9\right):\left(2^3+7\right)-12^2:72$; e) $2\cdot\left[3+4\cdot(5+6\cdot7)+8^0\right]$.

4. Calculați: a) $23+7\cdot\{41+4\cdot[3+8\cdot(11\cdot12-8\cdot10)-59]\}+1002$;

b) $(29\cdot14-29\cdot4)+12\cdot11+8\cdot\{125-5\cdot[340-2\cdot(22\cdot19-23\cdot11)]\}$;

c) $1+11\cdot\{1+11\cdot[1+11\cdot(11\cdot11-120)]\}+11\cdot11$;

d) $[103-3\cdot(21\cdot11-23\cdot9)]\cdot\{3+5\cdot[2+3\cdot(5+5\cdot6)]\}$.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Copiați tabelele pe caiete, calculați și completați rezultatele:

4^3	0^{245}	11^2	1999^0	1^{2000}	2017^1	100^2	5^3	3^5	15^3	41^2	7^3

$6^3 \cdot 6^5$	$3^7 \cdot 2^7$	$(5^2)^8$	$4^{13} : 4^4$	$3^{24} : 9^2$	$3^{35} : 27^2$	$(7^2)^8 : 49^2$	$2^4 + 4^3$

2. Comparați:

117^{20}		177^{20}	108^{104}		108^{114}	36^{43}		216^{60}
207^{30}		165^{30}	18^{208}		18^{218}	2^{3+2}		$(2\cdot3)^2$
125^{43}		25^{61}	$(2^3)^2$		2^9	3^2+4^2		5^2
32^{400}		10^{600}	5^{28}		3^{42}	4^{76}		3^{95}

3. Ordonați crescător numerele: a) $2^2, 2^5, 4^2, 2^7$; b) $13^{22}, 13^8, 13^5$; c) $12^{12}, 12, 12^6$; d) $(3^9)^4, (3^{13})^3, 9^{16}$; e) $(5^5)^8, (7^2)^{20}, (3^{10})^4$; f) $16^{45}, 8^{60}, 4^{90}$.

4. Calculați diferența dintre pătratul numărului 12 și cubul numărului 4.

5. Calculați suma dintre pătratul numărului 18 și cubul numărului 5.

6. Dacă împărțim $a = 105$ la $b = 32$ ce cât și ce rest obținem?

7. Calculați: a) $1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^0 + (1+2)^2$; b) $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$; c) $2^3 + 3 \cdot 4^3 - 5^3$; d) $3 \cdot 3^6 \cdot 3^{10} \cdot 3^5$; e) $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{99} \cdot 2^{100}$; f) $4^{75} : 4^{36} : 4^{15}$; g) $5^{100} : 5^{55} \cdot 5^{12} : 5^{57}$; h) $8^{21} \cdot 4^{45} : 16^{21} : 2^6$; i) $[(7^8)^{10}]^2 : 7^{155} \cdot 49^5$; j) $(1 + 5 \cdot 5^3 \cdot 5^5) : (5^9 + 1)$; k) $(41^0 + 2^{159} : 2^{157}) : 5$; l) $2 \cdot [2^3 + 5 \cdot (5^3 - 5^{23} : 5^{21})] + 8 \cdot 11^2 + 2016^0$.

8. Calculați suma numerelor care sunt pătrate perfecte și divizori ai lui 180.

9. Arătați că numărul $a = 1 + 3 + 5 + \ldots + 29$ este pătrat perfect.

10. Arătați că numărul $2017^2 - 2017 - 2016$ este pătrat perfect.

11. Se consideră cifrele a, b, c astfel încât $a > c$.

a) Determinați cel mai mare număr de forma $\overline{abc} - \overline{cba}$.

b) Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $\overline{abc} - \overline{cba}$.

12. Câte cifre are numărul 19 scris în baza 2?

13. Transformați în baza 10 următoarele numere scrise în baza 2: 1011, 1101, 1110.

14. Care este cel mai mic pătrat perfect mai mare decât 620?

15. Câte numere naturale n verifică relația: $7^n < 400$?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Arătați că numărul natural $n = 200 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 199)$ este pătrat perfect.

2. De câte ori este mai mare 18^3 decât $2 \cdot 9^3$?

3. Determinați x din: $3^{x+2}:3+3^{x+3}:9+3^{x+4}:27+3^{x+5}:81=36$.

4. Calculați, folosind metoda factorului comun: a) $5^{1256}+5^{1257}+3\cdot5^{1255}$; b) $2^{102}-2^{101}-2^{100}$; c) $\left(3^{75}-3^{74}-3^{73}\right):\left(5\cdot3^{72}\right)$; d) $5^{2n+1}-4\cdot25^{n}-5^{2n}$; e) $\left(7^{100}-6\cdot7^{99}+11^{110}:121^{55}-7^{99}\right)^{100}$; f) $2^{n+2}\cdot3^{n+1}-6^{n}$.

5. Demonstrați că numărul 2011^{2011} poate fi scris ca o sumă de cinci pătrate perfecte.

6. Arătați că numărul $14\cdot15\cdot16\cdot\ldots\cdot1029+2$ nu este pătrat perfect.

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

Legenda Tablei de șah.

Demult, în Persia, trăia un șah foarte bogat. Însă toate bogățiile lui nu reușeau să-i alunge plictiseala. Într-o zi un brahman pe nume Sessa a adus la palat un joc cu piese de lemn. Șahul nu se mai dezlipea de el. De aceea i s-a spus „jocul de șah”.

— Spune-mi, ce bogății voiești pentru acest dar minunat? l-a întrebat șahul pe Sessa, dorind să-l răsplătească.

– Nu-ți cer decât atât: pentru primul pătrat al tablei de șah — un bob de grâu, pentru al doilea pătrat — două boabe, pentru al treilea pătrat — patru boabe, și așa mai departe, pentru fiecare pătrat, dublul numărului de boabe corespunzător pătratului anterior, a răspuns brahmanul.

Câte boabe de grâu trebuie să primească Sessa?

Rezolvare: Scriem numărul total de grăunțe ca pe o sumă de puteri și apoi calculăm: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 =$ $= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$, număr care se citește astfel: 18 trilioane, 446 biliarde, 744 bilioane, 73 miliarde, 709 milioane, 551 mii, 615.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Numărul 32 se scrie ca putere cu baza 2:

a) 2^3; b) 2^4; c) 2^5; d) 2^6.

2. Rezultatul calculului $(2^1+2^2+2^3-3^2):5$ este:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

3. Suma dintre cubul numărului 5 și pătratul numărului 7 este egală cu:

a) 74; b) 368; c) 174; d) 76.

4. Numărul 12^3 este mai mare decât 7^3 cu:

a) 1385; b) 1728; c) 343; d) 5^3.

5. Numărul pătratelor perfecte din șirul 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 este:

a) 3; b) 2; c) 1; d) 0.

6. Cel mai mare pătrat perfect de două cifre este:

a) 64; b) 99; c) 16; d) 81.

7. Scris în baza 2, numărul 17 este:

a) 10111; b) 10011; c) 10001; d) 10101.

8. Puterea care are baza egală cu cel mai mic număr impar de două cifre și exponentul egal cu sfertul lui 2^3 este:

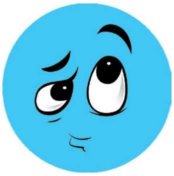
a) 144; b) 100; c) 169; d) 121.

9. Rezultatul calculului $5^3+\left(3^2\cdot 7\right)^2+2^5\cdot 5^2-1$ este:

a) 4893; b) 4894; c) 987; d) 4793.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p, 1p; 1p din oficiu.

Testul 2



1. Efectuați:

a) $2^3+5^1-3^2$; b) $7^2-125^0\cdot 1^{48}$; c) $5^2\cdot 4^2$.

2. Comparați, justificând fiecare comparație:

a) 65^{83} cu 56^{83}; b) 16^{25} cu 8^{33}; c) 4^{57} cu 3^{76}.

3. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) 17^{28}; b) 25^{19}; c) $1+3+5+\ldots+55$.

4. Efectuați:

a) $7^3\cdot 7^5:7^2$; b) $(5^4)^6:(5^7)^3$; c) $\left(3^3\right)^2\cdot 3^{5^2}:\left[\left(3^2\right)^3\right]^4$.

5. Folosind metoda mersului invers, aflați numărul natural x din egalitatea:

$$2\cdot\left[15^2-3^2\cdot\left(x-5\right)\right]+2^4\cdot 3^2=324$$

Punctaj: 1,5 p; 1,5 p, 1,5 p, 3 p, 1,5 p; 1p din oficiu.

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor de matematică

SĂ NE AMINTIM!

O problemă este formată din datele care se dau – care formează *ipoteza problemei* și cerința/cerințele care formează *concluzia problemei*.

În rezolvarea unei probleme trebuie să parcurgem următoarele etape:

✓ citirea și întelegerea problemei (identificarea datelor);
✓ analiza problemei (stabilirea legăturii dintre datele problemei);
✓ redactarea rezolvării;
✓ verificarea și interpretarea rezultatului.

Metoda reducerii la unitate

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Metoda reducerii la unitate constă în *compararea mărimilor date într-o problemă cu o aceeași mărime, luată ca unitate.* Este o metodă foarte accesibilă, putând fi folosită într-o gamă variată de probleme. Singura dificultate este de a stabili felul dependenței dintre mărimile care intră în problemă.

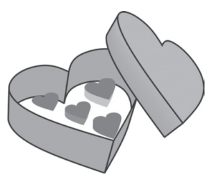
Să exersăm:

➢ În 8 cutii, de același fel, sunt 48 de bomboane. Câte bomboane sunt în 5 cutii?

Rezolvare: Știm câte bomboane sunt în 8 cutii și vom încerca să aflăm câte bomboane sunt într-o cutie.

8 cutii	48 de bomboane
1 cutie	48 : 8 = 6 bomboane
5 cutii	$6 \cdot 5 = 30$ bomboane

Observație: Odată cu scăderea numărului de cutii a scăzut și numărul de bomboane. Dacă numărul de cutii crește, atunci crește și numărul de bomboane.



Verificare: Dacă în 5 cutii sunt 30 de bomboane, într-o cutie sunt 30 : 5 = 6 bomboane și atunci în 8 cutii sunt $8 \cdot 6 = 48$ bomboane.

➢ Dacă 6 tractoare pot ara un teren în 2 zile, în câte zile îl vor ara 4 tractoare?

6 tractoare	2 zile
1 tractor	$6 \cdot 2 = 12$ (zile)
4 tractoare	12 : 4 = 3 (zile).

Rezolvare: Dacă 6 tractoare pot ara un teren în 2 zile, un tractor va ara terenul în mai multe zile, pentru că el trebuie să are cât 6 tractoare. Deci, 4 tractoare vor putea ara terenul în 3 zile.

Verificare: Dacă în 3 zile ară terenul 4 tractoare, 1 tractor ară terenul în mai multe zile, adică în $3 \cdot 4 = 12$ (zile). Cele 6 tractoare ară terenul în $12 : 6 = 2$ (zile).

PROBLEME PROPUSE:

1. Dacă în 6 ore un muncitor realizează 60 de piese de același fel, atunci câte piese realizează muncitorul într-o oră? Dar în 8 ore?

2. Câți lei costă 5 prăjituri, dacă pentru 2 prăjituri s-au plătit 12 lei ?

3. Marin a cules 15 kg de mere în 3 ore, iar Victor a cules 10 kg de mere în 2 ore. Câte kilograme de mere va culege fiecare copil în 5 ore, dacă ei își vor păstra fiecare ritmul de muncă ? Care dintre ei culege mai multe mere într-o oră?

4. Un bazin se umple prin 5 robinete în 15 ore. În cât timp vor umple același bazin 3 din cele 5 robinete (două robinete sunt închise)?

5. O gospodină a cumpărat 15 kg de cartofi și a plătit 30 de lei. Cât a plătit altă gospodină, dacă a cumpărat 7 kg de cartofi de aceeași calitate?

6. 15 muncitori termină o lucrare în 30 de zile. În cât timp vor termina aceeași lucrare 30 de muncitori? (Toți muncitorii îndeplinesc aceeași normă).

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Pentru a ara 18 hectare de teren arabil, 4 tractoare au lucrat 9 zile. Dacă ar trebui să are 21 de hectare și sunt disponibile 6 tractoare, cât timp le va fi necesar? (Presupunem că tractoarele îndeplinesc aceeași normă).

Rezolvare. În acest caz vom reduce, pe rând, la unitate numărul de tractoare și suprafața de teren, apoi se revine, în sens invers, la datele cerute.

18 ha	4 tractoare	9 zile
18 ha	1 tractor	$9 \cdot 4 = 36$ (zile)
1 ha	1 tractor	$36 : 18 = 2$ (zile)
21 ha	1 tractor	$2 \cdot 21 = 42$ (zile)
21 ha	6 tractoare	$42 : 6 = 7$ (zile)

2. Un fermier are 5 vaci care timp de 30 de zile consumă 180 kg de furaj. Cât furaj consumă 12 vaci în 18 zile, dacă rația (porția) unei vaci pe zi rămâne aceeași?

3. 30 m de stofă neagră și 40 m de stofă verde au costat 9750 lei. 1 m de stofă neagră este de 3 ori mai scump decât 1 m de stofă verde. Cât costă un metru din fiecare fel de stofă?

Indicație: Reducem 30 m stofă neagră la $3 \cdot 30 = 90$ m stofă verde. Suma de 9750 lei reprezintă costul a $90 + 40 = 130$ m de stofă verde.

4. Pentru un internat s-au cumpărat 18 dulapuri și 25 de mese. Dulapurile au costat 7380 lei. Știind că 5 mese costă cât 2 dulapuri, cât au costat toate mesele?

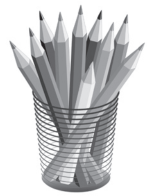
5. Compuneți și rezolvați o problemă prin metoda reducerii la unitate.

Metoda comparației

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă într-o problemă apar 3 sau mai multe mărimi, fiecare dintre ele cu câte două valori numerice date sau cu diverse relații între ele, atunci vom folosi pentru rezolvare ***metoda comparației***, prin care ***se compară primul șir de valori numerice ale mărimilor cu cel de-al doilea șir***.

Să exersăm!



➤ Dacă pentru 5 creioane și 4 pixuri plătim 13 lei, iar cu 9 lei putem cumpăra 2 pixuri și 5 creioane, cât costă un creion? Dar un pix?

Rezolvare: Enunțul problemei face referire la 3 mărimi: număr de creioane, număr de pixuri, suma plătită. Așezăm datele problemei pe două rânduri, păstrând tipul de mărime:

5 creioane .... 4 pixuri .... 13 lei
5 creioane .... 2 pixuri .... 9 lei.

Comparând cele două șiruri de date observăm că numărul creioanelor este același, diferă doar numărul de pixuri și suma plătită. Ideea rezolvării este eliminarea uneia dintre mărimi, prin scădere. Obținem astfel:

0 creioane .... 2 pixuri .... 4 lei
0 creioane .... 1 pix .... $4 : 2 = 2$ (lei).

Dacă am aflat cât costă un pix putem calcula, folosind una dintre cele două relații, cât costă un creion. Obținem prețul unui creion de 1 leu.

Verificare: 5 creioane .... 4 pixuri .... $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ (lei)
5 creioane .... 2 pixuri .... $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 9$ (lei).

➤ Dacă pentru 5 creioane și 4 pixuri plătim 13 lei, iar cu 8 lei putem cumpăra 2 pixuri și 4 creioane, cât costă un creion? Dar un pix?

Rezolvare: Așezăm datele problemei pe două rânduri și comparăm mărimile:

5 creioane .... 4 pixuri .... 13 lei
4 creioane .... 2 pixuri .... 8 lei.

Observăm că nu mai avem o valoare comună pentru una dintre mărimi, dar vom încerca să obținem acest lucru. Dublăm a doua relație și atunci:

5 creioane .... 4 pixuri .... 13 lei
8 creioane .... 4 pixuri .... 16 lei.

Am ajuns la o problemă asemănătoare cu cea precedentă. Obținem:

3 creioane .... 0 pixuri .... 3 lei
1 creion .... 0 pixuri .... $3 : 3 = 1$ (leu).

Folosind una dintre cele două relații, calculăm că un pix costă 2 lei.

Verificare: 5 creioane .... 4 pixuri .... $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ (lei)

4 creioane .... 2 pixuri .... $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$ (lei).

➢ Dacă pentru 5 creioane și 4 pixuri plătim 13 lei, iar cu 10 lei putem cumpăra 3 pixuri și 4 creioane, cât costă un creion? Dar un pix?

Rezolvare: Așezăm datele problemei pe două rânduri și comparăm mărimile:

5 creioane .... 4 pixuri .... 13 lei

4 creioane .... 3 pixuri .... 10 lei.

Valorile corespunzătoare primei mărimi sunt 5 și 4 și vom căuta o valoare care să se împartă la cele două numere: aceasta este 20, pe care o putem obține înmulțind prima relație cu 4 și a doua relație cu 5.

20 creioane .... 16 pixuri .... 52 lei

20 creioane .... 15 pixuri .... 50 lei.

Prin scăderea celor două relații obținem prețul unui pix și apoi, folosind una dintre relațiile inițiale, prețul creionului (1 leu).

Verificare: 5 creioane .... 4 pixuri .... $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ (lei)

4 creioane .... 3 pixuri .... $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$ (lei).

PROBLEME PROPUSE:

1. 17 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cântăresc 1210 kg, iar 21 de saci cu făină și 12 saci cu cartofi, 1410 kg. Câte kg are un sac cu făină? Dar unul cu cartofi?

2. 4 metri de mătase și 3 metri de stofă costă 125 de lei, iar 2 metri de mătase și 6 metri de stofă, 130 de lei. Cât costă metrul de mătase și cât costă metrul de stofă?

3. Un țăran a vândut 2 gâște și 3 rațe cu 295 de lei. Altă dată, vânzând la același preț, a primit pentru 3 gâște și 5 rațe 475 de lei. Care este prețul unei gâște? Dar al unei rațe?

4. 7 bile mari și 3 bile mici cântăresc 44 grame, iar 5 bile mari și 8 bile mici cântăresc 49 grame. Cât cântărește o bilă mare? Cât cântărește o bilă mică?

5. Suma dintre dublul unui număr și triplul unui alt număr este 370. Dacă suma dintre primul număr multiplicat de 5 ori și al doilea număr multiplicat de 7 ori este 875, aflați numerele.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Un caiet, 3 creioane și 5 reviste costă 64 de lei, iar 5 caiete, 4 creioane și 3 reviste costă 56 de lei. Cât costă, la un loc, 1 creion și 2 reviste? Dar un caiet, un creion și o revistă? Cât costă fiecare obiect, dacă prețul unei reviste întrece cu 1 leu prețul unui creion multiplicat de 5 ori?

2. Compuneți și rezolvați o problemă care să se rezolve prin metoda comparației.

Metoda figurativă

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Metoda figurativă este o metodă matematică de rezolvare a problemelor și *constă în reprezentarea prin desen a mărimilor dintr-o problemă* respectând relațiile dintre acestea.

Problemele care se rezolvă prin metoda figurativă se pot împărți astfel:

Probleme în care intervin date sau mărimi ce se pot reprezenta prin segmente

• Determinarea a două numere când cunoaștem suma și diferența lor

Să exersăm:

➢ Anca și Mara au împreună 256 de lei. Dacă Mara are cu 98 de lei mai mult decât Anca, câți lei are fiecare dintre ele?

Rezolvare:

Reprezentăm suma Ancăi: |———| și suma Marei: |———||– 98 –|

Împreună, cele două fete au 256 de lei. Dacă scădem din total suma de bani pe care o are Mara în plus, 256 – 98 = 158 (lei), fetele vor avea sume egale și anume 158 : 2 = 79 (lei). Ca urmare, suma Ancăi este de 79 de lei, iar suma Marei o obținem adunând 98 de lei la suma Ancăi: 79 + 98 = 177 (lei).

Verificare: 79 + 177 = 256 (lei).

➢ Dinu și Ionel au împreună 180 de lei. Ce sumă are fiecare dintre cei doi, știind că, dacă Dinu i-ar da lui Ionel 25 de lei, ei ar avea sume egale?

Rezolvare:

Reprezentăm suma lui Dinu: |———|—————| și suma lui Ionel: |———|

Dacă Dinu i-ar da lui Ionel 25 de lei, cei doi ar avea sume egale:

|———|—25–|—25–|

|———|

aceasta însemnând că Dinu are cu 50 de lei mai mult decât Ionel. Dacă scădem din total suma de bani pe care o are Dinu în plus, 180 – 50 = 130 (lei), cei doi ar avea sume egale și anume 130 : 2 = 65 (lei). Ca urmare, suma lui Ionel este de 65 de lei, iar suma lui Dinu o obținem adunând 50 de lei la suma lui Ionel: 65 + 50 = 115 (lei).

Verificare: Împreună, cele două persoane au 115 + 65 = 180 (lei).

• Determinarea a două numere când cunoaștem suma și câtul lor

Să exersăm:

➢ Perimetrul unui dreptunghi este de 500 m. Dacă lungimea dreptunghiului este de patru ori mai mare decât lățimea lui, care sunt dimensiunile dreptunghiului?

Rezolvare: Știind că perimetrul unui dreptunghi este $P = L + l + L + l$, atunci $L + l = 500 : 2 = 250$ (m). Reprezentăm cele două dimensiuni prin segmente:

• lățimea dreptunghiului: |———|

• lungimea dreptunghiului: |———||———||———||———|

Suma dintre lungimea și lățimea dreptunghiului reprezintă 5 segmente egale, un astfel de segment având lungimea de 250 : 5 = 50 (m). Așadar, lățimea dreptunghiului este de 50 m, iar lungimea este egală cu 250 – 50 = 200 (m)

Verificare: P = 200 + 50 + 200 + 50 = 500 (m).

➢ În livadă sunt 90 de pomi fructiferi. Pruni sunt de două ori mai mulți decât caiși, iar meri sunt de trei ori mai mulți decât pruni. Câți meri, caiși și pruni sunt în livadă?

Rezolvare: Reprezentăm astfel:

• numărul caișilor: |———|

• numărul prunilor: |———||———|

• numărul merilor: |———||———||———||———||———||———|

Numărul pomilor din livadă este reprezentat prin 9 segmente, iar suma segmentelor este 90 (pomi). Un astfel de segment reprezintă 90 : 9 = 10 (pomi). Așadar, în livadă sunt 10 caiși, 20 de pruni și 60 de meri.

Verificare: 10 + 20 + 60 = 90 (pomi).

• Determinarea a două numere când cunoaștem diferența și câtul lor

Să exersăm:

➢ Într-un coș sunt mere și de trei ori mai multe pere. Știind că în coș sunt cu 10 mai multe pere decât mere, câte fructe de fiecare fel sunt în coș?

Rezolvare: Vom reprezenta astfel:

• mere: |———| • pere: |———||———||———|

Diferența dintre numărul de pere și cel de mere este 10 (2 segmente), deci un segment reprezintă 10 : 2 = 5 (fructe). Așadar, sunt 5 mere și 15 pere.

Verificare: 15 – 5 = 10 (diferența dintre pere și mere); 15 : 5 = 3 (de trei ori mai multe pere decât mere).

➢ Vlad și Marius aveau de rezolvat același număr de probleme. Când lui Vlad i-au mai rămas de rezolvat 3 probleme, numărul problemelor rezolvate de el era de 3 ori mai mare decât numărul de probleme rezolvate ale lui Marius, care mai avea de rezolvat 15 probleme. Câte probleme a avut de rezolvat fiecare băiat?

Rezolvare: Reprezentăm astfel:

• numărul problemelor pe care le avea de rezolvat Marius: |———| +15

• numărul problemelor pe care le avea de rezolvat Vlad: |———|———|———| +3

Cele 15 probleme pe care le mai are de rezolvat Marius sunt egale cu două segmente și încă 3 probleme de la Vlad. Ca urmare, un segment reprezintă $(15 - 3) : 2 = 6$ (probleme), deci fiecare băiat a avut de rezolvat $15 + 6 = 21$ (probleme).

Verificare: $21 - 6 = 15$ (probleme pe care le mai are de rezolvat Marius); $6 \cdot 3 = 18$ (probleme pe care le-a rezolvat Vlad și mai are de rezolvat 3).

Probleme în care intervin date sau mărimi care pot fi numărate și între care se pot stabili corespondențe după anumite criterii

Să exersăm:

➢ Dacă elevii unei clase se așează câte 2 în bancă, rămân 4 elevi fără bancă, iar dacă se așează câte 3, rămân două bănci fără elevi. Câți elevi și câte bănci sunt?

Rezolvare: Realizăm schema notând banca cu un dreptunghi și elevul cu @. Vom avea la început următoarea reprezentare:

@@	@@	....	@@	@@	@@

+ 4 elevi

Reprezentarea pentru situația în care în fiecare bancă stau câte 3 elevi se obține astfel: în fiecare bancă cu doi elevi vom mai așeza un elev; întâi așezăm cei 4 elevi rămași fără bancă în prima situație și ocupăm 4 bănci; apoi eliberăm 2 banci, care vor rămâne goale, și așezăm cei 4 elevi în alte 4 bănci:

@@@	@@@	....	@@@		

Am obținut 8 bănci cu câte 3 elevi, deci $8 \cdot 3 = 24$ (elevi) și $8 + 2 = 10$ (bănci).

Verificare: Dacă așezăm câte 2 elevi în cele 10 bănci rămân 4 elevi fără bancă. Dacă așezăm câte 3 elevi, ocupăm doar 8 bănci și rămân 2 bănci libere.

➢ Într-o livadă sunt de 4 ori mai mulți meri decât peri. Dacă se taie 4 meri și se mai plantează 2 peri, numărul merilor va fi de trei ori mai mare decât numărul perilor. Câți meri și câți peri sunt în livadă?

Rezolvare: Cum în livadă sunt de 4 ori mai mulți meri decât peri, vom grupa câte 4 meri și 1 păr. Vom avea la început următoarea situație:

MMMMP	MMMMP	....	MMMMP	MMMMP	MMMMP	MMMMP

Dacă se taie 4 meri și se mai plantează 2 peri, avem următoarea reprezentare:

MMMMP	MMMMP	....	MMMMP	MMMMP	MMMMP	P	P	P

În acest caz, numărul merilor este de trei ori mai mare decât numărul perilor:

MMMP	MMMP	....	MMMP	MMMP	MMMP	MMMP	MMMP	MMMP

În ultimele trei căsuțe, care erau doar cu peri, am adăugat câte 3 meri (9 meri în total) pe care i-am luat din 9 căsuțe. Avem 9 căsuțe (din care am luat câte un măr) și încă 3 căsuțe (pe care le-am completat), în total 12 căsuțe cu câte 3 meri și 1 păr. Așadar, în total sunt 12 · 3 = 36 (meri) și 12 · 1 = 12 (peri), iar inițial am avut în livadă 36 + 4 = 40 (meri) și 12 – 2 = 10 (peri).

Verificare: 40 de meri sunt de 4 ori mai mult decât 10 peri. Dacă se taie 4 meri (rămân 36 meri) și se mai plantează 2 peri (devin 12 peri), numărul merilor va fi de 3 ori mai mare decât numărul perilor.

PROBLEME PROPUSE:

1. Un număr este cu 3 mai mare decât altul. Aflați numerele, știind că suma lor este 25.

2. Un număr este cu 10 mai mare decât altul. Aflați cele două numere, dacă diferența lor este 45.

3. Mama și Irina au împreună 30 de ani. Știind ca mama are de 5 ori vârsta Irinei, aflați câți ani are fiecare.

4. Andrei și Ionel au împreună 80 de timbre. Andrei are cu 20 mai multe decât Ionel. Câte timbre are fiecare băiat?

5. Dacă știm că 3 numere consecutive au suma 402, care sunt acestea?

6. În curte sunt găini și rațe. Găinile sunt de trei ori mai multe decât rațele. Dacă scazi din numărul găinilor numărul rațelor obții 20. Câte găini și câte rațe sunt?

7. Suma a două numere este 35, iar câtul lor este 6. Aflați numerele.

8. În depozit sunt 138 de cutii: cutii cu unt, cutii cu lapte de trei ori mai multe, iar cutii cu iaurt cu 2 mai puține decât cele cu lapte. Câte cutii de fiecare fel sunt?

9. O ciocolată costă cât șase pâini, iar o ciocolată și 4 pâini costă 10 lei. Cât costă o pâine? Dar o ciocolată?

10. Dacă în fiecare bancă se așează câte 5 persoane, atunci 10 persoane nu au locuri, iar dacă se așează câte 6 persoane în fiecare bancă, atunci rămân 5 bănci libere. Câte bănci și câte persoane sunt?

11. Într-o magazie se află o cantitate de grâu și un număr de saci. Dacă în fiecare sac s-ar pune câte 75 kg de grâu, ar rămâne 450 kg de grâu. Dacă în fiecare sac s-ar pune câte 80 kg de grâu, ar mai rămâne 10 saci. Ce cantitate de grâu și câți saci sunt?

12. Elevii unei clase au de plantat pomi. Dacă fiecare elev ar planta câte un pom, atunci s-ar planta cu 25 de pomi mai puțin decât era planificat, iar dacă fiecare elev ar planta câte 2 pomi, atunci 4 elevi nu ar avea pomi de plantat. Câți elevi sunt în clasă și câți pomi au de plantat?

13. Compuneți și rezolvați câte o problemă de fiecare tip care să se rezolve prin metoda figurativă.

Metoda mersului invers

SĂ ÎNVĂȚĂM!

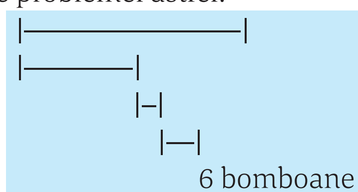
Metoda mersului invers se aplică problemelor în care datele depind, succesiv, unele de altele. ***Enunțul problemei trebuie urmărit de la sfârșit către început.*** De cele mai multe ori vom folosi reprezentarea problemei prin segmente, urmărind enunțul, dar rezolvarea o vom face pornind de la sfârșit. ***În timpul rezolvării efectuăm operația inversă celei care apare în enunț,*** așadar nu numai mersul este invers, ci și operațiile pe care le facem sunt inverse celor enunțate. Proba se face aplicând numărului determinat operațiile din enunțul problemei. Vom exemplifica în cele ce urmează.

Să exersăm:

➤ Ioana a primit de ziua ei o cutie cu bomboane. În prima zi a mâncat, împreună cu prietenele ei, jumătate din bomboane, a doua zi a mâncat un sfert din bomboanele rămase, iar a treia zi, jumătate din bomboanele rămase în cutie. Știind că, în final, au rămas 6 bomboane, câte bomboane erau inițial în cutie?

Rezolvare: Am putea reprezenta schematic datele problemei astfel:

- numărul inițial de bomboane:
- numărul de bomboane mâncate în prima zi:
- numărul de bomboane mâncate a doua zi:
- numărul de bomboane mâncate în a treia zi:
- număr de bomboane rămase în final:



Cele 6 bomboanele reprezintă jumătate din bomboanele ce se aflau în cutie la începutul celei de-a treia zile, deci la începutul celei de-a treia zile Ioana avea 12 bomboane. În a doua zi Ioana a mâncat un sfert din bomboanele rămase după prima zi și au rămas 12 bomboane, adică trei sferturi din numărul de bomboane; deducem că, la începutul celei de-a doua zile, Ioana avea 16 bomboane. În prima zi Ioana a mâncat jumătate din bomboanele din cutie și au rămas 16 bomboane, ceea ce reprezintă cealaltă jumătate, așadar cutia conținea inițial 32 de bomboane.

Verificare: Cutia are 32 de bomboane din care Ioana mănâncă în prima zi jumătate, deci 16 bomboane, în a doua zi un sfert din cele 16 bomboane rămase, adică 4 bomboane, iar în a treia zi jumătate din cele 12 bomboane rămase, adica 6 bomboane și, în final, rămân 6 bomboane.

➤ M-am gândit la un număr, l-am adunat cu 28, suma am înmulțit-o cu 10, din rezultat am scăzut 24 și apoi am împărțit la 12. Rezultatul obținut este 23. Aflați numărul.

Rezolvare: Ultima operație efectuată este împărțirea la 12. Numărul pe care îl împart la 12 și obțin 23 este $12 \cdot 23 = 276$. Numărul din care scad 24 pentru a obține 276 este 276 + 24 = 300. Numărul pe care îl înmulțesc cu 10 pentru a obține 300 este 300 : 10 = 30. Numărul pe care îl adun cu 28 pentru a obține 30 este 30 – 28 = 2. Numărul căutat este 2.

Verificare: Pornind de la numărul 2 și efectuând operațiile obținem 23.

PROBLEME PROPUSE:

1. Mă gândesc la un număr pe care îl adun cu 27; rezultatul îl împart la 4 și-l adun apoi cu 6. Suma astfel obținută o împart la 7 și din rezultat scad 7. Dacă obțin 1, la ce număr m-am gândit?

2. Pe o banchiză plutesc mai mulți pinguini. Părăsesc banchiza prima dată pinguinii imperiali, care reprezintă o treime din toți pinguinii. Îi urmează alți 8 pinguini. Apoi pleacă jumătate din cei rămași, apoi încă 5, două treimi din cei rămași și încă 2 și rămân pe banchiză 7 pinguini. Câți pinguini imperiali au fost initial pe banchiză?

3. O persoană are o sumă de bani pe care mai întâi o dublează, iar apoi cheltuiește din ea 155 $. Dublează apoi suma rămasă și mai cheltuiește 200 $. După ce dublează noul rest și cheltuiește încă 250 $, constată că i-au mai rămas 50 $. Care este suma inițială pe care a avut-o această persoană?

4. Marfa dintr-un magazin se vinde astfel: prima dată o treime din cantitate și încă 80 kg, a doua oară două treimi din rest mai puțin 60 kg și a treia oară două treimi din rest și încă 60 kg. Ce cantitate a fost inițial și cât s-a vândut zilnic, dacă în magazin nu a mai rămas marfă?

5. Un biciclist parcurge un drum în trei etape: în prima etapă parcurge o pătrime din drum și încă 5 km; în a doua etapă parcurge o șeptime din restul drumului și încă 10 km, iar în etapa a treia parcurge patru cincimi din noul rest și încă 10 km. Aflați lungimea drumului.

6. Albă ca Zăpada le-a pregătit celor 7 pitici un număr de prăjituri. Pe măsură ce se trezește, fiecare pitic mănâncă jumătate din numărul prăjturilor găsite plus una. Piticul cel mic, fiind cel mai somnoros, s-a trezit ultimul și a mai găsit o singură prăjitură. Știind că piticii s-au trezit la ore diferite, aflați câte prăjituri a pregătit Albă ca Zăpada.

7. Dintr-o sumă Ionel a cheltuit în prima zi a treia parte, a doua zi 40000 de lei din suma rămasă, iar în a treia zi jumătate din noul rest, după care a constatat că mai are 30000 de lei. Ce sumă a avut inițial ?

8. Compuneți și rezolvați o problemă care să se rezolve prin metoda mersului invers.

Metoda falsei ipoteze

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Metoda falsei ipoteze constă în a *presupune că ipoteza problemei nu este cea corectă.* Pornind de la această idee, ne vom folosi de abordarea care decurge pentru a ajunge rapid la o rezolvare a problemei.

Să exersăm:

➤ Dacă 18 caiete de 50 și respectiv 80 de file au împreună 1050 de file, câte caiete sunt de fiecare fel?

Rezolvare: Presupunem că toate caietele sunt de 50 de file, adică vor fi, în total, 18 · 50 = 900 (file). Însă problema zice că sunt 1050 file, deci diferența 1050 – 900 = 150 (file) provine din faptul că sunt și caiete de 80 de file, adică caiete care au cu 30 de file mai mult. Dacă 150 de file apar din diferența de 30 de file în plus la unele caiete, putem spune că sunt 150 : 30 = = 5 caiete cu mai multe file, adică cu 80 de file. Așadar sunt: 5 caiete de 80 de file și 18 – 5 = 13 caiete de 50 de file.

Verificare: 5 · 80 + 13 · 50 = 400 + 650 = 1050 (file); 5 + 13 = 18 (caiete).

Observație: Numerele fiind mici, putem face înlocuiri succesive: un caiet de 50 de file se înlocuiește cu un caiet de 80 de file (numărul caietelor rămâne constant) și diferența scade cu 30 de file. Repetăm înlocuirea până când diferența devine 0 și obținem 5 caiete de 80 de file. Problema se poate rezolva și prin încercări succesive până „nimerim" soluția. Nu vom aborda însă astfel de metode de rezolvare empirice, „băbești".

➤ În curtea unui țăran sunt struți și oi. Numărul capetelor este 30, iar numărul picioarelor este 80. Câte oi și câți struți sunt în curte?

Rezolvare: Folosind metoda falsei ipoteze, vom presupune ca în curte sunt doar oi, așa că noua ipoteză va fi: „În curte sunt 30 de oi", pentru că există 30 de capete. Dacă sunt 30 de capete, vor fi 30 · 4 = 120 (picioare). În enunțul problemei se specifică însă 80 de picioare, iar pentru a „scăpa" de diferența (40) dintre 120 și 80 avem nevoie și de struți, deci ipoteza că în curte ar fi doar oi este falsă. Observăm că, dacă înlocuim o oaie cu un struț numărul total de picioare se micșorează cu 2, deci vom înlocui oi cu struți până cînd numărul de picioare va ajunge la 80.

O metodă mai rapidă decât înlocuirea „bucată cu bucată" a oilor cu struți este aceea de a împărți diferența dintre 120 și 80 la numărul de picioare cu care scade numărul total la fiecare înlocuire. Astfel, 40 : 2 = 20 (struți). Deoarece în curte sunt 30 de capete, dintre care 20 de struți, putem afla numărul de oi prin diferență: 30 – 20 = 10 (oi), așadar în ogradă sunt 20 de struți și 10 oi.

Verificare: 20 · 2 + 10 · 4 = 40 + 40 = 80 (picioare); 20 + 10 = 30 (capete).

➤ Suma a 10 numere naturale nenule este 54. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

Rezolvare: Presupunem că toate cele zece numere sunt diferite. Mai mult, vom presupune că ele sunt cele mai mici zece numere naturale nenule consecutive, adică 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Suma acestor numere este: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + + 7 + 8 + 9 + 10 = 55. Cum suma celor zece numere este 54, unul din numerele de la 2 la 10 trebuie să fie mai mic cu o unitate. Dacă numărul 2 este mai mic cu o unitate, atunci vom avea două numere egale cu 1. Dacă numărul 3 este mai mic cu o unitate, atunci vom avea două numere egale cu 2. Același lucru s-ar întâmpla cu celelalte numere și de fiecare dată se obțin două numere egale. În concluzie, pentru a obține suma numerelor egală cu 54, trebuie ca două numere să fie egale.

➤ Fie numerele: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 10. Putem aranja aceste numere pe un cerc astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie impară? Justificați răspunsul.

Rezolvare: Suma numerelor este 55, deci impară. Fiecare număr este însumat de trei ori, deci suma tuturor tripletelor este 3 · 55, impară. Dar avem 10 triplete, toate impare, ceea ce dă o sumă pară. Absurd. Așadar nu putem aranja toate numerele de la 1 la 10 pe un cerc astfel încât suma a 3 numere alăturate să fie impară.

➤ Într-o cutie sunt 6 șosete albe și 10 șosete roșii. Care este cel mai mic număr de șosete pe care trebuie să îl extragem din cutie, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am scos o pereche de șosete roșii?

Rezolvare: De această dată, falsa ipoteză înseamnă să ne gândim la cea mai rea situație care se poate întâmpla: să scoatem mai întâi din cutie cele 6 șosete albe, fără să nimerim vreuna roșie. Cum în cutie au rămas numai șosete roșii, la următoarele 2 extrageri vom scoate cele 2 șosete roșii. În concluzie, numărul minim de extrageri, pentru a fi siguri că am scos o pereche de șosete roșii, este 8.

PROBLEME PROPUSE:

1. Un test de concurs conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 4 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 130 de puncte?

2. La o cabană, 100 de turiști ocupă 32 de camere, unele cu 2 paturi, altele cu 5 paturi. Câte camere de fiecare fel s-au ocupat?

3. Într-un bloc sunt, în total, 42 de apartamente, cu 2 camere și cu 4 camere. Știind că blocul are 130 de camere, câte apartamente au 2 camere și câte au 4 camere?

4. Într-o cutie avem 10 bile albe și 11 bile negre. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl extragem din cutie, făra a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă?

5. Compuneți și rezolvați o problemă la care să se aplice metoda falsei ipoteze.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Un tren parcurge distanța dintre două orașe în 10 ore cu o viteză medie de 80 km/h. În cât timp va parcurge trenul aceeași distanță, dacă viteza lui se va mări cu 20 km/h ?

2. Zece muncitori termină o lucrare în 6 zile. Dacă după 3 zile de lucru pleacă 4 muncitori, câte zile sunt necesare pentru finalizarea lucrării?

3. Pentru munca depusă, 4 muncitori au primit împreună 1330 de lei. Ce sumă revine fiecăruia, dacă primul a lucrat 5 zile, al doilea 8 zile, al treilea 13 zile, iar al patrulea 12 zile? (Fiecare zi de lucru s-a plătit la fel.)

4. Dacă 5 găini fac 15 ouă în 6 zile, câte ouă fac 8 găini în 10 zile?

5. 10 găini și 5 gâște consumă într-o săptămână 40 kg de grăunțe. Dacă o gâscă consumă cât două găini, câte kg de grăunțe consumă o găină și câte o gâscă?

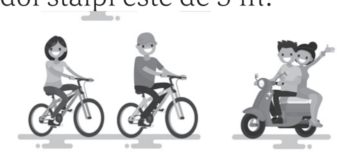
6. Dacă 4 cărți și 5 caiete costă 70 de lei, iar 5 cărți și 6 caiete 87 de lei, cât costă o carte și cât costă un caiet?

7. Dacă 7 cărți și 5 caiete costă 85 de lei, iar 5 cărți și 6 caiete 68 de lei, cât costă 6 cărți și 7 caiete de același fel?

8. 4 kg de mere și 2 kg de căpșuni costă 24 lei; 3 kg de mere și 4 kg de căpșuni costă 38 lei. Cât costă 5 kg de mere și 1 kg de căpșuni?

9. 3 m de stofă, 1 m de dantelă și 2 m de voal costă 340 de lei. Cât costă 1 m de stofă, 1 m de dantelă și 1 m de voal, dacă 1 m de dantelă este de 3 ori mai scump decât 1 m de stofă, iar 1 m de voal este de 2 ori mai scump decât 1 m de stofă?

10. Curtea casei Anei este în formă de pătrat cu latura de 75 m, iar a lui Marius este în formă de dreptunghi, cu lungimea de două ori mai are decât lățimea. Ei au nevoie de aceeași cantitate de sârmă pentru gard. Care sunt dimensiunile curții lui Marius? De câți stâlpi este nevoie, dacă distanța dintre doi stâlpi este de 5 m?



11. Patru copii aveau, fiecare, același număr de mere. După ce fiecare a mâncat câte 9 mere, le-au rămas, laolaltă, atâtea mere câte a avut fiecare dintre ei la început. Câte mere a avut fiecare?

12. Tatăl are cu 3 ani mai puțin decât mama și fiul la un loc. Peste 6 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei și toți trei vor avea împreună 103 ani. Ce vârstă are fiecare în prezent?

13. Aflați 4 numere naturale știind că suma lor este 48, iar dacă se adună numărul 3 la primul, se scade 3 din al doilea, se împarte al treilea la 3 și se înmulțește al patrulea cu 3, se obțin numere egale.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Suma a două numere consecutive este 91. Numărul par dintre ele este:
a) 44; b) 45; c) 46; d) 48.

2. Nina are de 2 ori mai mulți bani decât Rona, adică cu 145 de lei mai mult. Nina are:
a) 290 de lei; b) 145 de lei; c) 435 de lei; d) 100 de lei.

3. 3 jocuri și 4 cărți costă 90 lei; 4 jocuri și 3 cărți costă 85 de lei. Cât costă un joc și o carte?
a) 25 de lei; b) 15 lei; c) 10 lei; d) 35 de lei.

4. Nicu a cumpărat într-o zi o cantitate de grâu, a doua zi de 4 ori mai puțin grâu decât în prima zi, iar a treia zi, cu 2 t de grâu mai mult decât în ziua a doua. În total Nicu a cumpărat 32 t de grâu. În prima zi ce cantitate a cumpărat?
a) 5 t; b) 7 t; c) 15 t; d) 20 t.

5. Dacă se împart în echipe de câte 5, rămân fără echipă completă 3 copii. Dacă fac echipe de câte 7, vor avea cu o echipă mai puțin, dar toți copiii intră în echipe. Câți copii sunt?
a) 25; b) 28; c) 30; d) 23.

Punctaj: 1p, 2p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

Testul 2

1. 1 kg de portocale și 2 kg de lămâi costă 14 lei; 5 kg de portocale și 10 kg de lămâi costă: a) 14 lei; b) 70 de lei; c) 140 de lei; d) 28 de lei.

2. Dan și Ana au împreună 55 de ani. Dacă Dan are cu 5 ani mai mult decât Ana, Ana are: a) 25 de ani; b) 5 ani; c) 30 de ani; d) 20 de ani.

3. 10 iepuri mănâncă morcovii din lădiță în 8 zile; 16 iepuri ar mânca morcovii din lădiță în: a) 8 zile; c) 7 zile; c) 5 zile; d) 10 zile.

4. Într-o zi au înflorit 60 de flori: lalele și, de trei ori mai multe, narcise. Așadar au înflorit: a) 15 lalele; b) 45 lalele; c) 60 lalele; d) 10 lalele.

5. Suma a 5 numere consecutive este 60. Cel mai mare număr este:
a) 12; b) 13; c) 10; d) 14.

Punctaj: 1p, 2p, 2p, 2p, 2p, 1p din oficiu.

Testul 3

1. Tatăl, mama și fiul au împreună 55 de ani. Mama este de 6 ori mai mare decât fiul și este cu 3 ani mai mică decât tatăl. Aflați vârsta fiecăruia.

2. S-a vândut în prima zi jumătate din cantitatea de grâu și încă 10 kg, în a doua zi o jumătate din rest și încă 20 kg și în a treia zi jumătate din rest și încă 30 kg. Cât grâu a fost inițial și cât s-a vândut zilnic, dacă nu a mai rămas deloc?

3. 6 muncitori termină o lucrare în 20 de zile. După 5 zile mai vin 3 muncitori. După câte zile termină lucrarea toți muncitorii?

4. Compuneți o problemă care se rezolvă cu metoda falsei ipoteze, apoi rezolvați-o.

Punctaj: 3p, 3p, 2p, 1p; 1p din oficiu.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Divizor. Multiplu

SĂ NE AMINTIM!

✓ Suma și produsul a două sau mai multe numere naturale este număr natural.
✓ Știm că: $a \cdot b + b \cdot c = b \cdot (a + c)$ și $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
✓ Cifrele 0, 2, 4, 6, 8 sunt cifre pare, iar cifrele 1, 3, 5, 7, 9 sunt cifre impare.
✓ Un număr de trei cifre $\overline{abc}$ se poate scrie $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Să exersăm:

Raluca are 10 mere. Poate împărți cele 10 mere, în mod egal, cu verișoara ei? Da. Fiecare fată ar avea câte 5 mere, putem spune că $10 = 2 \cdot 5$. Poate însă împărți cele 10 mere, în mod egal, cu cele două prietene ale ei? Nu. Numărul 10 nu se împarte exact la 3, deci nu putem scrie 10 ca un produs în care unul dintre factori să fie 3.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Un număr natural ***a este divizibil cu un număr natural b*** dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Scriem $a \vdots b$ și citim „*a* se divide cu *b*” sau „*a* este multiplu al lui *b*” sau scriem $b | a$ și citim „*b* divide *a*” sau „*b* este divizor al lui *a*”.

Cu alte cuvinte: spunem că un număr natural ***a*** este divizibil cu un număr natural, diferit de zero, *b*, dacă ***a*** se împarte exact la *b*.

Să exersăm:

➢ $3 | 6$, deoarece există un număr natural 2 astfel încât $6 = 3 \cdot 2$. Numerele 2 și 3 sunt divizori ai lui 6. Numărul 6 este multiplu al numerelor 2 și 3. Și numerele 1 și 6 sunt divizori ai lui 6. Numărul 6 este multiplu și al numerelor 1 și 6.

➢ Divizorii numărului 14 sunt: 1, 2, 7 și 14. Primii 5 multipli ai numărului 14 sunt 0, 14, 28, 42, 56.

➢ Divizorii numărului 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24. Primii 6 multipli ai numărului 24 sunt 0, 24, 48, 72, 96, 120.

Observăm că numărul multiplilor unui număr este prea mare pentru a-i putea scrie pe toți, și de aceea scriem doar o parte dintre ei.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Numărul 7 <u>nu</u> este divizibil cu 2 pentru că nu există niciun număr natural astfel încât prin înmulțire cu 2 să se obțină numărul 7. Cu alte cuvinte, 7 nu se împarte exact la 2. Scriem $2 \nmid 7$ (2 nu divide 7) sau $7 \not\vdots\, 2$.

Să exersăm:

➢ Arătați că: a) 7 este divizor al lui 42; b) 12 este divizor al lui 48; c) 64 este multiplu al lui 4.

Rezolvare: a) $42 = 7 \cdot 6$; b) $48 = 12 \cdot 4$; c) $64 = 4 \cdot 16$.

➢ Stabiliți care dintre enunțurile următoare este adevărat și care este fals: $15|225$, $7|1001$, $13|1001$, $15|2015$, $20|1234560$, $2016 \vdots 4$, $45324 \vdots 9$, $312 \vdots 7$, $44561 \vdots 11$.

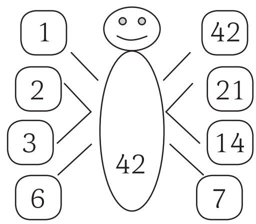
Rezolvare: $225 = 15 \cdot 15$, deci enunțul $15|225$ este adevărat; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, deci $7|1001$ și $13|1001$ sunt adevărate; $312 = 7 \cdot 44 + 4$, deci $312 \vdots 7$ este fals.

➢ Orice număr par se divide cu 4? Cum justificăm răspunsul?

Rezolvare: Numărul 8 se împarte exact la 4, dar numărul 6 nu se împarte exact la 4. Așadar, există numere pare care se divid cu 4 și numere pare care nu se divid cu 4.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Cum suntem siguri că am găsit toți divizorii unui număr natural?



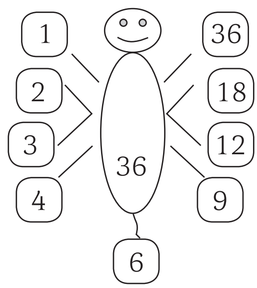
Să considerăm numărul 42. Cea mai simplă scriere a lui 42 ca un produs de două numere naturale este $42 = 42 \cdot 1$, deci 1 și 42 sunt divizori ai numărului 42. Numărul 42 se împarte exact la 2, și scriem $42 = 2 \cdot 21$, deci 2 și 21 sunt și ei divizori. Analog, 3, 42 se împarte exact la 3, și scriem $42 = 3 \cdot 14$, deci alți doi divizori sunt 3 și 14. Următorul număr la care se împarte exact 42 este 6, și scriem $42 = 6 \cdot 7$, deci 6 și 7 sunt divizori. Cum între 6 și 7 nu mai există alte numere naturale, nu mai putem găsi alți divizori. Scriind în ordine crescătoare numerele găsite, divizorii numărului 42 sunt: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 și 42.

Cum facem să descoperim multiplii unui număr natural?

Să considerăm numărul 42. Multiplicăm numărul 42 (înmulțim pe rând 42 cu toate numerele naturale) și aflăm multiplii acestuia: $42 \cdot 0$, $42 \cdot 1$, $42 \cdot 2$ ....

Să exersăm:

➢ Scrieți toți divizorii numerelor 10, 15, 20, 25 și 36.



Rezolvare: $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$, deci divizorii lui 10 sunt: 1, 2, 5, 10; $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$, deci divizorii lui 15 sunt: 1, 3, 5, 15; $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$, deci divizorii lui 20 sunt: 1, 2, 4, 5, 10, 20; $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, deci divizorii lui 36 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Dacă numărul este pătrat perfect „gândăcelul divizorilor” are și codiță.

➢ Care sunt primii 5 multipli ai numerelor 10, 15, 20, 25 și 63?

Rezolvare: Primii 5 multipli ai lui 10 sunt: 0, 10, 20, 30, 40.

➢ Scrieți 2 multipli de 3 cifre ai numărului 17.

Rezolvare: Cel mai mic număr de trei cifre este 100. Împărțim 100 la 17 și obținem câtul 5 și restul 15, deci $100 = 17 \cdot 5 + 15$. Primul multiplu de trei cifre al numărului 17 este $17 \cdot 6 = 102$. Alt multiplu de trei cifre poate fi $17 \cdot 7 = 119$.

SĂ OBSERVĂM:

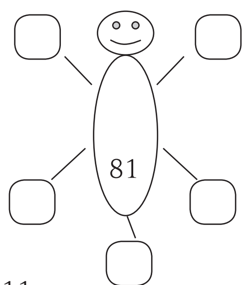
✓ Numărul natural a se poate scrie $a = 1 \cdot a$. Spunem că $1 \mid a$ și $a \mid a$, adică: orice număr natural este divizibil cu 1 și cu el însuși. Numărul 1 și numărul însuși sunt ***divizori improprii,*** iar ceilalți divizori ai numărului, dacă există, sunt ***divizori proprii.***

✓ Numărul 0 este divizibil cu orice număr natural, deoarece $0 = a \cdot 0$. Scriem $a \mid 0$. Numărul 0 este multiplul tuturor numerelor.

✓ Divizorii unui număr natural sunt numere naturale mai mici sau egale cu numărul dat. Un număr natural are un număr finit de divizori.

✓ Multiplii nenuli ai unui număr natural sunt numere naturale mai mari sau egale cu numărul dat. Un număr natural are un număr infinit de multipli.

PROBLEME PROPUSE:



1. Scrieți toți divizorii numerelor 12, 18, 28, 32, 81 și 120. Precizați care sunt divizorii proprii și care sunt divizorii improprii ai fiecărul număr.

2. Aflați suma divizorilor numărului 18. Dar suma divizorilor numărului 81?

3. Scrieți numerele divizibile cu 10, cel puțin egale cu 1985 și cel mult egale cu 2010.

4. Scrieți primii 5 multipli ai numerelor 8, 18, 21, 35, 64 și 111.

5. Scrieți 5 multipli de trei cifre ai numărului 21.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $17 \vdots 17$; b) $6 \mid 48$; c) $72 \vdots 9$; d) $1 \mid 0$; e) $12 \mid 144$; f) $2^2 \mid 4^3$; g) $125 \vdots 25$; h) $12 \mid 144$; i) $121 \vdots 11$; j) $10^2 \mid 200$; k) $10 \mid 7\left(4^2 - 2 \cdot 3\right)$; l) $436 \vdots 12$; m) $8 \mid 14$; n) $4 \vdots 4$; o) $4 \vdots 3$; p) $15 \mid 315$; q) $19 \mid 190$; r) $\left(6^2 \cdot 5 - 2^3 \cdot 10\right) \vdots \left(3^2 + 1^{569} - 0^{368}\right)$; s) $6^2 \mid \left(4^3 + 2 \cdot 15 - 2 \cdot 5^2\right)$; t) $60\,000 \vdots \left(2^2 \cdot 5\right)$.

Divizori comuni. Multipli comuni

SĂ NE AMINTIM!

✓ Un număr natural b este divizor al unui număr natural a dacă a se împarte exact la b. Un număr natural are un număr finit de divizori. Numărul 1 și numărul însuși sunt divizori improprii și ceilalți divizori, dacă există, sunt divizori proprii. Divizorii unui număr natural sunt numere naturale mai mici sau egale cu numărul dat.

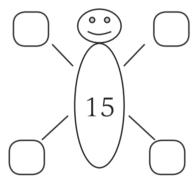
✓ Un număr natural a este multiplu al unui număr natural b dacă a se împarte exact la b. Un număr natural are o infinitate de multipli. Numărul 0 este multiplul tuturor numerelor. Multiplii nenuli ai unui număr natural sunt numere naturale mai mari sau egale cu numărul dat.

Să exersăm:

➢ Scrieți divizorii numerelor 12 și 18. Care sunt divizorii comuni ai lor?

Rezolvare: $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, deci divizorii lui 12 sunt 1, 2, 3, 4, 6 și 12, iar ai lui 18 sunt 1, 18, 2, 9, 3 și 6. Divizorii comuni sunt 1, 2, 3 și 6.

➢ Scrieți divizorii lui 13 și 15. Care sunt divizorii comuni ai lor?



Rezolvare: Divizorii lui $13 = 1 \cdot 13$ sunt 1 și 13, iar ai lui 15 sunt 1, 3, 5 și 15. Cele două numere au ca divizor comun doar numărul 1.

➢ Scrieți multiplii numerelor 12 și 18. Cele două numere au multipli comuni? Care sunt multiplii comuni ai celor două numere?

Rezolvare: Multiplii numărului 12 sunt: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ..., $12 \cdot k$, ... Putem scrie, pe scurt, că multiplii numărului 12 sunt $12 \cdot k$, unde k este orice număr natural. Multiplii numărului 18 sunt: 0, 18, 36, 54, 72, 90, ..., $18 \cdot k$, ... Multiplii comuni ai celor două numere sunt: 0, 36, 72, ... Am putea spune că multiplii comuni ai celor două numere naturale sunt de forma $36 \cdot k$, unde k este orice număr natural.

➢ Calculați primii 3 multipli comuni nenuli ai numerelor 150 și 200.

Rezolvare: O metodă simplă este următoarea: alegem numărul mai mare (200) și calculăm $200 \cdot n$, unde n este număr natural, iar dintre acestea alegem primul număr care se împarte la 150. Calculând $200 \cdot n$ obținem 200, 400, 600, ..., iar primul dintre acestea care se împarte și la 150 este 600. Următorii doi se obțin multiplicând pe 600, și anume: 1200, 1800.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Numărul 1 este divizorul comun al tuturor numerelor naturale. Două numere naturale pot avea și alți divizori comuni.

Numărul 0 este multiplul comun al tuturor numerelor naturale. Două numere naturale au întotdeauna multipli comuni.

Să exersăm:

➢ Scrieți divizorii și multiplii numerelor 9 și 15. Care sunt divizorii comuni? Dar multiplii comuni?

Rezolvare: Divizorii comuni sunt 1 și 3. Multiplii comuni sunt: 0, 45, 90, ..., $45 \cdot k$, ...

➢ Fără a scrie divizorii fiecărui număr (adică oral), aflați cel mai mic și cel mai mare divizor comun al următoarelor numere. Apoi, fără a scrie multiplii fiecărui număr (adică oral), aflați cel mai mic multiplu comun nenul al lor: 2 și 4; 5 și 10; 4 și 6; 2, 3 și 6; 4, 6 și 8; 10, 20, 30 și 40; 5, 10, 15, 20 și 25.

Răspuns: cel mai mic și cel mai mare divizor comun: 1 și 2; 1 și 5; 1 și 2; 1; 1 și 2; 1 și 10; 1 și 5; cel mai mic multiplu comun: 4, 10, 12, 6, 24, 120, 300.

PROBLEME PROPUSE:

1. Înlocuiți spațiile punctate cu unul din cuvintele „divizor" sau „multiplu" pentru a obține expresii adevărate:

3 este	....	al lui 9
32 este	....	al lui 8
3 este	....	al lui 3
256 este	....	al lui 16

13 este	......	al lui 1
6 este	......	al lui 18
11 este	......	al lui 121
27 este	......	al lui 81

2. Scrieți divizorii numerelor 10, 30 și 45. Precizați care sunt divizorii proprii și care sunt divizorii improprii ai fiecărui număr.

3. Scrieți divizorii comuni ai numerelor: 36 și 48; 64 și 81; 100 și 120; 144 și 44.

4. Scrieți câte 3 multipli comuni ai numerelor: 36 și 48; 64 și 81; 100 și 120; 144 și 44.

5. Într-o tabără merg 290 de copii. Aceștia vor fi transportați cu autocare de 45 de locuri. De câte autocare ar fi nevoie?

6. Scrieți numerele divizibile cu 2 și 5 cuprinse între 27 și 56.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Scrieți toți multiplii numărului 121 cuprinși între 1017 și 2017.

2. Aflați numerele de o cifră care au exact: a) 3 divizori; b) 2 divizori; c) 4 divizori.

3. Calculați suma tuturor multiplilor de trei cifre ai numărului 25.

Aplicații ale divizibilității

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Numerele naturale care se împart exact la 2 sunt numere pare: 0, 2, 4, 6, 8, ..., iar celelalte sunt numere impare: 1, 3, 5, 7, 9, ... Așadar, numerele naturale pare sunt numerele de forma $2 \cdot n$, unde n este număr natural. Numerele naturale impare sunt numerele de forma $2 \cdot n + 1$, unde n este număr natural.

Suma a două numere naturale pare este un număr par.

Exemplu: Dacă 4 și 6 sunt numere pare, atunci $4 + 6 = 10$ este număr par.

În general: Putem scrie două numere pare ca fiind de forma $2n$ și $2m$, unde n și m sunt numere naturale. Suma lor este $2n + 2m = 2(n + m)$, număr par.

Suma a două numere naturale impare este un număr par.

Exemplu: Dacă 5 și 7 sunt numere impare, atunci $5 + 7 = 12$ este număr par.

În general: Putem scrie două numere impare ca fiind de forma $2n + 1$ și $2m + 1$, unde n și m sunt numere naturale. Suma lor este $(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$, număr par.

Suma dintre un număr natural par și un număr natural impar este un număr impar.

Exemplu: Dacă 4 este un număr par și 5 este un număr impar, atunci $4 + 5 = 9$ este număr impar.

În general: Putem scrie un număr par ca fiind de forma $2n$ și un număr impar ca fiind de forma $2m+1$, unde n și m sunt numere naturale. Suma lor este $(2n) + (2m + 1) = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$, număr impar.

Să exersăm:

➢ Fie numerele a și b date de relațiile $a = 2 + n$ și $b = 5 + m$, unde n și m sunt numere naturale. Completați propozițiile de mai jos:

a) Dacă n este număr par, atunci a este număr .....
b) Dacă n este număr impar, atunci a este număr .....
c) Dacă m este număr par, atunci b este număr .....
d) Dacă m este număr impar, atunci b este număr .....
e) Dacă n și m sunt numere pare, atunci $a + b$ este număr .....
f) Dacă n și m sunt numere impare, atunci $a + b$ este număr .....
g) Dacă n este număr par și m este număr impar, atunci $a + b$ este număr .....
h) Dacă n este număr impar și m este număr par, atunci $a - b$ este număr .....

Rezultate: a) par; b) impar; c) impar; d) par; e) impar; f) impar; g) par; f) par.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

Exemplu: Dacă 4 și 5 sunt numere consecutive, atunci $4 \cdot 5 = 20$ este număr par.

În general: Putem scrie două numere consecutive ca fiind de forma n și $n+1$, unde n este număr natural. Dacă n este număr par îl putem scrie $n = 2 \cdot k$; produsul $n(n+1) = 2 \cdot k(2 \cdot k+1) = 2 \cdot [k(2 \cdot k+1)]$ este număr par. Dacă n este număr impar îl putem scrie $n = 2 \cdot k+1$; produsul $n(n+1) = (2 \cdot k+1)(2 \cdot k+1+1) = (2 \cdot k+1)(2 \cdot k+2) = (2 \cdot k+1) \cdot 2 \cdot (k+1) = 2 \cdot [(2 \cdot k+1)(k+1)]$ este număr par.

Produsul a trei numere naturale consecutive este un număr divizibil cu 3.

Exemplu: Dacă 4, 5 și 6 sunt consecutive, atunci $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ este divizibil cu 3.

În general: Putem scrie trei numere consecutive ca fiind de forma n, $n + 1$ și $n + 2$, unde n este număr natural. Dacă împărțim primul număr n la 3 putem obține resturile 0, 1 sau 2, deci putem scrie pe n sub forma: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, sau $n = 3k + 2$. Dacă $n = 3 \cdot k$, produsul $n(n+1)(n+2) = 3 \cdot k(3 \cdot k+1)(3 \cdot k+2) = 3 \cdot [k(3 \cdot k+1)(3 \cdot k+2)]$ se divide cu 3. Analog, pentru $n = 3 \cdot k+1$ sau $n = 3 \cdot k + 2$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Scrieți toate numerele pare dintre 15 și 25.

2. Scrieți toate numerele impare dintre 24 și 36.

3. Scrieți cel mai mare număr par de trei cifre diferite, cu cifra sutelor pară și cifra zecilor impară.

4. Numerele de forma $4n + 6$, unde n este număr natural, sunt pare sau impare?

5. Scrieți toți multiplii de trei cifre ai numărului 51.

6. Scrieți toate numerele naturale de patru cifre care au cifra miilor pară, cifra sutelor 9, cifra zecilor 0 și cifra unităților 5.

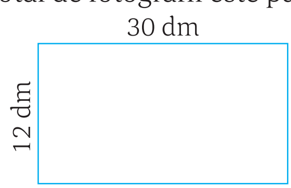
7. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mic dintre cele trei numere este par sau impar?

8. Dați exemple de trei numere naturale divizibile cu 4 și cu 8.

9. Găsiți trei numere naturale care sunt divizibile cu 3, dar nu sunt divizibile cu 9.

10. Elevii unei clase au schimbat între ei fotografii, astfel că fiecare elev a primit câte o fotografie de la toți colegii lui. Arătați că numărul total de fotografii este par.

11. Locul de joacă, în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 30 dm și 12 dm, va fi acoperit în totalitate cu dale pătrate cu latura de 3 dm. Câte dale sunt necesare și cum trebuie așezate, știind că nu pot fi tăiate?



Criterii de divizibilitate cu 2, 5 și 10^n

SĂ NE AMINTIM!

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La concurs sunt 15 mese de șah și participă 24 de copii. Pot începe prima partidă de șah toți copiii în același timp? Dar dacă ar participa 25 de copii?

Rezolvare: La o masă de șah se așează 2 copii, deci cei 24 de copii pot începe prima partidă în același timp și vor fi ocupate $24 : 2 = 12$ mese. Dacă participă 25 de copii, 1 copil nu are adversar, deoarece $25 : 2 = 12$ rest 1. Deci, dacă ultima cifră este pară numărul se divide cu 2.

Criteriul de divizibilitate cu 2:

Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară (0, 2, 4, 6, 8), atunci acel număr natural se divide cu 2.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este o cifră pară, atunci acel număr natural nu se divide cu 2.

Să exersăm:

➤ Numerele $20 = 2 \cdot 10$, $42 = 2 \cdot 21$, $34 = 2 \cdot 17$, $56 = 2 \cdot 28$, $18 = 2 \cdot 9$ se divid cu 2, au ultima cifră pară. Numerele $21 = 2 \cdot 10 + 1$, $45 = 2 \cdot 22 + 1$ nu se divid cu 2, au ultima cifră impară.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Se pot așeza 60 kg de mere în lăzi de 5 kg, toate pline? Dar 31 kg?

Rezolvare: $60 : 5 = 12$, deci 60 kg de mere pot fi așezate în lăzi de 5 kg. Dar $31 : 5 = 6$ rest 1, cele 31 kg de mere se pot așeza în 6 lăzi pline și mai rămâne 1 kg. Se observă că numărul se divide cu 5 dacă ultima cifră este 0. Oare este suficientă această condiție?

Criteriul de divizibilitate cu 5:

Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici 5, nici 0, atunci acel număr nu este divizibil cu 5.

Să exersăm:

➢ Numerele $20 = 5 \cdot 4$, $35 = 5 \cdot 7$ se divid cu 5, au ultima cifră 0 sau 5. Numerele $26 = 5 \cdot 5 + 1$, $48 = 5 \cdot 9 + 3$ nu se divid cu 5, nu au ultima cifră 0 sau 5.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Doi iepurași urcă o scară cu 30 de trepte, în salturi. Cel mai mare sare treptele din cinci în cinci, iar cel mai mic, din doi în doi. Treptele sunt numerotate. Scrieți numerele treptelor pe care le vor atinge cei doi iepurași.

Rezolvare: Iepurașul cel mare atinge treptele numerotate cu 0, 5, 10, 15, 20, 25 și 30, iar iepurașul cel mic atinge treptele numerotate cu 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30. Ambii iepurași sar pe treptele 0, 10, 20, 30 (treptele numerotate cu numere care se termină în 0).

Criteriul de divizibilitate cu 10, 10^n:

Un număr natural a cărui ultimă cifră este zero este un număr divizibil cu 10. Un număr natural se divide cu 10 dacă se divide cu 2 și 5.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci acel număr nu este divizibil cu 10.

Un număr natural ale cărui ultime n cifre sunt zerouri este un număr divizibil cu 10^n.

Dacă un număr natural nu se termină cu n zerouri, atunci acel număr nu este divizibil cu 10^n.

Să exersăm:

➢ Numerele $20 = 10 \cdot 2$, $120 = 10 \cdot 12$ se divid cu 10, au ultima cifră 0. Numărul $200 = 100 \cdot 2$ se divide cu 10^2, $1000 = 1000 \cdot 1$ se divide cu 10^3. Numerele $21 = 10 \cdot 2 + 1$, $45 = 10 \cdot 4 + 5$ nu se divid cu 10, nu au ultima cifră 0.

➢ Fie numerele: 122, 256, 30, 428, 567, 14, 75, 301, 120, 25, 175, 140, 1000, 15, 18, 50, 225, 365. Copiați tabelul în caiet și completați-l:

Numere divizibile cu 2	122									
Numere divizibile cu 5	30									
Numere divizibile cu 10	30									

➢ Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 10^3: 120; 25000; 3010000; 420; 5600?

Rezolvare: 25000 și 3010000 au ultimele trei cifre egale cu 0, deci se divid cu 10^3; 120, 420 și 5600 nu au la final trei cifre egale cu 0, deci nu se divid cu 10^3.

➢ Care este cel mai mare număr natural de trei cifre diferite divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 2 și 5? Care este cel mai mic număr natural de patru cifre divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 2 și 5?

Rezultat: 986; 985; 980; 1000; 1000; 1000.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{12x}$ se divide cu 2 dacă (conform criteriului) x este număr par, adică 0, 2, 4, 6, 8. Numerele sunt: 120, 122, 124, 126, 128.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{x5}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{x5}$ se divide cu 2 dacă (conform criteriului) ultima cifră este număr par, adică 0, 2, 4, 6, 8. Numărul cerut are ultima cifră 5, care nu este număr par. Nu există numere de forma $\overline{x5}$ divizibile cu 2.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{1x3}$, scrise în baza 10, care se divid cu 5.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{1x3}$ se divide cu 5 dacă (conform criteriului) ultima cifră este 0 sau 5. Numărul cerut are ultima cifră 3, care nu este nici 0 și nici 5. Nu există numere de forma $\overline{1x3}$ divizibile cu 5.

PROBLEME PROPUSE:

1. Fie numerele: 42, 688, 326, 15, 126, 1114, 72, 3012, 455, 125, 112, 560, 14, 751, 10, 20, 45, 300, 126, 500, 520, 1700, 430. Copiați tabelul în caiet și completați-l:

Numere divizibile cu 2											
Numere divizibile cu 5											
Numere divizibile cu 10											

2. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 10^2: 4005; 12100; 10000; 412000; 1500?

3. Care este cel mai mare număr natural de patru cifre diferite divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 2 și 5?

4. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre diferite divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 2 și 5?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, $\overline{5x3}$, $\overline{xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 2.

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{362x}$, $\overline{1x10}$, $\overline{xy}$, $\overline{2x9}$, scrise în baza 10, care se divid cu 5.

3. Câte numere naturale de forma $\overline{xyz}$, scrise în baza 10, se divid cu 2? Dar cu 5?

Criterii de divizibilitate cu 3 și 9

SĂ ÎNVĂȚĂM!

În două coșuri sunt 24 de mere și respectiv 31 de mere. Maria, Sandu și Vicu vor să împartă merele din cele două coșuri în câte trei părți egale. Este posibil?

Rezolvare: 24 : 3 = 8, deci merele din primul coș pot fi împărțite în mod egal celor trei copii. Merele din al doilea coș nu pot fi împărțite exact, deoarece 31 : 3 = 10 rest 1.

Criteriul de divizibilitate cu 3:

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 3, atunci acel număr nu este divizibil cu 3.

Să exersăm:

Numărul 36 = 3 · 12 se divide cu 3; suma cifrelor sale, 3 + 6 = 9, se divide cu 3. Numărul 29 = 3 · 7 + 2 nu se divide cu 3; suma cifrelor sale, 2 + 9 = 11, nu se divide cu 3.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Maria are o cutie cu 36 de brioșe pe care vrea să le împartă în mod egal cu cei 8 colegi ai săi. Este posibil? Dar dacă în cutie sunt 40 de brioșe?

Rezolvare: Cele 36 de brioșe se pot împărți în mod egal la 9 copii, 36 : 9 = 4. Dacă în cutie sunt 40 de brioșe, 40 : 9 = 4 rest 4 deci rămân 4 brioșe neîmpărțite.

Criteriul de divizibilitate cu 9:

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr este divizibil cu 9.

Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 9, atunci acel număr nu este divizibil cu 9.

Să exersăm:

Numărul 36 = 9 · 4 se divide cu 9; suma cifrelor sale, 3 + 6 = 9, se divide cu 9. Numărul 38 = 9 · 4 + 2 nu se divide cu 9; suma cifrelor sale, 3 + 8 = 11, nu se divide cu 9.

Probleme rezolvate:

➢ Fie numerele: 222, 126, 30, 428, 567, 15, 75, 120, 27, 35, 828, 657, 140, 714, 306. Copiați tabelul în caiet și completați-l:

Numere divizibile cu 3											
Numere divizibile cu 9											

➢ Care este cel mai mare număr natural de trei cifre diferite divizibil cu 3? Dar cu 9? Care este cel mai mic număr natural de patru cifre diferite divizibil cu 3? Dar cu 9?

Rezultat: 987, 981, 1023, 1026.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{12x}$ se divide cu 3 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 3, adică $1+2+x$ se divide cu 3, adică $3+x$ poate fi 3, 6, 9, 12, 15..., adică x poate fi 0, 3, 6, 9, 12... Cum, începând cu 12, x nu mai este cifră, înseamnă că numerele cerute sunt: 120, 123, 126 și 129.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{25x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 9.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{25x}$ se divide cu 9 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 9, adică $2+5+x$ se divide cu 9, deci $7+x$ poate fi 9, 18, 27..., adică x poate fi 2, 12, ... Cum, începând cu 12, x nu mai este cifră, numărul cerut este: 252.

➢ Aflați cel mai mare și cel mai mic număr de forma $\overline{x5y}$, în baza 10, care se divid cu 3.

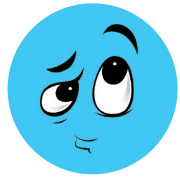
Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{x5y}$ se divide cu 3 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 3, adică $x+5+y$ se divide cu 3. Pentru ca numărul $\overline{x5y}$ să fie cel mai mare cu această proprietate, trebuie ca x și y să fie cât mai mari. Pentru $x=9$ obținem $9+5+y$ se divide cu 3, adică $14+y$ se divide cu 3. Cel mai mare y pentru care se întâmplă acest lucru este $y=7$, deci numărul căutat este 957.

Pentru ca numărul $\overline{x5y}$ să fie cel mai mic cu această proprietate trebuie ca x și y să fie cât mai mici. Pentru $x=1$ (x nu poate fi egal cu 0), obținem $1+5+y$ se divide cu 3, adică $6+y$ se divide cu 3. Cel mai mic y pentru care se întâmplă acest lucru este $y=0$, deci numărul căutat este 150.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{1xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 9.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{1xy}$ se divide cu 9 dacă (conform criteriului) suma cifrelor sale se divide cu 9, adică $1+x+y$ se divide cu 9. Deci $1+x+y$ poate fi 9, 18, 27,... Dacă $1+x+y=9$, atunci $x+y=8$, de unde $x=0, y=8$, sau $x=1, y=7$ sau $x=2, y=6$ sau $x=3, y=5$ sau $x=4, y=4$ sau $x=5, y=3$ sau $x=6, y=2$ sau $x=7, y=1$ sau $x=8, y=0$. Dacă $1+x+y=18$, atunci $x+y=17$; cum x, y sunt cifre, obținem $x=9, y=8$ sau $x=8, y=9$. Dacă $1+x+y=27$, atunci $x+y=26$, caz care nu este bun pentru că x, y sunt cifre, iar suma lor nu poate depăși 18. Numerele sunt: 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 198, 189.

PROBLEME PROPUSE:



1. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 3: 24; 687; 306; 15; 126; 1114; 72; 3012?

2. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 9: 450; 126; 3120; 112; 560; 14; 751; 3012?

3. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 6: 24; 45; 300; 126; 500; 520; 1700; 430?

4. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 18: 5004; 12150; 90000; 99; 1500?

5. Care este cel mai mare număr natural de patru cifre diferite divizibil cu 3? Dar cu 9? Dar cu 2 și 9?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Arătați că numărul N = 36 + 621 se divide cu 9.

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, $\overline{5x3}$, $\overline{xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3.

3. Determinați numerele naturale de forma $\overline{362x}$, $\overline{1x10}$, $\overline{xy}$, $\overline{2x9}$, scrise în baza 10, care se divid cu 9.

4. Determinați numerele naturale de forma $\overline{35x}$, $\overline{x1y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 6.

5. Câte numere naturale de forma $\overline{12y5x}$, scrise în baza 10, se divid cu 9? Dar cu 3?

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{x71y}$, $\overline{29x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 15.

7. Determinați numerele naturale de forma $\overline{362x}$, $\overline{1x5y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 3 și nu se divid cu 9.

Știați că...

Puteți calcula restul împărțirii la 9 a oricărui număr natural fără a realiza împărțirea. Pentru aceasta calculați suma cifrelor numărului; pentru numărul obținut calculați din nou suma cifrelor și tot așa până când obțineți la rezultat un număr format dintr-o singură cifră. Dacă cifra respectivă este 9 atunci restul este 0, iar dacă este diferită de 9, atunci ea reprezintă restul căutat. Verificați acest lucru pentru numărul 857948755, realizând mai întâi împărțirea pentru a găsi restul și apoi aplicând ideea cu suma cifrelor.

Proprietatea este o consecință a criteriului de divizibilitate cu 9 care ne permite să spunem că un număr și suma cifrelor sale dau același rest la împărțirea prin 9.

Aplicații ale criteriilor de divizibilitate

SĂ NE AMINTIM!

✓ Un număr natural ***a*** este divizibil cu un număr natural ***b*** dacă există un număr natural *c* astfel încât $a = b \cdot c$.

✓ Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară (0, 2, 4, 6, 8), atunci acel număr natural se divide cu 2.

✓ Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.

✓ Un număr natural a cărui ultimă cifră este zero este un număr divizibil cu 10, adică cu 2 și cu 5.

✓ Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibil cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

✓ Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr este divizibil cu 9.

Să exersăm:

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{50x}$, scrise în baza 10, care se divid cu 6.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{50x}$ se divide cu 6 dacă se divide cu 2 și cu 3, adică dacă (conform criteriilor) ultima cifră este număr par (0, 2, 4, 6 sau 8) și suma cifrelor sale se divide cu 3. Dacă $x=0$, suma cifrelor numărului 500 nu se divide cu 3. Dacă $x=2$, suma cifrelor numărului 502 nu se divide cu 3. Dacă $x=4$, suma cifrelor numărului 504 se divide cu 3. Dacă $x=6$, suma cifrelor numărului 506 nu se divide cu 3. Dacă $x=8$, suma cifrelor numărului 508 nu se divide cu 3. Singurul număr găsit este 504.

➢ Aflați numerele naturale de forma $\overline{50xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 45.

Rezolvare: Un număr natural de forma $\overline{50xy}$ se divide cu 45 dacă se divide cu 5 și cu 9, adică dacă (conform criteriilor) ultima cifră este 0 sau 5 și suma cifrelor sale se divide cu 9. Dacă $y=0$, suma cifrelor numărului $\overline{50x0}$ se divide cu 9 dacă $x=4$. Dacă $y=5$, suma cifrelor numărului $\overline{50x5}$ se divide cu 9 dacă $x=8$. Numerele sunt: 5040 și 5085.

➢ Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul natural de forma $\overline{abc}$, scris în baza 10, pentru a se divide cu 4?

Rezolvare: $\overline{abc}=100a+10b+c=4\cdot 25\cdot a+\overline{bc}$. Primul termen al sumei, $4\cdot 25\cdot a$, se divide cu 4. Dacă vrem ca numărul $\overline{abc}$ să se dividă cu 4, atunci și termenul $\overline{bc}$ trebuie să se dividă cu 4.

Concluzie: Putem spune că un număr natural este divizibil cu 4 dacă numărul natural format din ultimele două cifre ale lui este divizibil cu 4.

Exemple: 224 = 4 · 56; numărul format din ultimele două cifre, 24, se divide cu 4. Numărul 425 = 4 · 106 + 1 nu se divide cu 4; numărul format din ultimele două cifre, 25, nu se divide cu 4.

➤ Care dintre următoarele numere naturale se divide cu 4: 222; 128; 32; 4280; 567; 150; 752; 3012?

Rezolvare: Pentru 128, 32, 4280, 752 și 3012 numerele formate din ultimele două cifre sunt divizibile cu 4, deci se divid cu 4. Pentru 222, 567 și 150 numerele formate din ultimele două cifre nu sunt divizibile cu 4, deci nu se divid cu 4.

➤ Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul natural de forma $\overline{abc}$, scris în baza 10, pentru a se divide cu 25?

Rezolvare: $\overline{abc}=100a+10b+c=25\cdot 4\cdot a+\overline{bc}$. Primul termen al sumei, $25\cdot 4\cdot a$, se divide cu 25; dacă vrem ca numărul $\overline{abc}$ să se dividă cu 25, atunci și termenul $\overline{bc}$ trebuie să se dividă cu 25.

Concluzie: Putem spune că un număr natural este divizibil cu 25 dacă numărul natural format din ultimele două cifre ale lui este divizibil cu 25.

Exemple: 225 = 25 · 9; numărul format din ultimele două cifre, 25, se divide cu 25. Numărul 426 = 25 · 17 + 1 nu se divide cu 25; numărul format din ultimele două cifre, 26, nu se divide cu 25.

➤ Arătați că $A=3^{n+3}+3^{n+2}+5\cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 153, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Rezolvare: $A=3^{n+3}+3^{n+2}+5\cdot 3^{n+1}=3^n(3^3+3^2+5\cdot 3^1)=3^n(27+9+15)=3^n\cdot 51$. Cum n este nenul, numărul A se divide cu 3 și cu 51, deci cu 153.

➤ Arătați că $A=1+2^1+2^2+\ldots+2^{99}$ este divizibil cu 15.

Rezolvare: Să observăm că suma respectivă are 100 de termeni (de la $1 = 2^0$ până la 2^{99} sunt 100 de numere). Vom încerca să aflăm câte puteri consecutive ale lui 2 adunate dau un număr divizibil cu 15: $1+2^1=3$ nu este divizibil cu 15; $1+2^1+2^2=7$ nu este divizibil cu 15; $1+2^1+2^2+2^3=15$ este divizibil cu 15. Așadar suma primilor 4 termeni este un număr divizibil cu 15. Cum suma are 100 de termeni, putem grupa câte 4 termeni și obținem:

$$A=(1+2^1+2^2+2^3)+(2^4+2^5+2^6+2^7)+\ldots+(2^{96}+2^{97}+2^{98}+2^{99})=$$

$$=(1+2^1+2^2+2^3)+2^4(1+2^1+2^2+2^3)+\ldots+2^{96}(1+2^1+2^2+2^3)=$$

$$=(1+2^1+2^2+2^3)(1+2^4+\ldots+2^{96})=15\cdot(1+2^4+\ldots+2^{96}),$$ deci A se divide cu 15.

➤ Aflați restul împărțirii lui $A=1+2^1+2^2+\ldots+2^{99}+2^{100}+2^{101}$ la 15.

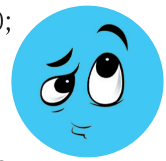
Rezolvare: Să observăm că suma respectivă are 102 termeni (de la $1 = 2^0$ până la 2^{101} sunt 102 numere). Am vazut la exercițiul anterior cu fiecare grupă de 4 termeni consecutivi ai sumei se divide cu 15. Cum suma are 102 termeni, 100 dintre ei pot fi grupați câte 4 și rămân 2 termeni. Grupăm începând de la ultimul termen și obținem:

$$A=1+2+(2^2+2^3+2^4+2^5)+(2^6+2^7+2^8+2^9)+\ldots+(2^{98}+2^{99}+2^{100}+2^{101})=$$

$$=1+2+2^2(1+2^1+2^2+2^3)+2^6(1+2^1+2^2+2^3)+\ldots+2^{98}(1+2^1+2^2+2^3)=$$

$=3+(1+2^1+2^2+2^3)(2^2+2^6+\ldots2^{98})=15\cdot(2^2+2^6+\ldots+2^{98})+3$, deci restul împărțirii numărului A la 15 este 3.

PROBLEME PROPUSE:



1. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 4: 24; 680; 306; 15; 126; 1114; 72; 3012?

2. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 25: 450; 125; 3120; 1100; 560; 751; 3010?

3. Care dintre următoarele numere naturale se divid cu 75: 2400; 450; 300; 125; 500; 1700; 430?

4. Care este cel mai mare număr natural de patru cifre diferite divizibil cu 4? Dar cu 25? Dar cu 4 și 25?

5. Determinați numerele naturale de forma $\overline{12x}$, $\overline{5x3}$, $\overline{xy}$, scrise în baza 10, care se divid cu 4.

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{362x}$, $\overline{1x100}$, $\overline{xy}$, $\overline{2x9}$, scrise în baza 10, care se divid cu 25.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Câte numere naturale de forma $\overline{1y5x}$, scrise în baza 10, se divid cu 4?

2. Câte numere naturale de forma $\overline{1y5xz}$, scrise în baza 10, se divid cu 25?

3. Determinați numerele naturale de forma $\overline{362xyz}$, scrise în baza 10, care se divid cu 25 și nu se divid cu 4.

4. Determinați numerele naturale de forma $\overline{1x5yz}$, scrise în baza 10, care se divid cu 4 și nu se divid cu 25.

Numere prime. Numere compuse

SĂ NE AMINTIM!

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă un număr natural nenul, diferit de 1, are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși, atunci el este prim. *Altfel spus:* un număr natural nenul diferit de 1 este prim dacă admite numai divizori improprii.

Exemple: Numărul 2 este prim pentru că se divide numai cu 1 și cu 2, adică numai cu 1 și cu el însuși. Numărul 3 se divide, de asemenea, numai cu 1 și cu el însuși, deci este număr prim. Următoarele numere sunt prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47.

Despre un număr natural care nu este prim spunem că este neprim. Numerele compuse sunt numerele neprime diferite de 1.

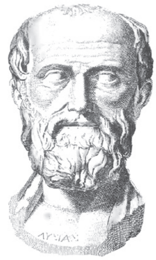
Exemple: Numerele naturale 0, 4, 6, 8, 10, 12, 147 sunt numere compuse.

Cum recunoaștem dacă un număr natural este prim? Împărțim numărul, pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare, începând cu 2, până când obținem un cât mai mic sau egal cu împărțitorul. Dacă numărul se divide cu unul dintre aceste numere prime, este evident că el nu este prim. Dacă numărul considerat nu se divide cu niciunul din aceste numere prime, atunci el este prim.

Să exersăm:

➢ Verificați dacă 113 este număr prim.

Rezolvare: Verificăm, folosind criteriile de divizibilitate, că numărul 113 nu se divide cu 2, cu 3 și cu 5. Pentru a afla dacă 113 se divide cu 7 facem împărțirea lui 113 la 7 și obținem câtul 16 și restul 1, deci 113 nu se divide cu 7. Pentru a verifica dacă 113 se divide cu 11 facem împărțirea lui 113 la 11, $113 = 11 \cdot 10 + 3$, deci 113 nu se divide cu 11. Deoarece câtul (10) este mai mic decât împărțitorul (11), nu mai continuăm împărțirile. Așadar 113 nu se divide cu niciun număr prim mai mic sau egal cu 11. Afirmăm că el nu se divide nici cu numerele compuse mai mici decât 11. Într-adevăr, dacă 113 nu se divide cu 2, el nu se divide nici cu multiplii lui 2: 4, 6, 8, 10, iar dacă 113 nu se divide cu 3, el nu se divide nici cu 6, 9. Până aici am arătat că numărul 113 nu se divide cu niciun număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 11. Este oare posibil ca 113 să se dividă cu un număr natural c mai mare decât 11? Nu, deoarece, dacă 113 se divide cu un număr *c* mai mare dacât 11, atunci el se divide și cu câtul împărțirii lui 113 la numărul natural *c*; acest cât este un număr mai mic decât 11. Dar, am arătat că 113 nu se divide cu niciun număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 11. În concluzie, numărul 113 nu se divide nici cu un număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 11, nici cu un număr natural mai mare decât 11. Este deci număr prim.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

✓ Cum descoperim numerele prime mai mici ca 100? Vom folosi Ciurul lui Eratostene.

Scriem o listă a numerelor de la 2 la 100. Primul număr prim este 2; toți multiplii lui 2 sunt numere compuse și le vom tăia din listă. Următorul număr prim este 3; vom tăia din listă toți multiplii lui 3 pentru că sunt numere compuse. Procedăm la fel până la 11, pentru că multiplii lui 11 netăiați depășesc 100.

Am găsit astfel numerele prime până la 100. Șirul numerelor prime poate fi găsit în tabele matematice.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ciurul lui Eratostene

Să exersăm:

➢ Suma dintre un număr prim și un număr natural este 29. Aflați numerele.

Rezolvare: Considerăm, pe rând, numerele prime mai mici decât 29: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 și 29. Avem $2 + a = 29$, de unde $a = 27$. Repetăm procedeul pentru toate numerele prime mai mici ca 29 și obținem perechile de numere: (2, 27), (3, 26), (5, 24), (7, 22), (11, 18), (13, 16), (17, 12), (19, 10), (23, 6), (29, 0).

➢ Suma dintre un număr prim și un număr natural multiplu al numărului 5 este 235. Aflați numerele.

Rezolvare: Fie a numărul prim și $5k$ numărul natural multiplu al numărului 5. Avem $a + 5k = 235$. Numerele 235 și $5k$ se divid cu 5, de unde obținem că și numărul a se divide cu 5. Singurul număr prim divizibil cu 5 este chiar numărul 5, deci $a = 5$. Dacă $5 + 5k = 235$, atunci $5k = 230$. Cele două numere sunt 5 și 230.

➢ Suma dintre un număr prim de două cifre identice și un număr natural este 1125. Aflați numerele.

Rezolvare: Fie a numărul prim de două cifre identice și b celălalt număr, $a + b = 1125$. Singurul număr prim de două cifre identice este 11. Avem $11 + b = 1125$. Cele două numere sunt 11 și 1114.

➢ Suma dintre un număr prim de două cifre consecutive și un număr natural este 90. Aflați numerele. Câte soluții are problema?

Rezolvare: Considerăm, pe rând, numerele prime de două cifre consecutive mai mici decât 90: 23, 67, 89. Din $23 + a = 90$, obținem $a = 67$. Repetăm procedeul pentru celelalte numere și obținem perechile de numere: (23, 67), (67, 23), (89, 1).

➢ Aflați numerele prime a și b care verifică relația $9a + 4b = 62$.

Rezolvare: Observăm că $4b$ și 62 sunt pare, deci și $9a$ trebuie să fie par. Singurul număr prim par este 2, așadar singura posibilitate pentru care $9a$ este număr par este 18, deci $a = 2$. Obținem $18 + 4b = 62$, adică $4b = 44$. Numerele sunt 2 și 11.

PROBLEME PROPUSE:

1. Căutați în tabele matematice numerele prime dintre 320 și 500.

2. Suma dintre un număr prim de două cifre diferite și un număr natural impar este 512. Aflați numerele.

3. Produsul dintre un număr natural impar și un număr prim este 254. Aflați-le.

4. Dintre 5 numere prime distincte mai mari decât 5, arătați că există cel puțin două numere a căror diferență este divizibilă cu 10.

5. Arătați că numerele naturale de forma $\overline{abba}$ sunt divizibile cu 11.

6. Arătați că numărul $a = 1^n + 5^n + 6^n + 10^n$ nu este număr prim.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Aflați numerele prime a și b care verifică relația $3a + 7b = 97$.

2. Aflați numerele prime a și b care verifică relația $4a + 3b = 63$.

CURIOZITĂȚI

Un număr N este PERFECT dacă suma S a divizorilor săi (exceptând numărul însuși) este egală cu N. Exemple de numere perfecte: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Dacă $S > N$, atunci numărul este SUPRAPERFECT, iar dacă $S < N$, numărul este IMPERFECT.

Exemple de numere supraperfecte: $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$; $18 < 1 + 2 + 3 + 6 + 9$; $20 < 1 + 2 + 4 + 5 + 10$. Exemple de numere imperfecte: $14 > 1 + 2 + 7$; $16 > 1 + 2 + 4 + 8$; $22 > 1 + 2 + 11$.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Scrieți numerele divizibile cu 2 din șirul următor de numere naturale, apoi pe cele divizibile cu 5: 1; 2; 5; 10; 12; 15; 20; 37; 130; 239; 345; 450; 2010.

2. Scrieți toți divizorii numerelor: 14; 22; 28; 34; 45.

3. Scrieți numerele divizibile cu 2 cuprinse între 101 și 115.

4. Scrieți numerele divizibile cu 5 cuprinse între 11 și 36.

5. Scrieți multiplii lui 9 mai mici decât 100.

6. Scrieți cel mai mic și cel mai mare multiplu de patru cifre al numărului 65.

7. Scrieți doi multipli de trei cifre și doi multipli de patru cifre ai numărului 49.

8. Aflați suma multiplilor numărului 5 cuprinși între 10 și 100.

9. Determinați numerele de forma $\overline{1x2x}$ divizibile cu 2.

10. Folosind cifrele 1, 2 și 3 o singură dată, scrieți: a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 3; c) numerele divizibile cu 6.

11. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu 2? Dar cu 4? Dar cu 5? Dar cu 10? Dar cu 25? Dar cu 100?

12. Care este cel mai mic număr de două cifre divizibil cu 15?

13. Care este cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 30?

14. Folosind cifrele 2, 0 și 5 o singură dată, scrieți: a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 5; c) numerele divizibile cu 10.

15. La concurs participă 100 de fete și 35 de băieți. Toți participanții sunt grupați în echipe cu același număr de copii, iar fiecare echipă are același număr de fete.
a) Arătați că se pot forma 5 echipe; b) Arătați că nu se pot forma 10 echipe.

16. Aflați toate numerele de forma $\overline{2x}$ care sunt divizibile cu 4, iar suma cifrelor este divizibilă cu 2.

17. Aflați toate numerele de forma $\overline{aa}$ știind că sunt divizibile cu 6.

18. Aflați toate numerele de forma $\overline{abcabc}$ știind că sunt divizibile cu 11.

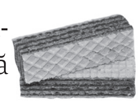
19. La un concurs participă 33 de fete și 18 băieți. Toți participanții sunt grupați în echipe care au același număr de copii, iar fiecare echipă are același număr de fete.
a) Arătați că se pot forma 3 echipe; b) Arătați că nu se pot forma 2 echipe.

20. Aflați toate numerele de forma $\overline{1x}$ care sunt divizibile cu 3, iar suma cifrelor este divizibilă cu 3.

21. Care este cel mai mic număr de forma $\overline{x43x}$ divizibil cu 3? Dar cel mai mare?

22. Care este cel mai mic număr de forma $\overline{x6y}$ divizibil cu 9? Dar cel mai mare?

23. Arătați că numărul $4^2 \cdot 5^5 + 1$ nu este prim.



24. O napolitană are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 5 cm, 3 cm și 2 cm. Se ambalează astfel de napolitane într-o cutie în formă de cub, fără a rămâne goluri. Care este lungimea minimă a laturii cubului?

25. Pentru ce valori naturale ale lui a, numărul $2a - 3$ divide numărul 11?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați suma multiplilor de trei cifre ai numărului 89.

2. Demonstrați că, dacă cifrele unui număr de trei cifre sunt consecutive, atunci numărul se divide cu 3.

3. Care dintre următoarele numere sunt divizibile cu 9: $9n$, $9n + 1$, $9n + 9$, $10n - 1$, $9n + 4$?

4. Care dintre următoarele numere sunt divizibile cu 3: $3n$, $2n + 3$, $3n + 3$, $6n + 3$, $3(n + 1) + 6n$, $2n + 1$?

5. Aflați toate numerele de forma $\overline{12xy}$ care sunt divizibile cu 2, iar suma cifrelor este divizibilă cu 2.

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{35xyz}$, $\overline{x1y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 75.

7. Aflați toate numerele de forma $\overline{abab}$, știind că sunt divizibile cu 5 și îndeplinesc condiția $a + b = 10$.

8. Aflați toate numerele de forma $\overline{abcabc}$, știind că sunt divizibile cu 5, iar $a + b + c = 10$, a este divizibil cu 2 și $a < b$.

9. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $3a + 3b + 4c = 30$.

10. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $a + 10b + 12c = 82$

11. Arătați că numărul $a = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{300}$ este divizibil cu 19.

12. Arătați că numărul $b = 6 + 6^2 + 6^3 + \ldots. + 6^{100}$ este divizibil cu 42.

13. Arătați că numerele de forma $c = 72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde n este număr natural nenul.

14. Arătați că numerele de forma $a = 2^{n+3}5^{n+1} - 1$ se divid cu 3 și nu se divid cu 9, oricare ar fi numărul natural n.

15. Aflați numerele prime de forma $\overline{abc}$, știind că: $a \cdot \overline{bc} = c \cdot \overline{ba} + 10$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Numărul 12 are:
a) 2 divizori; b) 4 divizori; c) 6 divizori; d) 5 divizori.

2. Suma divizorilor numărului 15 este:
a) 16; b) 8; c) 23; d) 24.

3. Numărul 32 are un număr de multipli de două cifre egal cu:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

4. Cel mai mare număr de forma $\overline{abc}$, cu cifre distincte, divizibil cu 2 este:
a) 978; b) 986; c) 998; d) 798.

5. Suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr de forma $\overline{45x}$ divizibil cu 2 este:

a) 908; b) 910; c) 912; d) 914.

6. Numerele naturale de forma $\overline{1a2a}$ divizibile cu 9 sunt în număr de:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 5.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

Testul 2

1. Verificați care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false: $2|234$, $5|125$, $3|134$, $10|230$, $9|567$, $4|234$, $100|34000$, $6|1236$.

2. Scrieți toți divizorii numărului 24.

3. Scrieți cel mai mic și cel mai mare multiplu de două cifre al numărului 12.

4. Folosind cifrele 1, 2 și 3 o singură dată, scrieți: a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 5; c) numerele divizibile cu 3.

5. Suma dintre un număr prim și un număr par este 264. Aflați numerele.

6. Aflați numerele naturale x pentru care $3x - 5$ divide numărul 49.

7. O bucată de săpun are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 2 cm, 6 cm și 5 cm. Se ambalează astfel de bucăți de săpun într-o cutie în formă de cub, fără a rămâne goluri. Care este lungimea minimă a laturii cubului?

Punctaj: 2p, 1p, 1p, 2p, 1p, 1p, 1p; 1p din oficiu.

Testul 3

1. Verificați care dintre următoarele numere: 20, 35, 48, 64, 75, 102, 115, 250, 369, 1028, 2017 sunt divizibile cu 2. Dar cu 5? Dar cu 10? Dar cu 3?

2. Scrieți primii 5 multipli ai numărului 24.

3. Calculați suma divizorilor numărului 24.

4. Folosind cifrele 4, 6 și 5 o singură dată, scrieți: a) numerele divizibile cu 2; b) numerele divizibile cu 5; c) numerele divizibile cu 3.

5. Aflați numerele naturale de forma $\overline{23x}$, scrise în baza 10, divizibile cu 2.

6. Arătați că suma oricăror trei puteri consecutive ale lui 4 se divide cu 21.

7. O cutie de suc are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 11 cm, 8 cm și 4 cm. Se ambalează astfel de cutii de suc într-o cutie în formă de cub, fără a rămâne goluri. Care este lungimea minimă a laturii cubului?

Punctaj: 2p, 1p, 1p, 2p, 1p, 1p, 1p; 1p din oficiu.

• Completați tabelul:

	:	20	+	12	=	16
+		:		+		x
16	+		+		=	
x		+		-		+
25	–		–	6	=	0
=		=		=		=
	:	24	x		=	1120

• Pentru a putea începe rezolvarea tabelului următor trebuie să mai știți câteva date importante pentru România:

A – anul în care s-a înfăptuit Mica Unire – Unirea Principatelor Române;
B – ziua în care o sărbătorim;
C – anul în care s-a proclamat unirea Transilvaniei cu România;
D – ziua în care sărbătorim Ziua Națională a României;
E – anul aderării României la Uniunea Europeană.

C	–		–	B	=	A
+		+		+		+
325	–		–	28	=	
+		+		+		+
300	–		–		=	D
=		=		=		=
	–	285	–		=	E

Tabelele de mai sus au fost proiectate cu ajutorul computerului și al unor softuri informatice numite programe de calcul tabelar. Dacă știți ce să-i cereți unui astfel de program informatic, el poate să vă ajute să faceți diverse tipuri de calcule, să generați șiruri de numere după anumite reguli (din doi în doi, din trei în trei, etc.), să găsiți multipli ai unor numere naturale și multe alte lucruri despre care veți învăța la disciplina Informatică și TIC. De exemplu, pentru a găsi primul multiplu de cinci cifre al numărului 43 am folosit un astfel de program și am obținut ce vedeți în figura alăturată. Să nu credeți că mi-a luat mult timp să scriu șirul numerelor naturale până am ajuns la 242, pentru că programul ne ajută să facem acest lucru.

	multipli ai lui 43
1	43
2	86
...	...
231	9933
232	9976
233	10019
234	10062
235	10105
236	10148
237	10191
238	10234
239	10277
240	10320
241	10363
242	10406

Am pus programul să înmulțească numerele din prima coloana cu 43. Am obținut astfel multipli ai lui 43 și am căutat primul multiplu de 5 cifre.

2 FRACȚII ORDINARE FRACȚII ZECIMALE

„Doi oameni, cunoscuți unul cu altul, călătoreau odată, vara, pe un drum. Unul avea în traista sa trei pâni, și celalalt două pâni. De la o vreme, fiindu-le foame, poposesc la umbra unei răchiți pletoase, lângă o fântână cu ciutură, scoate fiecare pânile ce avea și se pun să mănânce împreună, ca să aibă mai mare poftă de mâncare. Tocmai când scoaseră pânile din traiste, iaca un al treile drumeț, necunoscut, îi ajunge din urmă și se oprește lângă dânșii, dându-le ziua bună. Apoi se roagă să-i deie și lui ceva de mâncare, căci e tare flămând și n-are nimica merinde la dânsul, nici de unde cumpăra. ...”

ION CREANGĂ

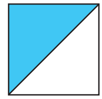
„Cinci pâini” – fragment

FRACŢII ORDINARE

Fracţii ordinare

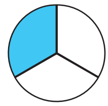
SĂ NE AMINTIM!

✓ Doimea este o parte dintr-un întreg împărțit în două părți egale.



Scriem $\frac{1}{2}$ și citim „unu pe doi” sau „unu supra doi”.

✓ Treimea este o parte dintr-un întreg împărțit în trei părți egale.

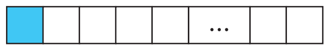


Scriem $\frac{1}{3}$ și citim „unu pe trei” sau „unu supra trei”.

✓ Dacă întregul este împărțit în patru părți egale, una dintre aceste părți se numește *pătrime* sau *sfert* și se scrie $\frac{1}{4}$.

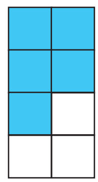
✓ În loc de 2, 3 sau 4 părți egale, putem să ne gândim că împărțim întregul în oricâte părți egale n, unde n este un număr natural diferit de zero.

Scriem $\frac{1}{n}$ și citim „1 pe n” sau „1 supra n”.



O astfel de parte se numește ***unitate fracționară***. Una sau mai multe ***unități fracționare,*** luate împreună, reprezintă o ***fracție***.

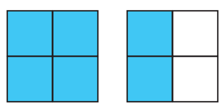
Să exersăm:



➢ Dreptunghiul alăturat a fost împărțit în 8 părți egale, dintre care:

- 5 părți sunt colorate, scriem $\frac{5}{8}$ și citim „5 pe 8” sau „5 supra 8”;
- 3 părți nu sunt colorate, scriem $\frac{3}{8}$ și citim „3 pe 8” sau „3 supra 8”.

➢ În desenul alăturat sunt două pătrate identice (doi întregi), fiecare fiind împărțit în câte 4 părți de aceeași mărime, dintre care au fost colorate 6. Scriem $\frac{6}{4}$ și citim „6 pe 4” sau „6 supra 4”.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

O pereche de numere naturale m și n, în care n este diferit de zero, scrisă sub forma $\frac{m}{n}$ se numește ***fracție***.

Linia orizontală care desparte cele două numere naturale se numește *linie de fracție*. Numărul n (de dedesubtul liniei de fracție) se numește ***numitorul fracției*** și ne arată în câte părți de mărimi egale a fost împărțit întregul. Numărul m (de deasupra liniei de fracție) se numește ***numărătorul fracției*** și ne arată câte părți egale au fost luate în considerare.

Să exersăm:

➢ În fracția $\frac{11}{23}$, numitorul ne arată că întregul a fost împărțit în 23 de părți egale, iar numărătorul că au fost luate în considerare 11 dintre acestea.

➢ Fracția $\frac{11}{11}$ ne arată că toate cele 11 părți egale în care a fost împărțit întregul au fost luate în considerare, deci tot întregul.

➢ La fracția $\frac{23}{11}$ observăm că întregul se împarte în 11 părți egale, dar considerăm 2 întregi (11 părți și încă 11 părți) și încă o parte din al treilea întreg $\left(\frac{11}{11}+\frac{11}{11}+\frac{1}{11}\right)$.

➢ Dacă împărțim întregul în 5 părți egale și luăm în considerare toate cele 5 părți obținute, vom scrie $\frac{5}{5}$, care reprezintă tot întregul. Dacă nu împărțim întregul în părți, considerăm că acesta este format dintr-o singură parte, iar întregul poate fi scris sub forma $\frac{1}{1}$. Doi întregi neîmpărțiți, luați împreună, reprezintă fracția $\frac{2}{1}$ (analog, pentru orice număr de întregi m, obținem fracția $\frac{m}{1}$).

➢ Observăm că numărătorul poate fi mai mic, egal sau mai mare decât numitorul.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fracțiile care au numărătorul egal cu numitorul se numesc ***fracții echiunitare***. Fracțiile care au numărătorul mai mic decât numitorul se numesc ***fracții subunitare***. Fracțiile care au numărătorul mai mare decât numitorul se numesc ***fracții supraunitare***.

Să exersăm:

➢ Fracțiile care au la numărător o cifră nenulă, iar la numitor au numărul 5 sunt:

subunitare	*echiunitare*	*supraunitare*
$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$

SĂ NE AMINTIM!

Dacă dintr-un întreg împărțit în 100 de părți egale luăm în considerare 25, scriem $\frac{25}{100}$ sau 25% și citim ***25 la sută***. În mod asemănător, atunci când luăm în considerare 50 de părți, scriem $\frac{50}{100}$ sau 50% și citim ***50 la sută***.

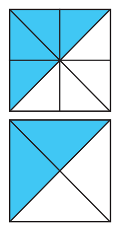
SĂ ÎNVĂȚĂM!

O fracție de forma $\frac{p}{100}$, în care p este un număr natural, se numește ***procentaj*** și se scrie sub forma $p\%$.

Să exersăm: $10\% = \frac{10}{100}$, iar $7\% = \frac{7}{100}$.

SĂ OBSERVĂM!

✓ În exemplele anterioare, întregul a fost scris sub forma fracției $\frac{11}{11}$, dar și sub forma fracției $\frac{5}{5}$. Deoarece cele două fracții reprezintă același lucru (adică un întreg), vom spune despre ele că sunt ***echivalente*** și vom scrie $\frac{11}{11} = \frac{5}{5}$.



✓ Părțile colorate din cei doi întregi sunt identice, dar în primul întreg este reprezentată fracția $\frac{4}{8}$, iar la al doilea întreg, fracția $\frac{2}{4}$. Putem astfel spune și despre fracțiile $\frac{4}{8}$ și $\frac{2}{4}$ că sunt ***echivalente*** și vom scrie $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$. Mai mult, observăm că $4 \cdot 4 = 8 \cdot 2$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Două fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt echivalente, scriem $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, dacă produsul $m \cdot q$ este egal cu produsul $n \cdot p$, n și q diferite de 0.

Să exersăm:

➢ Fracțiile $\frac{3}{6}$ și $\frac{7}{14}$ sunt **echivalente**, și vom scrie $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ pentru că $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{17}{10}, \frac{11}{11}$.

2. Reprezentați prin desene fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}$.

3. Desenați pe caiet un pătrat cu latura de 4 cm și hașurați $\frac{7}{8}$ din el. Scrieți fracția care reprezintă partea nehașurată.

4. Desenați pe caiet un dreptunghi cu lungimea de 6 cm și lățimea de 1 cm și hașurați $\frac{2}{6}$ din el. Scrieți două fracții care reprezintă partea nehașurată.

5. Scrieți toate fracțiile care se formează cu oricare două dintre numerele 5, 7, 9.

6. Considerăm șirul de fracții: $\frac{12}{7}, \frac{21}{31}, \frac{7}{15}, \frac{11}{43}, \frac{51}{51}, \frac{29}{17}, \frac{101}{101}, \frac{121}{212}$. Alegeți din șir fracțiile subunitare, echiunitare respectiv supraunitare.

7. Scrieți toate fracțiile care au numărătorul egal cu 3 și numitorii mai mici decât 6. Subliniați cu o linie fracțiile subunitare și cu 2 linii fracțiile supraunitare din șirul de fracții obținut. Ce fel de fracție este fracția rămasă nesubliniată?

8. Folosind numerele 3, 11, 21, 17 și 34 scrieți câte trei fracții supraunitare, echiunitare și subunitare.

9. Arătați că fracțiile sunt echivalente: a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{15}$; b) $\frac{2}{10}$ și $\frac{7}{35}$; c) $\frac{14}{21}$ și $\frac{2}{3}$.

10. Găsiți două fracții, echivalente cu $\frac{5}{7}$, care să aibă numărătorul de două cifre.

11. Determinați numărul natural n, astfel încât fracțiile $\frac{n}{7}$ și $\frac{6}{21}$ să fie echivalente.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

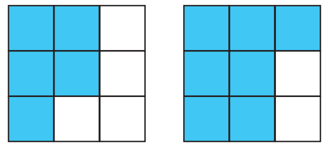
1. Considerăm toate fracțiile care au la numărător un număr natural, divizibil cu 3, mai mic decât 10, iar la numitor un număr prim de o cifră. Marcați diferit fracțiile subunitare, fracțiile echiunitare și respectiv fracțiile supraunitare.

2. Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții: a) sunt subunitare; b) au numitorul un număr mai mare decît 11 și mai mic decât 15; c) au numărător de forma $\overline{ab}$.

3. Oana împarte în mod egal un măr cu cei 5 frați ai săi, iar Raluca împarte în mod egal 2 mere cu cei 11 colegi. Oana și Raluca primesc părți egale de măr?

Compararea fracțiilor ordinare

SĂ NE AMINTIM!



✓ Fracția $\frac{5}{9}$ este mai mică decât fracția $\frac{7}{9}$ deoarece, din cele 9 părți în care am împărțit întregul, la prima fracție am luat în considerare 5 părți, mai puține decât cele 7 părți luate în considerare în cazul celei de a doua fracții.

✓ Fracția $\frac{5}{3}$ este mai mare decât fracția $\frac{5}{7}$ deoarece fiecare dintre cele 5 părți în care am împărțit întregul în cazul primei fracții este mai mare decât fiecare dintre cele 5 părți în care am împărțit întregul în cazul celei de-a doua fracții.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dintre două fracții cu același numitor, este mai mică fracția cu numărătorul mai mic: $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ dacă $a < b$, oricare ar fi numerele naturale a, b și numărul natural nenul n.

Dintre două fracții cu același numărător, este mai mică fracția cu numitorul mai mare: $\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$ dacă $a > b$, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b și numărul natural m.

Să exersăm:

➢ Comparați fracțiile: a) $\frac{14}{27}$ cu $\frac{21}{27}$; b) $\frac{17}{23}$ cu $\frac{17}{19}$.

Rezolvare:

a) $\frac{14}{27} < \frac{21}{27}$ pentru că $14 < 21$ și fracțiile au același numitor;

b) $\frac{17}{23} < \frac{17}{19}$ pentru că $23 > 19$ și fracțiile au același numărător.

➢ Dați exemplu de 3 valori pentru numărul natural x astfel încât $\frac{8}{15} > \frac{x}{15}$.

Rezolvare: Cele două fracții au același numitor, deci $8 > x$. Trei valori ale numărului x sunt, de exemplu, 4, 5 și 6.

➤ Ordonați crescător fracțiile: $\frac{5}{17}, \frac{19}{17}, \frac{12}{17}, \frac{3}{17}, \frac{43}{17}$.

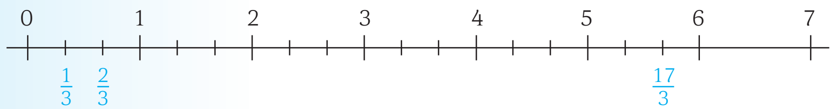
Rezolvare: Fracțiile au același numitor, deci ordinea lor crescătoare este dată de ordinea crescătoare a numărătorilor: $\frac{3}{17} < \frac{5}{17} < \frac{12}{17} < \frac{19}{17} < \frac{43}{17}$.

♦ Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor ordinare

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Am văzut în capitolele anterioare ce este o axă a numerelor și cum se reprezintă pe aceasta numerele naturale. După cum am stabilit deja, fiind dată o fracție $\frac{m}{n}$, numitorul acesteia ne arată în câte părți egale este împărțit întregul – respectiv n părți. Folosind același procedeu, împărțind fiecare unitate a axei numerelor în n părți egale, putem reprezenta fracția dată numărând m dintre aceste părți obținute.

De exemplu, dacă împărțim unitățile în 3 părți egale, reprezentăm fracția $\frac{1}{3}$ numărând o parte, fracția $\frac{2}{3}$ numărând două părți, fracția $\frac{17}{3}$ numărând 17 părți:



SĂ OBSERVĂM!

✓ Fracția $\frac{3}{3}$ corespunde pe axă numărului natural 1, fracția $\frac{6}{3}$ corespunde lui 2 și așa mai departe. Așadar, orice număr natural corespunde unei fracții de forma $\frac{m}{3}$, unde m este un multiplu de 3.

✓ La reprezentarea fracției $\frac{17}{3}$ observăm că am numărat 5 întregi, adică fracția $\frac{15}{3}$ și încă $\frac{2}{3}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Comparați fracțiile: a) $\frac{23}{51}$ cu $\frac{16}{51}$; b) $\frac{19}{117}$ cu $\frac{55}{117}$; c) $\frac{7}{11}$ cu $\frac{7}{15}$; d) $\frac{17}{56}$ cu $\frac{17}{65}$; e) $\frac{7}{97}$ cu $\frac{9}{97}$; f) $\frac{97}{7}$ cu $\frac{97}{9}$.

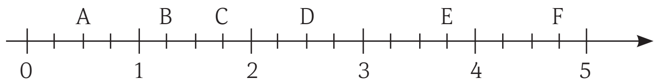
2. Ordonați crescător șirurile de fracții:

a) $\frac{15}{37}, \frac{9}{37}, \frac{7}{37}, \frac{23}{37}, \frac{19}{37}, \frac{11}{37}$; b) $\frac{29}{7}, \frac{29}{21}, \frac{29}{11}, \frac{29}{9}, \frac{29}{17}, \frac{29}{20}$.

3. Găsiți toate numerele naturale *x*, în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\frac{17}{23} < \frac{x}{23} < \frac{21}{23}$; b) $\frac{49}{71} < \frac{x+1}{71} < \frac{53}{71}$; c) $\frac{27}{45} < \frac{27}{x} < \frac{27}{41}$.

4. Citiți fracțiile ordinare corespunzătoare punctelor de pe axă și completați într-un tabel:



Punctul	A	B	C	D	E
Fracția					

5. Reprezentați pe o axă a numerelor fracțiile: $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{11}{5}, \frac{15}{5}$.

6. Folosind o axă a numerelor în care unitatea de măsură să fie 6 cm, reprezentați fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{8}{6}$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Determinați cea mai mare și cea mai mică fracție de forma:

a) $\frac{\overline{ab}}{23}$, unde $\overline{ab}$ este un număr par divizibil cu 3;

b) $\frac{23}{\overline{ab}}$, unde $\overline{ab}$ este un număr par divizibil cu 5.

2. Reprezentați pe axă fracțiile $\frac{5}{8}$ și $\frac{5}{3}$, apoi precizați cele două numere naturale consecutive între care se află fiecare fracție. Care fracție este mai aproape de 1?

Introducerea și scoaterea întregilor din fracție

SĂ NE AMINTIM!

În lecția anterioară am constatat că, pentru a reprezenta fracția $\frac{17}{3}$ pe axa numerelor, am parcurs 5 întregi și încă 2 din cele 3 părți, deci, fracția $\frac{17}{3}$ este formată din 5 întregi și $\frac{2}{3}$ și am putea spune că *am scos întregii din fracție*. Să observăm că $17 = 5 \cdot 3 + 2$ și deci 5 și 2 reprezintă câtul și respectiv restul împărțirii lui 17 la 3.

Pentru fracția $\frac{13}{5}$, împărțim 13 la 5 și obținem $13 = 5 \cdot \underset{\text{câtul}}{2} + \underset{\text{restul}}{3}$, adică scoatem 2 întregi din fracție și rămâne $\frac{3}{5}$. Scriem acest lucru sub forma $2\frac{3}{5}$ și citim „2 întregi și $\frac{3}{5}$".

SĂ ÎNVĂȚĂM!

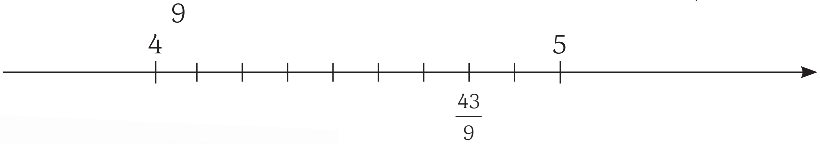
Fiind dată o fracție supraunitară de forma $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt numere naturale, iar n este nenul, aceasta se poate scrie sub forma $c\frac{r}{n}$, unde c și r reprezintă câtul și respectiv restul împărțirii lui m la n. Spunem că ***am scos întregii din fracție*** și scriem $\frac{m}{n} = c\frac{r}{n}$. Scrierea $c\frac{r}{n}$ se citește „c întregi și $\frac{r}{n}$."

Să exersăm:

➢ Pentru a scoate întregii din fracția $\frac{25}{8}$ efectuăm împărțirea lui 25 la 8, obținem câtul 3 și restul 1, deci $\frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

➢ Scoateți întregii din fracția $\frac{43}{9}$ și precizați între care două numere naturale consecutive este poziționată aceasta.

Rezolvare: Împărțind 43 la 9 obținem câtul 4 și restul 7. Deci $\frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}$, iar fracția $\frac{43}{9}$ cuprinde mai mult de 4 întregi, dar mai puțin decât 5, fracția $\frac{7}{9}$ fiind subunitară. Obținem astfel că $\frac{43}{9}$ este situată între numerele naturale 4 și 5.



SĂ OBSERVĂM!

✓ Fracția care rămâne după scoaterea întregilor din fracție este o fracție subunitară (restul este mai mic decât împărțitorul), lucru care ne poate ajuta în reprezentarea unei fracții supraunitare pe axa numerelor, sau la încadrarea acesteia între două numere naturale consecutive.

✓ Din regula împărțirii cu rest a numerelor naturale obținem $m = c \cdot n + r$, ceea ce ne permite să scriem $\frac{m}{n} = \frac{c \cdot n + r}{n}$ sau $c\frac{r}{n} = \frac{c \cdot n + r}{n}$. De exemplu $\frac{23}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 5}{6} = 3\frac{5}{6}$ sau $3\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{23}{6}$ (adică putem și să introducem întregi în fracții).

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fiind dată fracția $a\frac{b}{n}$, unde a, b și n sunt numere naturale, iar n este nenul, aceasta se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m = a \cdot n + b$. Spunem că ***am introdus întregii în fracție*** și scriem (mai direct) $a\frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b}{n}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelul pe caiete, apoi completați-l:

$\frac{11}{4}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{47}{11}$	$\frac{72}{15}$	$\frac{127}{19}$	$\frac{2157}{8}$	$\frac{3125}{37}$	$\frac{121232}{41}$
$2\frac{3}{4}$							

2. Introduceți întregii în fracție:

a) $2\frac{7}{11}$; b) $3\frac{11}{7}$; c) $11\frac{5}{6}$; d) $7\frac{15}{23}$; e) $101\frac{21}{8}$; f) $1001\frac{11}{12}$.

3. Precizați între care două numere naturale consecutive sunt situate fracțiile:

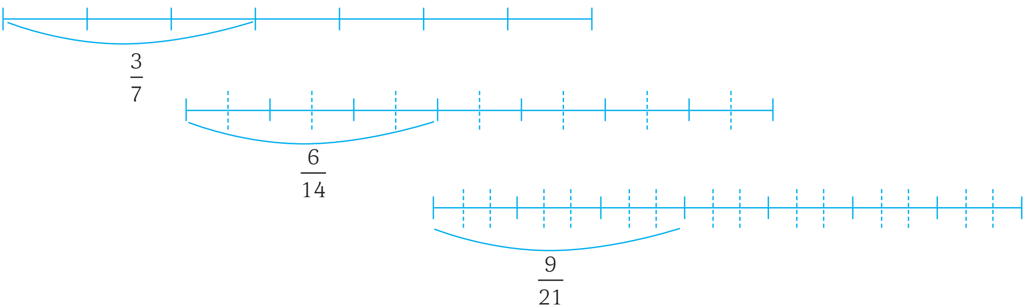
a) $\frac{19}{3}$; b) $\frac{37}{5}$; c) $\frac{39}{7}$; d) $\frac{56}{11}$.

4. Andreea trebuie să introducă întregii în fracția $15\frac{12}{7}$, iar Barbu în fracția $16\frac{5}{7}$. Ei constată că obțin aceeași fracție. Care este aceasta? Ei se hotărăsc să scoată întregii din fracția obținută, dar doar unul dintre ei obține numărul inițial. Cine?

Amplificarea fracțiilor

SĂ OBSERVĂM!

✓ Cum se transformă o fracție dacă dublăm (triplăm, înmulțim cu 4, ...) atât numărătorul cât și numitorul ei? De exemplu, fracția $\frac{3}{7}$ se transformă în fracția $\frac{6}{14}$, fracție echivalentă cu fracția inițială deoarece $3 \cdot 14 = 7 \cdot 6$. Dacă triplăm numărătorul și numitorul obținem $\frac{9}{21}$, fracție echivalentă și ea cu $\frac{3}{7}$ deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$.



✓ Acest lucru este valabil pentru orice fracție $\frac{m}{n}$ și orice număr $\boldsymbol{a}$ diferit de zero: fracția $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$ este echivalentă cu fracția $\frac{m}{n}$, deoarece $(a \cdot m) \cdot n = (a \cdot n) \cdot m$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

A amplifica o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a obține o nouă fracție prin înmulțirea numărătorului și a numitorului fracției date cu acel număr. Cele două fracții sunt echivalente. Acest lucru se scrie sub forma $^{a)}\frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{a \cdot n}$, unde numărul cu care am amplificat, $\boldsymbol{a}$, este număr natural nenul.

Să exersăm:

➢ Prin amplificarea fracției $\frac{7}{11}$ cu 4 obținem $^{4)}\frac{7}{11} = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 11} = \frac{28}{44}$.

➢ Numărătorul fracției obținute prin amplificarea cu 7 a fracției $\frac{13}{5}$ este 91, deoarece $7 \cdot 13 = 91$.

➤ Aflați **x**, dacă $^{11)}\frac{x}{8}=\frac{55}{88}$.

Rezolvare: $^{11)}\frac{x}{8}=\frac{11\cdot x}{11\cdot 8}$, atunci $\frac{11\cdot x}{11\cdot 8}=\frac{55}{88}$, deci $x = 5$.

➤ Cu ce număr a fost amplificată fracția $\frac{1}{5}$, dacă am obținut fracția $\frac{9}{45}$?

Rezolvare: A fost amplificată cu 9.

➤ Prin amplificarea unei fracții cu 5 obținem fracția $\frac{15}{35}$. Care este fracția inițială?

Rezolvare: $^{5)}\frac{a}{b}=\frac{5\cdot a}{5\cdot b}=\frac{15}{35}$, deci $5\cdot a = 15$ și $5\cdot b = 35$, adică $a = 3$ și $b = 7$. Fracția inițială este $\frac{3}{7}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Amplificați cu 3 următoarele fracții: $\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{7}{4},\frac{13}{21},\frac{75}{50},\frac{111}{80}$.

2. Amplificați fracția $\frac{5}{7}$ cu numerele: 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15.

3. Amplificați fracțiile $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{37}{25}$, $\frac{29}{50}$ pentru a obține o fracție cu numitorul 100.

4. Asociați o fracție de pe prima coloană cu un număr natural de pe a doua coloană astfel încât, prin amplificare, să obțineți una dintre fracțiile de pe a treia coloană.

$\frac{5}{3}$	2	$\frac{28}{44}$
$\frac{7}{11}$	3	$\frac{18}{24}$
$\frac{3}{4}$	4	$\frac{20}{25}$
$\frac{13}{15}$	5	$\frac{15}{9}$
$\frac{4}{5}$	6	$\frac{26}{30}$

Simplificarea fracțiilor

♦ Cel mai mare divizor comun a două numere naturale

SĂ NE AMINTIM!

În lecția *Divizibilitatea numerelor naturale* am văzut că două sau mai multe numere naturale au divizori comuni. De exemplu, divizorii numărului 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24, iar divizorii numărului 36 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 și 36. *Divizorii comuni* ai numerelor 24 și 36 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12, iar dintre aceștia, 12 este *cel mai mare*. Putem vorbi astfel despre numărul 12 ca fiind *cel mai mare divizor comun* al numerelor 24 și 36.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Cel mai mare divizor comun a două numere naturale nenule este cel mai mare număr natural care divide cele două numere.

Notăm *cel mai mare divizor comun* al numelor naturale ***a*** și ***b*** folosind prescurtarea *c.m.m.d.c* sau notația *(a, b)*.

Toți divizorii comuni ai numerelor ***a*** și ***b*** sunt divizori și ai *celui mai mare divizor comun* al numelor naturale ***a*** și ***b***.

Să exersăm:

➢ Am aflat că c.m.m.d.c. al numerelor 24 și 36 este 12, sau (24, 36) = 12. Divizorii comuni ai numerelor 24 și 36 sunt divizorii lui 12, adică 1, 2, 3 , 4, 6 și 12.

➢ Divizorii comuni ai numerelor 20 și 12 sunt 1, 2 și 4, deci (20, 12) = 4. Ca și în exemplul anterior, divizorii 1 și 2 sunt divizori ai lui 4.

➢ Numerele 15 și 16 au divizor comun doar pe 1, deci (15, 16) = 1.

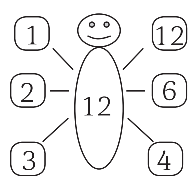
SĂ OBSERVĂM!

✓ Fie numerele 15 și 20. Cum (15, 20) = 5, putem spune că 5 divide cele două numere și scriem $15 = 5 \cdot 3$ și $20 = 5 \cdot 4$. Despre ceilalți doi factori observăm că (3, 4) = 1.

✓ Pentru 12 și 27, (12, 27) = 3, $12 = 3 \cdot 4$ și $27 = 3 \cdot 9$, iar (4, 9) = 1.

✓ Dacă notăm $(a, b) = d$, atunci numerele ***a*** și ***b*** se pot scrie $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, iar numerele ***x*** și ***y*** au $(x, y) = 1$.

✓ Despre numerele care au cel mai mare divizor comun pe 1 se mai spune că sunt *prime între ele*.



SĂ OBSERVĂM!

Împărțind numărătorul și numitorul fracției $\frac{15}{35}$ cu 5 obținem $\frac{3}{7}$, echivalentă cu fracția $\frac{15}{35}$. Așa cum spunem că fracția $\frac{15}{35}$ s-a obținut prin amplificarea cu 5 a fracției $\frac{3}{7}$, putem spune și că fracția $\frac{3}{7}$ se obține prin simplificarea cu 5 a fracției $\frac{15}{35}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

A simplifica o fracție printr-un număr natural nenul înseamnă a obține o nouă fracție prin împărțirea numărătorului și a numitorului cu acel număr. Simplificarea unei fracții se face printr-un divizor comun al numărătorului și numitorului fracției. Cele două fracții sunt echivalente.

Acest lucru se scrie sub forma $\frac{m}{n}^{(a} = \frac{m:a}{n:a}$, unde numărul prin care am simplificat, a este număr natural nenul, divizor comun al numerelor m și n.

Să exersăm:

- Prin simplificarea cu 4 a fracției $\frac{12}{20}$ obținem $\frac{12}{20}^{(4} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$.
- Realizați toate simplificările posibile ale fracției $\frac{18}{12}$.

Rezolvare: Divizorii comuni diferiți de 1 (dacă simplificăm prin 1 fracția nu se schimbă) ai numerelor 18 și 12 sunt 2, 3 și 6. Obținem: $\frac{18}{12}^{(2} = \frac{18:2}{12:2} = \frac{9}{6}$, $\frac{18}{12}^{(3} = \frac{18:3}{12:3} = \frac{6}{4}$ sau $\frac{18}{12}^{(6} = \frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}$ (fracție care nu se mai poate simplifica).

- Simplificați fracția $\frac{20}{28}$ prin cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului. Se mai poate simplifica fracția obținută?

Rezolvare: Pentru numerele 20 și 28, (20, 28) = 4. Simplificăm, $\frac{20}{28}^{(4} = \frac{5}{7}$ și, cum numerele 5 și 7 nu au divizori comuni diferiți de 1, fracția $\frac{5}{7}$ nu se mai poate simplifica.

- Considerăm fracția $3\frac{12}{16}$. Introduceți întregii în fracție și simplificați fracția obținută. Scoateți întregii din fracția obținută. Ce observați?

Rezolvare: $3\frac{12}{14}=\frac{3\cdot 14+12}{14}=\frac{54}{14}^{(2}=\frac{27}{7}=3\frac{6}{7}$. Observăm că $\frac{12}{14}^{(2}=\frac{6}{7}$, deci am putea face această simplificare și astfel: $3\frac{12}{14}^{(2}=3\frac{6}{7}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

O fracție care nu se mai poate simplifica se numește ***fracție ireductibilă***.

O fracție $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă cel mai mare divizor comun al lui m și n este 1.

Să exersăm:

➤ Simplificați $\frac{60}{80}$ pentru a obține o fracție ireductibilă.

Rezolvare: Împărțind 60 și 80 prin (60, 80) = 20 obținem numerele 3 și 4, pentru care (3, 4) = 1. Simplificăm astfel: $\frac{60}{80}^{(20}=\frac{3}{4}$ și obținem o fracție ireductibilă.

Putem să facem și următorul șir de simplificări: $\frac{60}{80}^{(2}=\frac{30}{40}^{(2}=\frac{15}{20}^{(5}=\frac{3}{4}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați c.m.m.d.c. pentru fiecare pereche de numere:

numere	4 și 12	8 și 16	9 și 18	15 și 30	25 și 75
c.m.m.d.c.	4	...	...	...	...

2. Simplificați: a) prin 2, fracțiile: $\frac{4}{10},\frac{12}{8},\frac{24}{38},\frac{36}{44},\frac{200}{400}$; b) prin 3, fracțiile: $\frac{6}{9},\frac{12}{27},\frac{21}{18},\frac{30}{42},\frac{120}{300}$; c) prin 5, fracțiile: $\frac{15}{20},\frac{30}{45},\frac{35}{10},\frac{50}{75},\frac{100}{200}$.

3. Obțineți fracții ireductibile prin simplificare: $\frac{4}{12},\frac{18}{12},\frac{36}{24},\frac{20}{30},\frac{28}{42},4\frac{30}{45},2\frac{44}{66}$, $1\frac{52}{78}$. Pentru fracțiile care conțin întregi, realizați simplificarea prin două metode.

4. Ce fracție trebuie amplificată pentru a obține $\frac{32}{48}$? Câte răspunsuri are întrebarea?

5. Aflați fracțiile de forma următoare și realizați simplificările: a) $\frac{\overline{5a}}{14}$, se simplifică prin 2; b) $\frac{\overline{2b}}{45}$, se simplifică prin 5; c) $\frac{\overline{2c}}{30}$, se simplifică.

Aducerea fracţiilor la un numitor comun

SĂ NE AMINTIM!

Am văzut în lecțiile anterioare cum se compară fracțiile care au același numitor. În clasa a IV-a am învățat cum se adună două fracții care au același numitor. Dar nu toate fracțiile au același numitor. Acum, dacă am învățat cum se *transformă* fracțiile, prin *amplificare* sau *simplificare*, în fracții echivalente, putem să trecem la un nou nivel în ceea ce privește fracțiile, *aducerea lor la un numitor comun*.

Să exersăm:

➤ Considerăm fracțiile $\frac{12}{30}$ și $\frac{7}{15}$. Prin simplificarea $\frac{12}{30}^{(2} = \frac{12:2}{30:2} = \frac{6}{15}$ am adus cele două fracții la numitorul comun 15.

➤ Fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{7}{8}$ ar putea avea numărul 8 ca numitor comun. Prin amplificarea ${}^{2)}\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{6}{8}$ am adus cele două fracții la un numitor comun.

Numitori diferiți	Același numitor
$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$
${}^{3)}\frac{3}{5}$	$\frac{9}{15}$

Numitori diferiți	Același numitor
${}^{9)}\frac{5}{8}$	$\frac{45}{72}$
${}^{8)}\frac{7}{9}$	$\frac{56}{72}$

Numitori diferiți	Același numitor (amplificări diferite)	
$\frac{11}{15}$	$\frac{110}{150}$	$\frac{22}{30}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{105}{150}$	$\frac{21}{30}$

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fiind date două fracții cu numitori diferiți, modalitatea prin care obținem două fracții cu același numitor, echivalente cu fracțiile date, se numește *aducerea la un numitor comun* sau *aducerea la același numitor*.

Două fracții se pot *aduce la „diverși” numitori comuni*.

Numitorul comun a două fracții este, de cele mai multe ori, un *multiplu comun* al numitorilor celor două fracții.

♦ Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

SĂ NE AMINTIM!

✓ Orice număr natural are multipli și orice două numere naturale nenule au multipli comuni.

✓ Multiplii numărului 16 sunt: 0, 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, ...; multiplii numărului 12 sunt: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...; multiplii comuni ai celor două numere sunt: 0, 48, 96, ... Dintre multiplii comuni nenuli ai numerelor 16 și 12, 48 este cel mai mic. Putem spune despre 48 că este *cel mai mic multiplu comun* al numerelor 16 și 12, diferit de 0, și vom nota [16, 12] = 48.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale nenule este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care se divide cu cele două numere.

Notăm *cel mai mic multiplu comun* al numelor naturale ***a*** și ***b*** folosind prescurtarea *c.m.m.m.c*. sau notația [*a, b*].

Multiplii comuni ai numerelor ***a*** și ***b*** sunt multipli ***ai celui mai mic multiplu comun*** al numelor naturale ***a*** și ***b*** .

SĂ OBSERVĂM!

✓ Atunci când vorbim despre c.m.m.m.c. a două numere ne referim la cel mai mic dintre multiplii comuni diferiți de zero.

✓ Găsirea celui mai mic multiplu comun a două numere este utilă în determinarea celui mai mic numitor comun pentru două fracții.

Să exersăm:

Să găsim c.m.m.m.c. prin diverse *metode:*

➢ În exemplul de mai sus, dar și la *Divizibilitatea numerelor naturale,* am văzut că putem scrie șirurile de multipli ale celor două numere până găsim *primul* multiplu comun nenul.

➢ Tot la *Divizibilitatea numerelor naturale* am mai exersat o *metodă*: alegem cel mai mare dintre numere și scriem multiplii lui în ordine crescătoare (înmulțind numărul cu 2, 3, 4, ...) până găsim un număr care este și multiplu al celuilalt număr. Acesta este c.m.m.m.c. al celor două numere.

Să exemplificăm, calculând [20, 12]. Multiplicând 20 obținem 40 (nu este multiplu al lui 12), 60 (este un multiplu al lui 12), deci [20, 12] = 60.

➤ O altă *metodă* se bazează pe c.m.m.d.c. al celor două numere:

Numerele date	Pasul I (calculul c.m.m.d.c.)	Pasul II (descompunerea)	Pasul III (calculul c.m.m.m.c)
12 și 20	$(12, 20) = 4$	$12 = 4 \cdot 3$ și $20 = 4 \cdot 5$	$[12, 20] = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
15 și 25	$(15, 25) = 5$	$15 = 5 \cdot 3$ și $25 = 5 \cdot 5$	$[15, 25] = 5 \cdot 3 \cdot 5 = 75$
3 și 5	$(3, 5) = 1$	$3 = 1 \cdot 3$ și $5 = 1 \cdot 5$	$[3, 5] = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$

Mai general:

• dacă $(a, b) = d$, $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, atunci $[a, b] = d \cdot x \cdot y$

• dacă două numere au cel mai mare divizor comun egal cu 1, atunci ele au cel mai mic multiplu comun egal cu produsul lor.

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru următoarele perechi de numere:

a) 4 și 12; 8 și 16; 9 și 18; 15 și 30; 25 și 75;

b) 10 și 15; 6 și 9; 14 și 21; 22 și 33; 9 și 15;

c) 5 și 6; 11 și 8; 12 și 7; 4 și 9; 6 și 25.

2. Aduceți la un numitor comun următoarele perechi de fracții:

a) $\frac{1}{6}$ și $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$ și $\frac{2}{9}$; $\frac{9}{11}$ și $\frac{11}{9}$;

b) $\frac{3}{8}$ și $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{16}$ și $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{15}$ și $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{7}$ și $\frac{11}{21}$; $\frac{9}{10}$ și $\frac{27}{30}$;

c) $\frac{7}{9}$ și $\frac{11}{6}$; $\frac{5}{12}$ și $\frac{17}{20}$; $\frac{23}{8}$ și $\frac{7}{10}$; $\frac{13}{20}$ și $\frac{14}{25}$; $\frac{23}{35}$ și $\frac{17}{49}$;

d) $\frac{32}{28}$ și $\frac{15}{21}$; $\frac{15}{50}$ și $\frac{9}{30}$; $\frac{21}{18}$ și $\frac{20}{24}$; $\frac{5}{20}$ și $\frac{18}{24}$; $\frac{20}{32}$ și $\frac{15}{40}$.

Indicație: la punctul d) realizați aducerea la un numitor comun prin simplificări.

3. Folosind aducerea la un numitor comun, comparați perechile de fracții:

a) $\frac{1}{12}$ și $\frac{5}{16}$; b) $\frac{5}{8}$ și $\frac{6}{12}$; c) $\frac{7}{12}$ și $\frac{15}{20}$; d) $\frac{11}{12}$ și $\frac{6}{18}$; e) $\frac{3}{20}$ și $\frac{2}{30}$.

4. Matei citește în prima zi $\frac{4}{9}$ dintr-o carte și a doua zi $\frac{1}{3}$ din aceeași carte. În care zi a citit mai multe pagini?

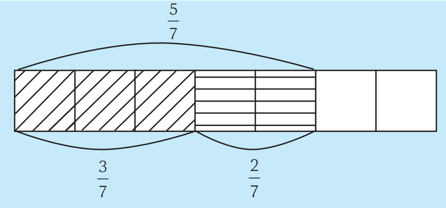
5. Într-o dimineață, Andreea a băut $\frac{4}{5}$ din paharul ei de lapte, iar Bogdan a băut $\frac{5}{7}$ din paharul lui. Cine a băut mai mult lapte (cei doi au pahare identice)?

Adunarea şi scăderea fracţiilor

Fracţii cu acelaşi numitor

SĂ NE AMINTIM!

✓ În desenul alăturat este reprezentat un întreg împărțit în 7 părți egale, dintre care 3 părți sunt hașurate oblic, 2 părți sunt hașurate orizontal, iar restul întregului este nehașurat. Cele două zone hașurate sunt formate din părți de aceeași mărime, deci pot fi puse



împreună și formează 5 părți din cele 7: $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$. Observăm că numărătorul 5 al ***sumei*** $\frac{5}{7}$ este suma numărătorilor celor doi ***termeni*** ai sumei, $\frac{3}{7}$ și $\frac{2}{7}$, și exprimăm acest lucru sub forma $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}$. Partea nehașurată reprezintă 2 părți și se obține înlăturând 5 părți din cele 7 (câte are tot întregul): $\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{7-5}{7}=\frac{2}{7}$.

Mai general, orice două fracții cu același numitor sunt formate din părți de aceeași mărime, părți care pot fi puse împreună formând o nouă fracție. Din orice fracție pot să înlătur părți, obținând o fracție mai mică.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Suma a două fracții cu același numitor este fracția al cărei numărător este suma numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții. Scriem acest lucru sub forma $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$; fracțiile $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$ se numesc ***termenii sumei***, iar fracția $\frac{a+b}{n}$ (rezultatul adunării) se numește ***suma celor două fracții.***

Diferența a două fracții cu același numitor, prima fracție fiind mai mare sau egală cu a doua, este fracția al cărei numărător este diferența numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții.

Pentru fracțiile $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$, cu $\frac{a}{n}\geq\frac{b}{n}$, diferența o scriem $\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$; fracția $\frac{a}{n}$ (din care se scade) se numește ***descăzut***, fracția $\frac{b}{n}$ (care se scade) se numește ***scăzător***, iar fracția $\frac{a-b}{n}$ (rezultatul scăderii) se numește ***diferență***.

Să exersăm:

- $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4+2}{9}=\frac{6}{9}$; $\frac{17}{33}+\frac{11}{33}=\frac{28}{33}$; $\frac{5}{13}+\frac{3}{13}+\frac{4}{13}=\frac{8}{13}+\frac{4}{13}=\frac{12}{13}$;
- $\frac{13}{8}-\frac{7}{8}=\frac{6}{8}$; $\frac{42}{33}-\frac{17}{33}=\frac{25}{33}$; $\frac{9}{17}+\frac{15}{17}-\frac{20}{17}=\frac{24}{17}-\frac{20}{17}=\frac{4}{17}$.

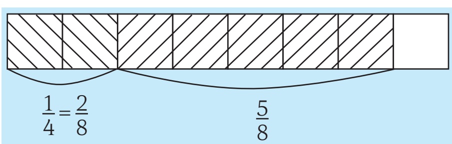
Fracţii cu numitori diferiţi

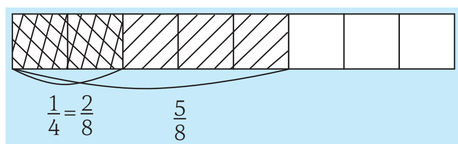
După cum am mai discutat, nu orice două fracții au același numitor, dar ele pot fi aduse la un numitor comun. Acest lucru este util la adunarea sau scăderea a două fracții care au numitori diferiți.

SĂ OBSERVĂM!

Să considerăm fracțiile $\frac{5}{8}$ și $\frac{1}{4}$ și să calculăm ***suma*** și ***diferența*** lor. Pentru că nu putem aduna ***sferturi*** cu ***optimi***, vom aduce cele două fracții la un numitor comun, realizând acest lucru în două moduri diferite:

1. Fracția $\frac{1}{4}$ este echivalentă cu fracția $\frac{2}{8}$, deci putem spune că $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$ și $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$ (observăm că am adus cele două fracții la numitorul comun 8).





2. Folosind numitorul 32 obținem, pentru sumă ${}^{4)}\frac{5}{8}+{}^{8)}\frac{1}{4}=\frac{20}{32}+\frac{8}{32}=\frac{28}{32}^{(4}=\frac{7}{8}$, iar pentru diferență ${}^{4)}\frac{5}{8}-{}^{8)}\frac{1}{4}=\frac{20}{32}-\frac{8}{32}=\frac{12}{32}^{(4}=\frac{3}{8}$. Observăm că, oricare ar fi numitorul comun folosit, suma și respectiv diferența celor două fracții este aceeași.

Așadar:

- $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$, unde $\frac{5}{8}$ și $\frac{1}{4}$ sunt *termenii sumei*, iar $\frac{7}{8}$ este *suma celor două fracții*;
- $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$, unde $\frac{5}{8}$ este *descăzutul*, $\frac{1}{4}$ este *scăzătorul*, iar $\frac{3}{8}$ este *diferența celor două fracții*.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a aduna/scădea două fracții care au numitori diferiți nenuli, parcurgem următorii pași:

- aducem cele două fracții la același numitor;
- adunăm/scădem cele două fracții folosind metoda adunării/scăderii fracțiilor cu același numitor;
- aducem fracția obținută la forma sa ireductibilă.

Să exersăm:

- ${}^{2)}\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$; $\quad \frac{11}{21}+{}^{3)}\frac{5}{7}=\frac{11}{21}+\frac{15}{21}=\frac{26}{21}$; $\quad {}^{2)}\frac{3}{5}+{}^{5)}\frac{1}{2}=\frac{6}{10}+\frac{5}{10}=\frac{11}{10}$;
- ${}^{2)}\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$; $\quad \frac{17}{20}-{}^{5)}\frac{3}{4}=\frac{17}{20}-\frac{15}{20}=\frac{2}{20}$; $\quad {}^{2)}\frac{3}{5}-{}^{5)}\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}=\frac{1}{10}$;
- $\frac{6}{14}^{(2}+\frac{5}{7}=\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}$; $\quad \frac{8}{10}^{(2}+\frac{2}{5}-\frac{9}{15}^{(3}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$.

Introducerea întregilor în fracție cu ajutorul adunării:

- $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3}$ $\quad$ sau $\quad 2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}={}^{3)}\frac{2}{1}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$;
- $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}=\frac{17}{5}+\frac{11}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$ $\quad$ sau $\quad 3\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}=3+\frac{2}{5}+2+\frac{1}{5}=5+\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Efectuați: a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$; c) $\frac{8}{15}+\frac{14}{15}$; d) $\frac{3}{17}+\frac{2}{17}+\frac{5}{17}$; e) $\frac{4}{35}+\frac{12}{35}+\frac{7}{35}$.

2. Efectuați: a) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$; b) $\frac{9}{11}-\frac{2}{11}$; c) $\frac{23}{25}-\frac{11}{25}$; d) $\frac{29}{43}-\frac{7}{43}-\frac{5}{43}$; e) $\frac{15}{17}-\frac{12}{17}-\frac{1}{17}$.

3. Efectuați și simplificați fracțiile obținute (dacă este necesar): a) $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}-\frac{3}{8}$;
b) $\frac{7}{18}-\frac{2}{18}+\frac{4}{18}$; c) $\frac{19}{24}+\frac{21}{24}-\frac{4}{24}$; d) $\frac{24}{35}-\frac{7}{35}+\frac{18}{35}$; e) $\frac{17}{20}+\frac{13}{20}-\frac{10}{20}$.

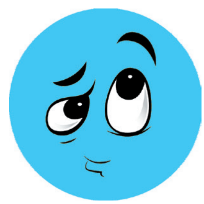
4. Efectuați calculele necesare completării tabelului următor:

a	b	c	$a+b$	$b-c$	$(a+b)-c$	$a+(b-c)$	$a-(b-c)$	$a-b-c$	$a-b+c$
$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$							
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$							
$\frac{17}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{4}{11}$							
$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{18}$							
$\frac{27}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{10}{20}$							
$\frac{21}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{4}{24}$							

5. Efectuați și simplificați fracțiile obținute (dacă este necesar):

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{4}$; $\frac{5}{3}+\frac{8}{9}$; $\frac{6}{12}+\frac{5}{6}$; $\frac{7}{18}+\frac{4}{9}+\frac{5}{2}$; $\frac{9}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$;

b) $\frac{11}{6}-\frac{3}{2}$; $\frac{17}{10}-\frac{4}{5}$; $\frac{5}{7}-\frac{3}{14}$; $\frac{30}{18}-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$; $\frac{40}{24}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$;



c) $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$; $\frac{11}{13}+\frac{11}{12}$; $\frac{1}{4}-\frac{2}{9}$; $\frac{7}{10}-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{9}{5}$;

d) $\frac{4}{9}+\frac{1}{6}$; $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$; $\frac{11}{20}+\frac{3}{8}$; $\frac{9}{20}+\frac{5}{12}$; $\frac{9}{24}+\frac{7}{16}+\frac{5}{8}$;

e) $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}-\frac{7}{10}$; $\frac{17}{20}-\frac{11}{30}$; $\frac{27}{45}-\frac{13}{30}$; $\frac{8}{9}+\frac{17}{18}-\frac{6}{27}$.

6. Calculați și scrieți rezultatul obținut după scoaterea întregilor din fracție:

a) $5\frac{2}{5}+3\frac{3}{10}$; $2\frac{3}{4}+3\frac{7}{8}$; $7\frac{2}{3}+3\frac{5}{9}$; $11\frac{1}{2}+5\frac{3}{8}$;

b) $3\frac{2}{5}-2\frac{7}{15}$; $4\frac{5}{6}-2\frac{11}{12}$; $5\frac{4}{15}-2\frac{2}{3}$; $7\frac{2}{7}-\frac{30}{7}$.

7. Ioana vrea să citească o carte. În prima zi citește $\frac{5}{9}$ din carte, în a doua zi cu $\frac{1}{3}$ mai puțin decât în prima și restul în a treia zi. Ce parte din carte citește în a treia zi?

Înmulţirea fracţiilor ordinare

Înmulţirea unei fracţii cu un număr natural

SĂ OBSERVĂM!

La fel ca la numerele naturale, considerăm produsul dintre o fracție și un număr natural ca o adunare repetată. Astfel, prin $\frac{3}{7}\cdot 2$ vom înțelege $\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3+3}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul unei fracții cu un număr natural este o fracție care are ca numărător produsul dintre numărătorul fracției și numărul natural, iar ca numitor, numitorul fracției date. Așadar, produsul fracției $\frac{m}{n}$ cu numărul natural a este fracția $\frac{m\cdot a}{n}$; scriem acest lucru sub forma $\frac{m}{n}\cdot a=\frac{m\cdot a}{n}$, n diferit de 0.

Să exersăm:

➢ $\frac{4}{7}\cdot 5=\frac{4\cdot 5}{7}=\frac{20}{7}$; $6\cdot\frac{2}{5}=\frac{6\cdot 2}{5}=\frac{12}{5}$; $\frac{7}{5}\cdot 10=\frac{7\cdot 10}{5}=\frac{70}{5}^{(5}=\frac{14}{1}=14$.

Înmulţirea a două fracţii

SĂ OBSERVĂM!

Jumătate din jumătate înseamnă un sfert $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\right)$. Jumătate dintr-o treime înseamnă o șesime $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\right)$. Jumătate dintr-un sfert înseamnă o optime $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\right)$. O treime dintr-o cincime este o cincisprezecime $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\right)$.

Cu alte cuvinte, $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{n\cdot q}$, pentru n și q numere naturale nenule.

Dacă jumătate dintr-un sfert înseamnă o optime, atunci jumătate din trei sferturi înseamnă trei optimi $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\right)$. Cinci jumătăți din trei sferturi înseamnă de cinci ori trei optimi, adică cincisprezece optimi $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul a două fracții este o fracție care are ca numărător produsul numărătorilor celor două fracții, iar ca numitor produsul numitorilor acestora. Așadar, produsul fracțiilor $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ (n și q nenuli) este fracția $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$; scriem acest lucru sub forma $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$. Fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ se numesc ***factorii*** produsului, iar fracția $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$ (rezultatul înmulțirii) se numește ***produsul celor două fracții***.

Într-un exercițiu fără paranteze se efectuează întâi înmulțirile, în ordinea de la stânga la dreapta, apoi adunările și scăderile.

Să exersăm:

➢ $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$; $\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{3}=\frac{6\cdot 7}{11\cdot 3}=\frac{42}{33}^{(3}=\frac{14}{11}$; $\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}=\frac{5\cdot 9}{6\cdot 10}=\frac{45}{60}^{(15}=\frac{3}{4}$.

Se recomandă ca rezultatul înmulțirii să fie adus la forma ireductibilă:

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{6\cdot 7}{5\cdot 2}^{(2}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 1}=\frac{21}{5}$$

(am făcut simplificarea prin împărțirea numerelor 6 și 2 la 2, fără să calculăm cele două produse)

$$\frac{{}^{3}\cancel{6}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{2}_{1}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{1}=\frac{21}{5}$$

(am făcut simplificarea numerelor 6 și 2 prin tăiere, iar lângă numerele tăiate am scris câturile împărțirii celor două numere la 2)

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{12}=\frac{8\cdot 5}{15\cdot 12}=\frac{40}{180}^{(20}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{12}_{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

(am simplificat 8 și 12 prin 4, iar 15 și 5 prin 5 și am evidențiat cele 2 simplificări prin *tăieri* pe direcții diferite).

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l:

a	3	7	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	14	2	$3\frac{2}{5}$	6	$2\frac{1}{7}$	8
b	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	11	14	$\frac{5}{21}$	$2\frac{1}{3}$	6	$5\frac{2}{4}$	4	$2\frac{3}{16}$
$a\cdot b$										

2. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

$\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{18}$; $\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{16}$; $\frac{20}{7}\cdot\frac{49}{30}$; $\frac{5}{21}\cdot\frac{14}{15}$; $\frac{25}{16}\cdot\frac{8}{15}$.

3. Copiați tabelul pe caiete și apoi completați-l:

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot a$	$b \cdot c$	$(a \cdot b) \cdot c$	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot b \cdot c$
$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{14}$						
$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{3}{4}$						
$\frac{2^2}{3^3}$	$\frac{9}{2^3}$	$\frac{6}{5}$						
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{5}$	$\frac{7}{24}$						

4. Calculați, respectând ordinea operațiilor:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}$; c) $\left(\frac{5}{6}+\frac{19}{24}\right)\cdot\frac{24}{13}$;

d) $\frac{18}{13}\cdot\left(\frac{10}{9}+\frac{1}{3}\right)$; e) $\frac{12}{35}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)$; f) $\frac{21}{8}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{15}$.

5. Pentru a prepara saramura necesară unui butoi de varză se amestecă 30 litri de apă cu $1\frac{1}{20}$ kg de sare. Ce cantități sunt necesare pentru a prepara saramura pentru 5 butoaie de varză? Cât va cântări saramura pentru cele 5 butoaie? (Un litru de apă cântărește 1 kg)

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}$; b) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)$;

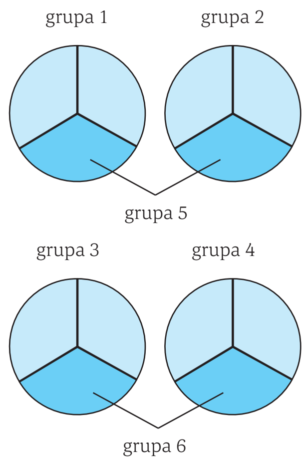
c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)$; d) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{49}\right)$.

Împărțirea fracțiilor ordinare

SĂ OBSERVĂM!

✓ Pentru a împărți un număr natural ***a*** la un număr natural ***b*** trebuie să aflăm *de câte ori se cuprinde* numărul ***b*** în numărul ***a***. De exemplu, pentru a împărți 12 la 2, grupăm cei 12 întregi în grupe de câte 2 și numărăm câte grupe s-au format.

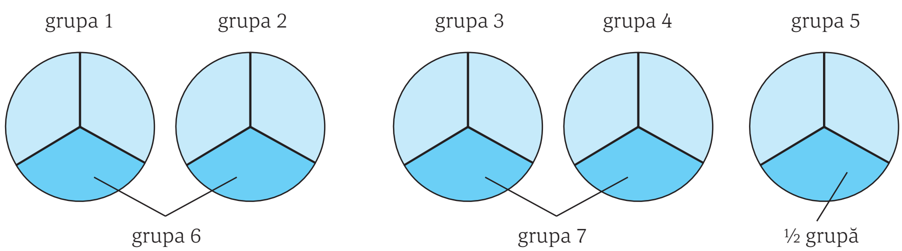
✓ Pentru a realiza împărțirea $4:\frac{2}{3}$ trebuie să aflăm *de câte ori se cuprinde* $\frac{2}{3}$ în 4. Luăm patru întregi și îi împărțim în câte 3 părți egale (vrem să obținem treimi) și obținem $4 \cdot 3 = 12$ părți egale. Formăm grupe de câte două astfel de părți. Obținem 12 (părți) : 2 = 6 (grupe). Deci $\frac{2}{3}$ se cuprinde în 4 de 6 ori, sau $4:\frac{2}{3}=6$, și am obținut acest rezultat prin calculul $4 \cdot 3 : 2$, adică $4\cdot\frac{3}{2}$.



Putem deci afirma că $4:\frac{2}{3}=4\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=\frac{12}{2}=6$. Fracția $\frac{3}{2}$ se numește ***inversa*** fracției $\frac{2}{3}$.

✓ La împărțirea lui 5 la $\frac{2}{3}$ se obțin 7 grupe și jumătate, adică $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$.

Obținem și de data aceasta: $5:\frac{2}{3}=5\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{2}$.



În ambele situații, am înmulțit numărul natural cu *inversa fracției*.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Inversa fracției $\frac{p}{q}$, *p* și *q* diferite de 0, este fracția $\frac{q}{p}$.

Câtul a două fracții, a doua fiind diferită de 0, este egal cu produsul dintre prima fracție și inversa celei de-a doua. Scriem acest lucru sub forma $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}$, unde $\frac{m}{n}$ (n nenul) se numește ***deîmpărțit***, $\frac{p}{q}$ este diferit de 0 și se numește ***împărțitor***, iar rezultatul împărțirii se numește ***cât***.

Să exersăm:

➢ Inversa fracției $\frac{8}{5}$ este $\frac{5}{8}$; inversa lui $\frac{4}{9}$ este $\frac{9}{4}$; inversa lui $\frac{1}{7}$ este $\frac{7}{1}$, adică numărul natural 7; inversul numărului natural 5 este $\frac{1}{5}$.

➢ $\frac{12}{25}:\frac{8}{5}=\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{8}=\frac{60}{200}^{(20}=\frac{3}{10}$; $\frac{10}{27}:\frac{4}{9}=\frac{\cancel{10}^{5}}{_{3}\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{4}_{2}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați tabelul în caiete și apoi completați-l:

a	3	4	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{11}$	10	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{18}{35}$
b	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{3}$	9	8	$3\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{25}$
inversa lui b										
$a:b$										

2. Calculați, respectând ordinea operațiilor:

a) $\frac{12}{25}\cdot\frac{20}{27}:\frac{16}{15}$; b) $\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{12}\right):\frac{34}{27}$; c) $\frac{12}{11}\cdot\frac{33}{30}-\frac{10}{9}:\frac{20}{21}$; d) $\left(\frac{4}{15}-\frac{3}{20}\right):\frac{49}{30}$;

e) $\frac{14}{15}:\frac{10}{21}\cdot\frac{45}{16}$; f) $\frac{12}{15}+\frac{16}{25}:\frac{8}{10}$; g) $2\frac{5}{12}-4\frac{1}{12}:3\frac{8}{9}$; h) $\left(\frac{7}{6}+\frac{7}{8}\right):\left(1\frac{7}{18}-\frac{5}{12}\right)$.

3. Ana înmulțește fracția $\frac{5}{6}$ cu fracția $\frac{2}{3}$, iar Nadia împarte fracția $\frac{5}{6}$ la fracția $\frac{2}{3}$. Cine obține o fracție mai mare? Comparați cele două fracții obținute cu fracția inițială.

Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

Fie fracția $\frac{2}{3}$. Produsul $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ reprezintă înmulțirea fracției cu ea însăși. Scriem acest lucru $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ și citim „$\frac{2}{3}$ la puterea a doua” sau „$\frac{2}{3}$ la pătrat”. Produsul $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ se scrie sub forma $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, care se citește „$\frac{2}{3}$ la puterea a treia” sau „$\frac{2}{3}$ la cub”. Scriem $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ și citim „$\frac{2}{3}$ la puterea a patra” și reprezintă produsul $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$. Putem calcula astfel orice ***putere*** a fracției $\frac{2}{3}$, adică $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$, folosind n factori.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fie $\frac{a}{b}$ o fracție nenulă și n un număr natural, $n\neq 0$ și $n\neq 1$. Puterea a n–a a fracției $\frac{a}{b}$ se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ și reprezintă produsul $\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ factori}}$. Fracția $\frac{a}{b}$ se numește ***baza puterii,*** iar numărul natural n se numește ***exponentul puterii***.

Ca și la numerele naturale, admitem și aici faptul că $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$ (orice fracție nenulă la puterea 0 este egală cu 1) și $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$, b diferit de 0.

Să exersăm:

- $\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}=\left(\frac{5}{3}\right)^4$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$;
- $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 4}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{5\cdot 5\cdot 5}=\frac{4^3}{5^3}=\frac{64}{125}$;
- $\frac{7}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{9}+\frac{4}{9}=\frac{11}{9}$; $\frac{3}{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}^{(4}=\frac{1}{2}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru fracția nenulă $\frac{a}{b}$ și numărul natural nenul n, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (pentru *a ridica fracția* $\frac{a}{b}$ *la puterea* n ridicăm numărătorul și numitorul la puterea n).

Să exersăm:

$\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$	$\frac{32}{243}$	aplicarea definiției	$\frac{256}{625}$	$=\left(\frac{4}{5}\right)^4$
	$\frac{2^5}{3^5}$	aplicarea regulei	$\frac{4^4}{5^4}$	

SĂ OBSERVĂM:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2}$;
- $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\right) : \left(\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2}$;
- $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{3^3}{5^3}\right)^2 = \frac{\left(3^3\right)^2}{\left(5^3\right)^2} = \frac{3^6}{5^6} = \left(\frac{3}{5}\right)^6$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Produsul puterilor aceleiași fracții este puterea acelei fracții care are ca exponent suma exponenților factorilor. Adică, dacă m și n sunt numere naturale, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$, unde b nenul.

Câtul puterilor aceleiași fracții, exponentul deîmpărțitului fiind mai mare sau egal decât exponentul împărțitorului, este puterea acelei fracții care are ca exponent diferența dintre exponentul deîmpărțitului și exponentul împărțitorului. Adică, dacă m și n sunt numere naturale, $m \geqslant n$, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$, unde b nenul.

Puterea unei puteri a unei fracții este puterea acelei fracții care are ca exponent produsul exponenților. Adică, dacă ***m*** și ***n*** sunt numere naturale, atunci $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$, unde b nenul.

Să exersăm:

➢ $\left(\frac{2}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^{7+4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{11}$; $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4=\left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot 4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$;

➢ $\left(\frac{2}{5}\right)^7:\left(\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^{7-4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{11}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^6:\left(\frac{2}{5}\right)^{13}=\left(\frac{2}{5}\right)^{11+6-13}=\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați: a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; c) $\left(\frac{8}{9}\right)^1$; d) $\left(\frac{11}{9}\right)^0$; e) $\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{25}$; g) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot 10-\frac{7}{15}$; h) $\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^1+\left(\frac{1}{10}\right)^0$.

3. Calculați, scriind rezultatul sub forma unei puteri:

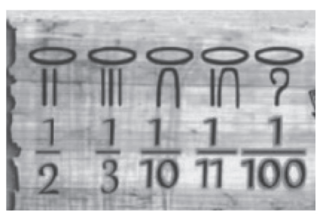
a) $\left(\frac{5}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^4$; b) $\left(\frac{7}{11}\right)^{15}:\left(\frac{7}{11}\right)^7$; c) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)^4\right]^3$; d) $\left(\frac{5}{12}\right)^{4^3}$.

4. Calculați, scriind rezultatul sub forma unei puteri: a) $\left(\frac{5}{8}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^7:\left(\frac{5}{8}\right)^8$;

b) $\left[\left(\frac{8}{7}\right)^5\right]^4:\left(\frac{8}{7}\right)^{10}$; c) $\left[\left(\frac{11}{9}\right)^6\cdot\left(\frac{11}{9}\right)^5\right]^3:\left(\frac{11}{9}\right)^{22}$; d) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\right]^5-\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$.

Știați că ...

Egiptenii foloseau, în urmă cu aproximativ 4000 de ani, fracții cu numărătorul 1 (fracții alicote). Pentru scriere foloseau o hieroglifă formată dintr-un oval cu semne sub el.



Fracţii/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracţie ordinară

SĂ OBSERVĂM!

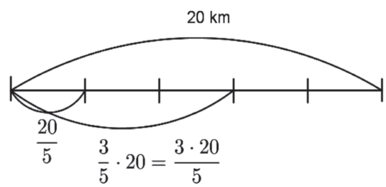
Ce ar însemna să calculăm $\frac{3}{5}$ din numărul 20? Am putea să gândim pe două direcții:

- Avem de-a face cu 20 de unități, iar din fiecare dintre acestea luăm câte $\frac{3}{5}$ pe care le punem împreună. Calculăm, de fapt, $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{3}{5}$ (20 de termeni) sau $\frac{3}{5}\cdot 20$.

- Pe de altă parte, am putea să gândim numărul 20 ca un întreg. Ar putea fi mai simplu dacă am exprima prin următoarea problemă cerința noastră:

Un alergător participă la un semimaraton cu lungimea de 20 km. El a parcurs $\frac{3}{5}$ din această distanță în 2 ore. Câți km a parcurs alergătorul?

Rezolvare: Reprezentăm lungimea semimaratonului printr-un segment, pe care îl împărțim în 5 părți de lungimi egale. O parte va avea lungimea $20:5=20\cdot\frac{1}{5}=\frac{20}{5}$ = 4 km, iar 3 părți vor avea lungimea: $3\cdot\frac{20}{5}=\frac{3\cdot 20}{5}=12$ km. Constatăm astfel că, pentru a afla $\frac{3}{5}$ din 20, înmulțim pe $\frac{3}{5}$ cu 20.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural înmulțim fracția cu numărul.

Să exersăm:

➢ $\frac{4}{7}$ din $21=\frac{4}{7}\cdot 21=\frac{4\cdot 21^{(7}}{7}=\frac{4\cdot 3}{1}=12$; $\frac{7}{4}$ din $16=\frac{7}{4}\cdot 16=\frac{7\cdot 16^{(4}}{4}=\frac{7\cdot 4}{1}=28$.

➢ 20% dintre cei 25 de elevi ai unei clase se pregătesc pentru un spectacol. Care este numărul acestora?

Rezolvare: 20% din 25 se calculează astfel: $\frac{20}{100}\cdot 25=\frac{20\cdot 25}{100}=\frac{500}{100}=5$, așadar 5 elevi se pregătesc pentru spectacol.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

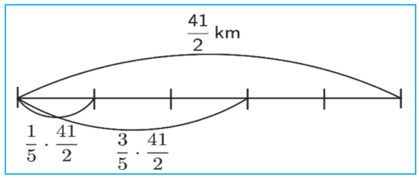
Pentru a afla $p\%$ dintr-un număr natural a calculăm $\frac{p}{100}$ din a, adică $\frac{p\cdot a}{100}$.

Să exersăm:

- 15% din 120 se calculează astfel: $\frac{15}{100}\cdot 120=\frac{1800}{100}=18$.

SĂ OBSERVĂM!

Să reluăm problema cu alergătorul care participă la semimaraton, schimbând însă lungimea traseului cu un număr care nu este număr natural. Să presupunem că ar avea de parcurs 20 km și jumătate, adică $20\frac{1}{2}=\frac{41}{2}$ km. A cincea parte din segment va avea lungimea $\frac{41}{2}:5=\frac{41}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{41}{2\cdot 5}$, iar 3 părți vor fi egale cu $3\cdot\frac{41}{2\cdot 5}=\frac{3\cdot 41}{2\cdot 5}=\frac{123}{10}$ km ($12\frac{3}{10}$ km, adică 12 km și 300 de metri).



Constatăm că, pentru a afla $\frac{3}{5}$ din fracția $\frac{41}{2}$ înmulțim cele două fracții.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a afla o fracție dintr-o fracție înmulțim cele două fracții.

Să exersăm:

- $\frac{5}{8}$ din $\frac{12}{5}=\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{5}=\frac{5\cdot 12}{8\cdot 5}^{(5}=\frac{12}{8}^{(4}=\frac{3}{2}$; $\frac{6}{7}$ din $\frac{14}{5}=\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{5}=\frac{84}{35}^{(7}=\frac{12}{5}$.

Știați că...

Maratonul este o probă sportivă de alergare pe distanță lungă, cu o distanță oficială de 42,195 km, care se aleargă de obicei pe șosea. Evenimentul este numit după *legenda soldatului grec Phidippides*, un mesager care a adus la Atena vestea victoriei din Bătălia de la Maraton. Semimaratonul are lungimea aproximativă de 20 km.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați pe caiete tabelul și apoi completați-l:

$\frac{5}{4}$ din 20 m	$\frac{4}{5}$ din 25 kg	$\frac{11}{20}$ din 100 cm	$\frac{7}{12}$ din 60 km	$\frac{4}{7}$ din 840 lei

2. Calculați 15% din: a) 60 m; b) 80 *l*; c) 200 lei; d) 700 km; e) 400.

3. Calculați: a) 20% din 70; b) 14% din 250; c) 34% din 2700; d) 110% din 80.

4. Calculați suma dintre 30% din 70 și 25% din 40.

5. Calculați: a) $\frac{5}{9}$ din $\frac{27}{10}$ m; b) $\frac{1}{6}$ din 12 h; c) $\frac{5}{7}$ din $3\frac{1}{2}$ km; d) $\frac{3}{5}$ din $\frac{5}{6}$; e) $\frac{1}{4}$ din $\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{2}$ din $\frac{4}{5}$; g) $\frac{5}{2}$ din $\frac{2}{5}$.

6. Am cheltuit la magazin 45 de lei, sumă care reprezintă $\frac{3}{4}$ din suma pe care o aveam la mine. Ce sumă am avut?

Rezolvare: $\frac{3}{4}$ din sumă reprezintă 45 de lei, deci $\frac{1}{4}$ din sumă reprezintă $45 : 3 = \frac{45}{3}$ (adică 15 lei). Suma întreagă este $\frac{45}{3}\cdot 4 = \frac{45\cdot 4}{3} = 60$ (lei).

$$\left(\frac{45\cdot 4}{3} = 45\cdot\frac{4}{3} = 45 : \frac{3}{4}\right)$$

Se poate observa că, pentru a afla un număr atunci când cunoaștem o fracție din el împărțim numărul cunoscut la fracția respectivă.

7. Aflați un număr, știind că:

a) $\frac{2}{5}$ din el este 8; b) $\frac{4}{3}$ din el este 80; c) $\frac{5}{6}$ din el este 100.

8. Aflați un număr, știind că 16% din el este egal cu 48.

9. Un biciclist a parcurs în două zile o distanță de 60 km. În prima zi el a parcurs $\frac{2}{3}$ din distanță. Câți kilometri a parcurs în fiecare dintre cele două zile?

10. Prețul unui atlas este 120 de lei. El se ieftinește cu 20% din preț. Cu ce valoare se ieftinește atlasul și care va fi prețul acestuia după ieftinire?

11. Producția de grâu la hectar (adică cantitatea medie de grâu care se recoltează de pe un hectar de pământ) pentru anul 2016 a fost de, aproximativ, 3800 kg. În anul 2017 s-a realizat o creștere a producției cu 5%. Câte kilograme de grâu reprezintă producția pentru anul 2017?

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Desenați un cerc. Puneți în evidență $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ respectiv $\frac{1}{8}$ din el, fără ca aceste părți să se suprapună. Ce parte din cerc rămâne neevidențiată?

2. Reprezentați prin desene diferite fracțiile: $\frac{5}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{9}{3}$.

3. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt echiunitare:

a) $\frac{x}{7}$; b) $\frac{x-1}{23}$; c) $\frac{13}{x+2}$; d) $\frac{2x}{24}$; e) $\frac{17}{2x+1}$.

4. Considerăm fracția $\frac{x+5}{17}$. Precizați câte trei valori ale numărului x pentru care fracția este subunitară și respectiv supraunitară.

5. Dintre toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime de o cifră, alegeți pe cele subunitare, supraunitare, respectiv echiunuitare.

6. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a este un divizor al lui 15, iar b este divizor al lui 21. Identificați dintre acestea perechile de fracții echivalente.

7. Arătați că fracțiile sunt echivalente: a) $\frac{2}{5}$ cu $\frac{6}{15}$; b) $\frac{3}{4}$ cu $\frac{15}{20}$; c) $\frac{4}{12}$ cu $\frac{7}{21}$.

8. Completați spațiile goale, astfel încât să aibă loc echivalențele:

a) $\frac{1}{7}=\frac{3}{\ldots}$; b) $\frac{3}{5}=\frac{\ldots}{10}$; c) $\frac{25}{\ldots}=\frac{5}{6}$; d) $\frac{\ldots}{48}=\frac{2}{8}$; e) $\frac{11}{\ldots}=\frac{55}{30}$;

f) $\frac{8}{24}=\frac{10}{\ldots}$; g) $\frac{12}{16}=\frac{15}{\ldots}$; h) $\frac{10}{15}=\frac{\ldots}{12}$; i) $\frac{10}{\ldots}=\frac{14}{35}$; j) $\frac{\ldots}{14}=\frac{9}{21}$.

9. Comparați fracțiile:

a) $\frac{7}{15}$ cu $\frac{9}{15}$; $\frac{16}{23}$ cu $\frac{11}{23}$; $\frac{9}{5}$ cu $\frac{9}{7}$; $\frac{17}{25}$ cu $\frac{17}{11}$;

b) $\frac{5}{8}$ cu $\frac{9}{16}$; $\frac{23}{24}$ cu $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{9}$ cu $\frac{17}{36}$; $\frac{19}{42}$ cu $\frac{4}{7}$;

c) $\frac{10}{11}$ cu $\frac{5}{6}$; $\frac{18}{17}$ cu $\frac{9}{8}$; $\frac{30}{32}$ cu $\frac{10}{11}$; $\frac{18}{23}$ cu $\frac{27}{31}$;

d) $\frac{15}{4}$ cu 3; 7 cu $\frac{53}{7}$; $3\frac{3}{5}$ cu $4\frac{2}{3}$; $5\frac{4}{9}$ cu $\frac{30}{7}$.

10. Ordonați crescător șirurile de fracții: a) $\frac{17}{25}; \frac{8}{25}; \frac{4}{25}; \frac{21}{25}; \frac{37}{25}; \frac{14}{25}$;

b) $\frac{43}{17}; \frac{43}{53}; \frac{43}{13}; \frac{43}{21}; \frac{43}{8}; \frac{43}{23}$; c) $\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{17}{16}; \frac{26}{32}; \frac{14}{16}; 1$; d) $\frac{1}{2}; \frac{10}{17}; \frac{5}{11}; \frac{4}{9}; \frac{20}{18}; \frac{2}{5}$.

11. Scrieți 3 fracții cuprinse între: a) $\frac{7}{10}$ și $\frac{14}{15}$; b) $\frac{9}{14}$ și $\frac{25}{28}$; c) $\frac{7}{10}$ și $\frac{4}{5}$.

12. Ordonați crescător țările din tabelul următor, după suprafața împădurită raportată la suprafața totală:

Țara	Franța	România	Elveția	Rusia	Danemarca	Finlanda	Turcia
$\frac{\text{suprafață pădure}}{\text{suprafață totală}}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{20}$

13. Aflați cel mai mare număr natural mai mic decât: a) $\frac{42}{5}$; b) $\frac{73}{7}$; c) $\frac{108}{11}$.

14. Aflați cel mai mic număr natural mai mare decât: a) $\frac{47}{6}$; b) $\frac{87}{7}$; c) $\frac{114}{12}$.

15. Scrieți două fracții cu numitorul 7 poziționate între numerele naturale 4 și 5.

16. Scrieți o fracție cu numărătorul 33 poziționată între numerele naturale 6 și 7.

17. Așezați între două numere naturale consecutive fracțiile: $\frac{23}{3}; \frac{27}{4}; \frac{28}{5}; \frac{25}{3}; \frac{19}{2}$.

18. Calculați:

a) $\left(\frac{7}{8}+\frac{9}{8}\right)\cdot 5-2^2$; $3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)-1$; $5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right)\cdot 5$;

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$; $\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{3}-\frac{11}{12}\right)\cdot 3-15^0$;

c) $3\frac{7}{22}-2\frac{5}{33}$; $2\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{30}$; $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{12}-\frac{23}{24}\right)\cdot\frac{3}{5}+1\frac{3}{10}$;

d) $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{6}+\frac{7}{18}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)$; $\left(\frac{1}{6}+\frac{17}{8}\right):\frac{33}{8}+\frac{4}{9}$;

e) $\left(\frac{11}{12}-\frac{13}{18}\right):1\frac{5}{9}$; $\left(\frac{13}{12}-\frac{7}{15}\right):\frac{37}{20}+3\frac{2}{3}$; $\left(\frac{37}{30}-\frac{3}{4}\right):\frac{29}{30}-\left(2\frac{5}{8}-1\frac{3}{4}\right):3\frac{1}{2}$.

19. O persoană are la bancă suma de 4800 lei. Ea scoate într-o zi $\frac{3}{5}$ din această sumă, iar după o săptămână încă $\frac{1}{3}$ din rest. Cu ce sumă rămâne în bancă?

20. Într-un depozit sunt $23\frac{2}{5}$ tone de cereale. Într-o zi se vinde $\frac{5}{9}$ din cantitate. Explicați, fără a calcula cantitățile, de ce în depozit rămâne o cantitate de cereale mai mică decât cea vândută. Calculați cantitatea rămasă în depozit.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{5a}}{\overline{a4}}$, unde a este cifră impară, și comparați numărul fracțiilor supraunitare cu cel al fracțiilor subunitare. Explicați de ce nu există astfel de fracții echiunitare.

2. Determinați numărul fracțiilor echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}+3}{\overline{ba}+12}$.

3. Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{2a+3b}{13}$ este echiunitară.

4. Găsiți perechile de fracții echivalente: $\frac{9}{39}; \frac{12}{9}; \frac{3}{13}; \frac{21}{6}; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}; \frac{77}{56}; \frac{10}{8}; \frac{11}{8}; \frac{7}{2}$.

5. Găsiți în următoarele șiruri fracția care nu este echivalentă cu celelalte:

a) $\frac{6}{36}; \frac{1}{6}; \frac{4}{24}; \frac{10}{60}; \frac{2}{14}; \frac{7}{42}; \frac{3}{18}$;   b) $\frac{50}{40}; \frac{35}{28}; \frac{20}{16}; \frac{6}{4}; \frac{15}{12}; \frac{25}{20}$.

6. Calculați:

a) $\frac{1}{63}+\frac{2}{63}+\frac{3}{63}+\ldots+\frac{35}{63}$;   b) $\frac{5}{24}+\frac{10}{24}+\frac{15}{24}+\ldots+\frac{75}{24}$.

c) $\frac{21}{61}+\frac{22}{61}+\frac{23}{61}+\ldots+\frac{40}{61}$;   d) $\frac{140}{71}-\frac{139}{71}+\frac{138}{71}-\frac{137}{71}+\ldots+\frac{2}{71}-\frac{1}{71}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Câte fracții subunitare sunt în șirul $\frac{1}{5}; \frac{3}{7}; \frac{11}{6}; \frac{23}{24}; \frac{17}{9}; \frac{53}{53}; \frac{31}{30}; \frac{44}{44}; \frac{57}{63}; \frac{63}{57}$?

a) 1;   b) 2;   c) 3;   d) 4.

2. Fracția echivalentă cu $\frac{7}{5}$ este fracția:

a) $\frac{14}{15}$;   b) $\frac{21}{10}$;   c) $\frac{28}{18}$;   d) $\frac{35}{25}$.

3. După simplificarea cu 5, fracția $\frac{60}{45}$ devine:

a) $\frac{12}{9}$;   b) $\frac{20}{9}$;   c) $\frac{12}{15}$;   d) $\frac{4}{5}$.

4. Între fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$ se află fracția:

a) $\frac{5}{12}$;   b) $\frac{7}{12}$;   c) $\frac{9}{12}$;   d) $\frac{11}{12}$.

5. Rezultatul calculului $2\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{12}+\frac{11}{12}\right)$ este:

a) $\frac{10}{12}$; b) $\frac{13}{12}$; c) $\frac{11}{12}$; d) $\frac{43}{12}$.

6. Rezultatul calculului $\frac{5}{12}:\frac{25}{9}+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{4}{6}-\frac{8}{18}\right)$ este:

a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $\frac{11}{20}$; d) $\frac{2}{5}$.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 2p, 2p, 2p; 1 p din oficiu.

Testul 2

1. Aflați valorile lui a și b știind că $\frac{3}{7}=\frac{a}{21}$ și $\frac{b+1}{3}=\frac{4}{6}$.

2. Aduceți fracțiile $\frac{7}{12}$ și $\frac{11}{18}$ la un numitor comun și comparați-le.

3. Simplificați fracțiile $\frac{72}{108}$ și $\frac{250}{350}$ până la forma lor ireductibilă.

4. Calculați:

a) $\frac{14}{15}-\frac{2}{15}+\frac{17}{20}-\frac{7}{20}$; b) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}+\frac{3}{14}+\frac{5}{14}$;

c) $\frac{8}{15}\cdot\left(\frac{15}{16}:\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)$; d) $\frac{9}{10}:\left[\left(3\frac{5}{8}-1\frac{3}{8}\right):2\frac{1}{2}\right]$.

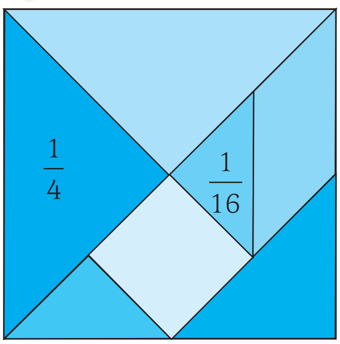
5. Un telefon costă 600 de lei. Se face o ieftinire a acestuia cu 10% din valoarea lui.

a) Arătați că prețul telefonului după ieftinire este 540 de lei.

b) După un timp, telefonul se scumpește cu 10% din preț. Aflați noul preț.

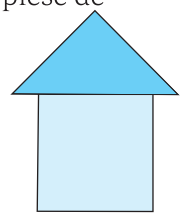
Punctaj: 1p; 1,5p; 1,5p; 3p; 2p; 1p din oficiu.

PROIECT:



Reproduceți desenul pe un carton și decupați cele 7 părți. Scrieți pe fiecare dintre acestea ce fracție din întreg reprezintă.

Desenul alăturat este format din două piese de tangram $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$:

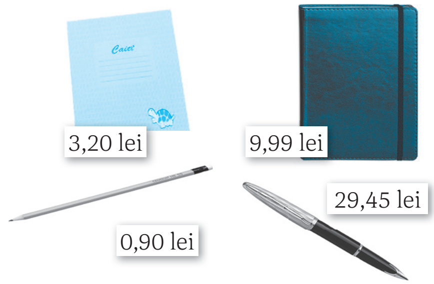


Reprezintă fracțiile $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{16}$ cu ajutorul a două piese de tangram

FRACŢII ZECIMALE

Fracţii zecimale

Mara merge împreună cu mama la librărie pentru cumpărături. Mama îi cere să calculeze cât trebuie să plătească pentru 8 caiete, 5 creioane, 1 agendă și 1 stilou. Mara nu poate însă calcula, pentru că nu a învățat nimic despre aceste numere.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Aceste numere reprezintă fracții zecimale.

O fracție zecimală este formată din două părți despărțite de o virgulă:

• partea întreagă, aflată la stânga virgulei;

• partea zecimală, aflată la dreapta virgulei (cifrele de după virgulă se numesc zecimale).

Fracția ordinară $\frac{1}{10}$ se citește ***o zecime*** și se scrie sub forma 0,1; fracția $\frac{3}{10}$ reprezintă *3* ***zecimi*** și se scrie sub forma 0,3. Prima cifră din dreapta virgulei se numește ***zecime***.

Fracția ordinară $\frac{1}{100}$ se citește ***o sutime*** și se scrie sub forma 0,01; fracția $\frac{3}{100}$ reprezintă *3* ***sutimi*** și se scrie sub forma 0,03. A doua cifră din dreapta virgulei se numește ***sutime***.

Fracția ordinară $\frac{1}{1000}$ se citește ***o miime*** și se scrie sub forma 0,001; fracția $\frac{3}{1000}$ reprezintă *3* ***miimi*** și se scrie sub forma 0,003. A treia cifră din dreapta virgulei se numește ***miime***.

A patra cifră din dreapta virgulei se numește ***zecime de miime*** ș.a.m.d. pentru următoarele cifre.

Să exersăm:

➢ La fracția zecimală 9523,706 partea întreagă este 9523 (formată din 9 mii, 5 sute, 2 zeci și 3 unități), fiind număr natural. Partea sa zecimală este formată din 7 zecimi, 0 sutimi și 6 miimi și citim „9523 virgulă 706” sau „nouă mii cinci sute douăzeci și trei întregi și șapte sute șase miimi”.

➢ Partea întreagă a fracției 47,00513 este numărul natural 47, iar partea sa zecimală are 0 zecimi, 0 sutimi, 5 miimi, 1 zecime de miime și 3 sutimi de miimi. Se citește „47 întregi și cinci sute treisprezece sutimi de miimi”.

➢ Fracția 2,3 are 2 întregi și 3 zecimi. Trei zecimi sunt egale cu 30 de sutimi sau cu 300 de miimi, deci fracția 2,3 este egală cu fracția 2,30 sau cu fracția 2,300.

➢ Fracția 12,450 are 12 întregi și 450 de miimi. Cele 450 de miimi sunt egale cu 45 de sutimi, deoarece zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior, deci 12,450 = 12,45.

➢ Fracția 58,0 are partea zecimală nulă, deci reprezintă, de fapt, numărul 58 (adică 58,0 = 58). Numărul 1989 se poate scrie ca fracția zecimală 1989,00.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La o fracție zecimală, după ultima zecimală nenulă putem adăuga oricâte zerouri, iar fracția își păstrează valoarea.

Dacă ultimele zecimale din scrierea unei fracții zecimale sunt egale cu zero, atunci ele pot fi eliminate, iar fracția își păstrează valoarea.

Dacă toate cifrele părții zecimale a unei fracții zecimale sunt egale cu zero, atunci putem scrie doar partea întreagă, fără zerouri și fără virgulă.

Orice număr natural se poate scrie ca o fracție zecimală, adăugând în dreapta lui o virgulă după care vom pune oricâte zerouri sunt necesare.

Să exersăm:

Șaptesprezece zecimi, $\frac{17}{10}$, reprezintă 1 întreg (10 zecimi) și încă 7 zecimi, deci $\frac{17}{10}=1,7$. Douăzeci și șapte de sutimi se pot scrie $\frac{27}{100}=0,27$. La 327 de sutimi vom lua 300 de sutimi, care formează 3 întregi și încă 27 de sutimi, deci $\frac{327}{100}=3,27$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă o fracție ordinară are numitorul o putere a lui 10, ea se transformă în fracție zecimală punând o virgulă la numărul de la numărător astfel încât fracția zecimală obținută să aibă numărul de zecimale egal cu exponentul lui 10 de la numitor. Dacă este necesar, completăm cu zerouri în fața numărului.

Să exersăm:

➢ $\frac{56}{10}=5,6$ (o zecimală, așa cum numitorul 10 are o singură cifră zero) ;
$\frac{7}{100}=0,07$ (2 zecimale pentru că $100=10^2$); $\frac{23}{10000}=0,0023$; $\frac{11}{10^6}=0,000011$.

➤ Copiați tabelul în caiete și completați-l:

$\frac{18}{10}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{1142}{100}$	$\frac{782}{10000}$	$\frac{12}{10^8}$	$\frac{254}{10}$	$\frac{897}{100}$	$\frac{2}{1000}$	$\frac{212}{10000}$	$\frac{12564}{10^3}$
1,8									

➤ Numărul 0,25 se citește „25 de sutimi”, deci se poate scrie $0{,}25=\frac{25}{100}$. Numărul 2,85 se citește „2 întregi și 85 de sutimi”, deci se poate scrie $2{,}85=2\frac{85}{100}=\frac{285}{100}$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a transforma o fracție zecimală (cu un număr finit de zecimale) în fracție ordinară scriem la numărător numărul natural obținut din fracția zecimală căreia i-am „șters” virgula, iar la numitor scriem acea putere a lui 10 care are ca exponent numărul de zecimale al fracției zecimale inițiale.

Să exersăm:

➤ $1{,}25=\frac{125}{100}$ și, dacă efectuăm simplificările, obținem: $1{,}25=\frac{125}{100}^{(25}=\frac{5}{4}$; $0{,}75=\frac{75}{100}^{(25}=\frac{3}{4}$ (simplificăm fracțiile ordinare până când devin ireductibile).

➤ Copiați tabelul în caiete și completați-l după modelul din prima coloană:

0,8	1,6	0,25	11,04	0,125	3,256	0,008	1,106	0,10205
$\frac{8}{10}^{(2}=\frac{4}{5}$								

PROBLEME PROPUSE:

1. Găsiți în mediul înconjurător situații sau locuri unde întâlniți fracții zecimale.

2. Dintre următoarele fracții zecimale: 3,14; 2,0001; 0,002; 91,000; 5604; 0,63581, care au partea întreagă nulă? Care dintre acestea sunt numere naturale?

3. Scrieți o fracție zecimală în care partea înteagă să aibă 5 cifre, iar partea zecimală să aibă 6 cifre dintre care ultima să fie nenulă. Numiți apoi fiecare cifră, în funcție de poziția ei în cadrul fracției.

4. Transformați în fracții ordinare ireductibile: a) 0,12; b) 4,5; c) 6,05; d) 200,32.

5. Completați: a) $6{,}5=\frac{65}{\square}$; b) $4{,}75=\frac{\square}{100}$; c) $0{,}016=\frac{\square}{125}$; d) $0{,}225=\frac{9}{\square}$.

Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Putem compara 37,81 cu 56,01 transformându-le în fracții ordinare: $37{,}81 = \frac{3781}{100}$, $56{,}01 = \frac{5601}{100}$, de unde rezultă că $37{,}81 < 56{,}01$.

Putem însă compara și direct: am cumpărat un tricou care a costat 34,25 lei (adică 34 de lei și 25 de bani) și unul care a costat 29,75 lei (adică 29 de lei și 75 de bani); mai ieftin a fost cel de 29,75 lei deoarece 29 < 34.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Când comparăm două fracții zecimale comparăm mai întâi părțile lor întregi și, dacă acestea sunt diferite, este mai mare fracția care are partea întreagă mai mare. Dacă părțile întregi sunt egale, comparăm părțile lor zecimale, după ce am adăugat zerouri pentru a obține același număr de zecimale.

Să exersăm:

- Dintre fracțiile 567,28 și 557,99 este mai mare prima pentru că $567 > 557$.
- Să comparăm 45,9 cu 45,3861. Cum părțile întregi sunt egale, comparăm părțile lor zecimale, dar nu pe 9 cu 3861, ci pe 9000 cu 3861. Evident, 9000 > 3861 deci 45,9 > 45,3861.

SĂ NE AMINTIM!

A ordona crescător un șir de numere înseamnă a le așeza de la cel mai mic la cel mai mare, iar ***descrescător***, de la cel mai mare la cel mai mic.

De exemplu:

fracții în ordine aleatoare	5,63	3,6	5,62	4,28	3,57	2,99	8,1
fracții în ordine crescătoare	2,99	3,57	3,6	4,28	5,62	5,63	8,1

Să exersăm:

- Ordonați descrescător fracțiile: 1,23; 3,4; 2,15; 1,1; 2,09; 3,04; 1,589; 1.

Rezolvare: 3,4; 3,04; 2,15; 2,09; 1,589; 1,23; 1,1; 1.

- Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între 3,21 și 3,22.

Rezolvare: Deoarece $3{,}21 = 3{,}210$ și $3{,}22 = 3{,}220$, se observă imediat fracții cuprinse între 3,210 și 3,220. De exemplu: 3,215; 3,217 și 3,219.

♦ Aproximări

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Nu întotdeauna avem nevoie de valorile exacte ale unor mărimi, de multe ori fiind suficiente valorile lor *aproximative*.

De exemplu, distanța dintre două orașe se măsoară între centrele lor. Însă un om spune 22,5 km, altul spune 21,8 km, deci putem aproxima la 22 km.

Ca și la numere naturale, există aproximări prin adaos și prin lipsă.

Să exersăm:

Fracția zecimală	Aproximare prin adaos la ...				Aproximare prin lipsă la...			
	întreg	zecime	sutime	miime	întreg	zecime	sutime	miime
12,2765	13	12,3	12,28	12,277	12	12,2	12,27	12,276
0,01325	1	0,1	0,02	0,014	0	0	0,01	0,013

➢ Să rotunjim 108,377 la cea mai apropiată:

sută	zece	unitate/ întreg	zecime	sutime
100	110	108	108,4	108,38

♦ Reprezentarea pe axa numerelor a fracţiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

SĂ NE AMINTIM!

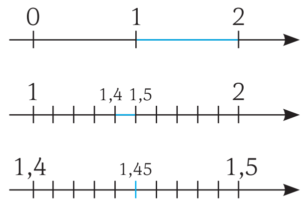
Ca și în cazul ***axei numerelor naturale***, și la ***axa numerelor zecimale*** vorbim despre ansamblul format din ***direcție***, ***sens***, ***origine*** și ***unitate de măsură***.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Uneori, reprezentarea pe axă a fracțiilor zecimale se face folosind aproximări ale acestora, în special dacă numărul de zecimale este mare.

De exemplu, vrem să reprezentăm pe axă fracția 1,45, situată între 1,40 și 1,50, adică între 1,4 și 1,5. Vom reprezenta întâi, luând o unitate mare, numerele 1 și 2;

apoi ne imaginăm că a doua axă desenată este, de fapt, tot prima, dar privită prin „lupă” și marcăm diviziunile care reprezintă fracțiile cu o zecimală cuprinse între 1 și 2; al treilea desen reprezintă axa privită printr-o „lupă” și mai puternică, unde observăm doar porțiunea dintre 1,4 și 1,5; în această porțiune se află 1,45.



Să exersăm:

➤ Să reprezentăm pe axă numărul 7,35.

Rezolvare: Reprezentăm pe axă numerele 7 și 8; între ele reprezentăm fracțiile 7,1; 7,2; 7,3; ...; 7,9. Separat, folosind „o lupă” și mai puternică, reprezentăm numere cuprinse între 7,3 și 7,4, unde îl vom regăsi și pe 7,35.

PROBLEME PROPUSE:

1. Comparați, utilizând ambele metode (sub formă de fracții zecimale și sub formă de fracții ordinare):

a) 1,12 și 0,859; b) 13,32 și 13,299; c) 0,101 și 0,11.

2. Comparați fracțiile zecimale:

0,2568 și 0,3; 456,3 și 456; 5,879 și 5,897; 6789,3 și 6788,9.

3. Ordonați crescător următoarele fracții zecimale:

2,1; 0,89; 1,04; 1,997; 2,05; 0,005897.

4. Scrieți patru fracții zecimale situate între 5,7 și 5,8.

5. Rotunjiți:

a) numerele 0,76, 49,27 și 7218,53 la zecimea cea mai apropiată;

b) numerele 1,236, 0,888 și 152,829 la sutimea cea mai apropiată;

c) numerele 29,355, 0,9971 și 15,2237 la cel mai apropiat întreg.

6. Reprezentați pe axa numerelor, alegându-vă convenabil unitatea de măsură:

a) 0,8; 1; 0,5; 1,2; 1,5; b) 0,25; 1; 0,5; 1,25; 0,75.

7. Scrieți trei fracții zecimale mai mici decât 3, dar mai mari decât 2,7.

8. Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între 2,67 și 2,69, care să aibă un număr diferit de zecimale (de exemplu, una să aibă două zecimale, alta să aibă trei zecimale și a treia să aibă patru zecimale).

Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

SĂ NE AMINTIM!

Pentru a efectua adunări cu fracții zecimale putem să le transformăm în fracții ordinare. De exemplu: $123{,}408+58{,}087=\frac{123408}{1000}+\frac{58087}{1000}=\frac{181495}{1000}=181{,}495$. Se observă că adunarea se poate efectua direct dacă adunăm cifrele de același ordin.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a aduna două sau mai multe fracții zecimale care au un număr finit de zecimale procedăm direct, astfel: ***așezăm numerele unele sub altele*** (virgulă sub virgulă, unități sub unități, zeci sub zeci, sute sub sute, etc, zecimi sub zecimi, sutimi sub sutimi, etc.), ***apoi efectuăm adunarea fiecărui ordin în parte*** cu mențiunea că, ***atunci când ajungem la virgulă „o coborâm" la rezultat.***

Ca și la numerele naturale, și la partea zecimală este valabilă regula că ***10 unități de același ordin formează o unitate de ordin imediat superior***.

Dacă termenii au un număr diferit de zecimale, adăugăm zerouri după ultima zecimală nenulă până când vor avea același număr de zecimale.

Să exersăm:

$$\begin{array}{r} 23{,}569\ + \\ 5{,}300 \\ \hline 28{,}869 \end{array}$$

➤ Să adunăm 23,569 cu 5,3. Obținem 28,869.

➤ Completați tabelul după modelul din primul rând:

a	*b*	*a* + *b*
28	6,41	28,00 + 6,41 = 34,41
56,159	16,98	
99	1,1	
0,008	1,992	
16,201	9,859	

a	*b*	*a* + *b*
15,3	22,41	15,30 + 22,41 = 37,71
11,2	161,01	
44,99	99,444	
19,034	0,966	
5,97	48,03	

➤ Ioana, Raluca și Dănuț au rezolvat exercițiul 32,61+1,526, dar au obținut rezultate diferite. Care adunare este corectă? Unde este greșeala?

Ioana: $\begin{array}{l} 32{,}61+ \\ 1{,}526 \\ \hline 47{,}87 \end{array}$ Raluca: $\begin{array}{r} 32{,}610+ \\ 1{,}526 \\ \hline 34{,}136 \end{array}$ Dănuț: $\begin{array}{r} 32{,}610+ \\ 1{,}526 \\ \hline 33{,}136 \end{array}$

Rezolvare: Ioana nu a așezat corect numerele unele sub altele (virgula nu este sub virgulă). Dănuț a adunat bine zecimile (6 + 5 = 11), dar a uitat să adune 1 la unități (2 + 1 + 1 = 4). Raluca a calculat corect.

Scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

SĂ NE AMINTIM!

Pentru a efectua scăderi cu fracții zecimale putem să le transformăm în fracții ordinare. De exemplu: $25{,}17 - 2{,}37 = \frac{2517}{100} - \frac{237}{100} = \frac{2280}{100} = 22{,}8$. Putem, însă, să le scădem direct, folosind același procedeu ca la adunare.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a scădea două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale procedăm astfel: ***așezăm numerele unele sub altele*** (virgulă sub virgulă, unități sub unități, zeci sub zeci, sute sub sute, etc, zecimi sub zecimi, sutimi sub sutimi, etc) apoi efectuăm scăderea ca și când ar fi numere naturale, coborând virgula la rezultat pe poziția în care a fost.

Să exersăm:

$$\begin{array}{r} 81{,}530\ - \\ \underline{3{,}287} \\ 78{,}243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62{,}135\ - \\ \underline{15{,}280} \\ 46{,}855 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20{,}00\ - \\ \underline{13{,}12} \\ 6{,}88 \end{array}$$

➤ Să efectuăm scăderea, apoi să facem proba prin adunare: 31,15 – 25 = 31,15 – – 25,00 = 6,15. Proba scăderii prin adunare: 25 + 6,15 = 25,00 + 6,15 = 31,15.

PROBLEME PROPUSE:

1. Efectuați: a) 26,18 + 68,22; b) 59,73 + 2,58; c) 123,592 + 0,649; d) 0,001 + 0,11.

2. Efectuați: a) 7,23 + 18,308; b) 11,23 + 0,8 + 524,1789; c) 53,706 + 68 + 0,13.

3. Un farmacist obține un medicament combinând două substanțe: una are 0,035 kg, iar cealaltă este cu 0,191 kg „mai grea”. Câte kilograme are medicamentul?

4. Calculați: a) 18,52 + 7,259 + 15,9; b) 0,235 + 5,16 + 479,8; c) 280,7 + 2,1578 + 0,45; d) 7082 + 7,082 + 70,82 + 708,2 + 0,7082.

5. În depozit sunt 56,75 kg de făină. Se mai aduc 23 kg. Câte kg de făină sunt acum?

6. Un bucătar cumpără de la piață: 2,7 kg de ardei, 12,350 kg de cartofi, 4,5 kg de roșii, 3 kg de ceapă și 3,25 kg de morcovi. Cât cântăresc toate cumpărăturile?

7. Efectuați: a) 15,563 – 7,44; b) 5,13 – 2,88; c) 705,528 – 1,509; d) 10,2 – 8,233; e) 128,35 – 0,5597; f) 111,301 – 25,94773; g) 5 – 1, 35; h) 109 – 12,976; i) 14,23 – 13; j) 1452,198 – 864; k) 91 – 74,5638.

8. Aflați diferența dintre 798,5 și 0,79.

9. Diferența dintre 461,288 și o fracție zecimală este 125,25. Aflați fracția.

10. Aflați scăzătorul, știind că descăzutul este 1003,24 și diferența este 876,334.

11. Ana cântărește 58,28 kg, iar Mihai, cu 4,53 kg mai puțin. Ce greutate are Mihai?

12. Într-un sac sunt 12,750 kg de cartofi, iar în altul, cu 2,35 kg mai puțin. Cât cântăresc împreună cei doi saci?

13. Suma a două numere este 56,23. Unul dintre ele este 19,18. Care este celălalt?

14. Efectuați: a) 5 + 2,16 – 7,004; b) 35,32 + 12,9 – 17,88; c) 18,3 – 2,87 + 7, 68; d) 6 – 5,11 + 2; e) 21,5 + 7 – 13,58 + 2; f) 8 + 15,25 – 22,57; g) 42,87 – 5, 5 + 23 – 1,02.

15. Aflați numărul mai mare cu 2,58 decât 17,255.

16. Ce număr este cu 31,6 mai mic decât 431,95?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați: 0,1 + 1,2 + 23,45 + 5,6789 + 10.

2. Un excursionist a parcurs în prima zi 18,25 km, în a doua zi cu 2,25 km mai mult decât în prima, iar în a treia zi, cu 2 km mai mult decât în a doua zi. Câți kilometri a parcurs în cele trei zile?

3. Dintr-o sârmă cu lungimea de 25,25 m s-au tăiat într-o zi 17,36 m, iar în altă zi cu 10,28 m mai puțin decât în prima zi. Ce lungime are sârma rămasă după tăieturi?

4. Aflați suma și diferența numerelor 5,8 și 1,49.

5. Într-un depozit sunt 564,890 kg de legume. În alt depozit sunt cu 23,65 kg mai mult decât în primul, iar în al treilea, cu 5,89 kg mai puțin decât în primele două depozite la un loc. Câte kilograme de legume sunt în cele trei depozite la un loc?

6. Scrieți numărul 5,897 ca sumă și, apoi, ca diferență de două fracții zecimale.

7. Calculați $a + b$ și $a - b$, dacă a = 196,68 + 12 – 44,76 și b = 16,161 – 15 + 2,287.

8. Completați căsuțele goale ale pătratului magic, astfel încât suma fracțiilor zecimale de pe fiecare linie, coloană și de pe fiecare diagonală să fie aceeași.

3,6			3,3
		3,1	
2,9	2,6	1,8	
2,4		3,4	2,1

Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Înmulțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10

Să înmulțim: a) 2,15 cu 100: obținem $2{,}15 \cdot 100 = \dfrac{215}{100} \cdot 100 = 215$; b) $0{,}156 \cdot 10 = \dfrac{156}{1000} \cdot 10 = \dfrac{1560}{1000} = 1{,}560 = 1{,}56$; c) $56{,}0579 \cdot 1000 = \dfrac{560579}{10000} \cdot 1000 = 56057{,}9$.

Observăm că fracției zecimale care se înmulțește cu o putere a lui 10 i *se deplasează virgula spre dreapta* peste atâtea cifre câte zerouri are 10 ridicat la acea putere.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a înmulți o fracție zecimală cu o putere a lui 10, mutăm virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât arată exponentul lui 10. Dacă nu sunt suficiente cifre, vom adăuga zerouri.

Mutarea virgulei spre dreapta (și nu spre stânga!) ne conduce la un număr care are partea întreagă cu mai multe cifre, adică, după înmulțire partea întreagă a rezultatului este mai mare decât partea întreagă a numărului inițial.

Să exersăm:

- $26{,}8215 \cdot 10^3 = 26\overbrace{821}{,}5$, deci am mutat virgula spre dreapta peste trei cifre (1000 are trei zerouri) și am obținut 26821,5 (care are partea întreagă, 26821, mai mare decât cea a numărului 26,8215 adică 26).
- $0{,}0012 \cdot 100 = 0{,}12$; $1{,}252 \cdot 10^5 = 125200$; $0{,}065 \cdot 10^6 = 0{,}065000 \cdot 10^6 = 65000$.
- Cât plătește Marius pentru 10 creioane, dacă un creion costă 0,90 lei?

Rezolvare: $10 \cdot 0{,}9 = 9$ (lei).

Înmulțirea a două fracții zecimale

SĂ NE AMINTIM!

Pentru a efectua înmulțirea a două fracții zecimale le transformăm în fracții ordinare. De exemplu: $1{,}32 \cdot 0{,}4 = \dfrac{132}{100} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{528}{1000} = 0{,}528$; $15{,}5 \cdot 0{,}061 = \dfrac{155}{10} \cdot \dfrac{61}{1000} = \dfrac{155 \cdot 61}{10000} = \dfrac{9455}{10000} = 0{,}9455$. Observăm că, de fapt, dacă înmulțim pe

132 cu 4 obținem 528, iar rezultatul înmulțirii fracțiilor 1,32 și 0,4 se obține din 528 căruia îi deplasăm virgula peste trei cifre, spre stânga. La fel, 9455 este produsul dintre 155 și 61, dar căruia îi mutăm virgula spre stânga peste patru cifre.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a înmulți două fracții zecimale procedăm astfel: înmulțim numerele ca și când nu ar avea virgulă, deci ca și când ar fi numere naturale, apoi, la rezultat, punem virgula astfel încât fracția respectivă să aibă atâtea zecimale câte au împreună cei doi factori.

Să exersăm:

➢ Să calculăm: $7{,}5\cdot0{,}38$; $10{,}2\cdot26$; $2{,}15\cdot30{,}4$.

$$\begin{array}{r} 7{,}5\ \cdot \\ 0{,}38 \\ \hline 600 \\ 225 \\ \hline 2{,}850 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10{,}2\ \cdot \\ 26 \\ \hline 612 \\ 204 \\ \hline 265{,}2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}15\ \cdot \\ 30{,}4 \\ \hline 860 \\ 645 \\ \hline 65{,}360 \end{array}$$

➢ $1{,}02\cdot10{,}11=10{,}3122$; observăm că factorii au, împreună, 2 + 2 = 4 zecimale, iar produsul are tot patru zecimale;

➢ $0{,}0012\cdot5{,}\underbrace{04}_{\text{2 zecimale}}=0{,}\underbrace{006048}_{\text{6 zecimale}}$; factorii au împreună 6 zecimale, cât are și produsul;

➢ $1{,}25\cdot7=8{,}75$;

➢ Copiați pe caiete și completați tabelul ca în exemplul de pe primul rând:

a	b	c	$a\cdot b$	$b\cdot c$	$a\cdot(b+c)$	$(a-b)\cdot c$	$a\cdot b-a\cdot c$
2,1	1,4	0,11	2,94	0,154	3,171	0,077	2,709
1,02	0,98	0,075					
56,4	35,1	2					

➢ Se consideră numărul a = 13,4. Calculați:
a) numărul de 0,8 ori mai mare decât a;
b) pătratul lui a;
c) suma dintre triplul lui a și dublul lui a.

Rezolvare: a) Numărul de 0,8 ori mai mare decât a este $13{,}4\cdot0{,}8=10{,}72$; b) Pătratul lui a este $13{,}4^2=13{,}4\cdot13{,}4=179{,}56$; c) Suma dintre triplul lui a și dublul lui a este $3\cdot a+2\cdot a=5\cdot a=5\cdot13{,}4=67$.

➢ Să calculăm: $6{,}9^2-\{31{,}3+3\cdot0{,}75-[(2{,}2^3-8)\cdot10{,}9]\}=6{,}9\cdot6{,}9-\{31{,}3+2{,}25-$
$-[(2{,}2\cdot2{,}2\cdot2{,}2-8)\cdot10{,}9]\}=47{,}61-\{33{,}55-[(10{,}648-8)\cdot10{,}9]\}=47{,}61-(33{,}55-$
$-2{,}648\cdot10{,}9)=47{,}61-(33{,}55-28{,}8632)=47{,}61-4{,}6868=42{,}9232.$

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați pe caiete și completați tabelul:

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	$a \cdot (b + c)$	$(a - b) \cdot c$	$a \cdot b - a \cdot c + 1,2$
12,5	10	5,6						
254,1	100	56,02						
14,02	0,75	0,023						
2,5	1,004	0,79						

2. Calculați: a) $1,25 \cdot 100$; b) $1000 \cdot 0,129$; c) $17,23 \cdot 1000$; d) $0,00012 \cdot 10^6$; e) $15 \cdot 0,05 \cdot 100$; f) $10 \cdot 5,6 \cdot 0,25 \cdot 1000$; g) $1,6 \cdot 500 \cdot 0,15$.

3. Un kilogram de cartofi costă 1,25 lei. Cât costă 10 kg de cartofi? Dar 100 kg?

4. Sorin cumpără 2,250 kg de ceapă. Cât a plătit dacă un kilogram costă 1,30 lei?

5. Câte kilograme de cartofi se recoltează de pe un teren cu aria de 450 de metri pătrați, știind că de pe un metru pătrat se recoltează 3,25 kg?

6. Se consideră numărul $a = 12,7$. Calculați:

a) numărul de 0,9 ori mai mare decât a;

b) pătratul lui a;

c) suma dintre triplul lui a și dublul lui a.

7. Efectuați, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $11,2 + 1,12 + 112 + 0,112$;

b) $1,5 \cdot 4 + 2,2 \cdot 0,5 + 0,034 \cdot 100$;

c) $10 \cdot [0,78 + (41,05 - 39,87 + 1,2 \cdot 10) \cdot 0,1]$;

d) $(2,6^2 - 2,4^2) + (1,23 + 0,77)^2$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Calculați numărul de 1000 de ori mai mare decât suma numerelor 0,26 și 1,089.

2. Mama a cumpărat într-o zi 3,25 m de stofă, iar a doua zi, cu 1,35 m de stofă mai mult. Cât a plătit în total pentru stofă, știind că un metru de stofă costă 12,5 lei?

3. Efectuați produsul dintre dublul lui 1,23 și triplul lui 0,213.

4. Pentru o cantitate de legume cumpărată de la piață s-au plătit 15,75 lei. Dacă s-ar fi cumpărat cu un kilogram mai mult, s-ar fi plătit 19,95 lei. Aflați cât se plătește pentru 100 kilograme de legume.

5. O flacără olimpică a fost purtată, pe rând, de 25 de tineri: 4 au purtat-o câte 14,50 km, 5 câte 13,75 km și restul câte 1,325 km. Câți kilometri a parcurs flacăra olimpică?

6. Dacă $x + y = 2,5$ și $y + z = 6,4$, calculați: $3x + 4y + z$.

Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală

SĂ NE AMINTIM!

Am învățat să împărțim două numere naturale, împărțire exactă sau împărțire cu rest. Sunt situații în care nu ne interesează restul împărțirii, ci trebuie să spunem exact cât este rezultatul.

Este necesar să ne amintim și faptul că un număr natural se scrie ca fracție zecimală, adăugându-i virgula la dreapta și completând cu oricâte zerouri este nevoie.

Mara a plătit 5 lei pentru 2 kg de mere. Cât costă 1 kg de mere?

Rezolvare: Pentru a afla răspunsul, împărțim 5 la 2, dar obținem câtul 2 și restul 1.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a împărți două numere naturale nenule procedăm astfel:

- împărțim numerele ca la împărțirea numerelor naturale, obținând un cât și un rest;
- adăugăm cifra 0 la rest și punem virgula la cât;
- continuăm împărțirea, punând de fiecare dată cifra 0 la noul rest.

Să exersăm:

5 : 2 = 2,5
4
10
10
==

➢ Împărțim 5 la 2 și obținem 2 rest 1. Deoarece 1 are 10 zecimi, adăugăm cifra 0 la rest și punem virgula după 2; împărțim 10 la 2 și obținem rezultatul 2,5.

➢ Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați după model:

a	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*
5	2	2,5	27	4		3	25		71	2	
7	3		5	6		14	15		1	7	

➢ Să împărțim 27 la 4.

27,00 : 4 = 6,75
24
=30
28
=20
20
==

Rezolvare: Împărțim numerele și obținem 6 rest 3. Adăugăm cifra 0 la rest, punem virgula după 6 și continuăm împărțirea; 30 : 4 = 7 rest 2. Adăugăm cifra 0 după 2 și împărțim 20 la 4. Obținem rezultatul 6,75. Așadar am completat numărul 27 cu vigula și două cifre 0 (cele pe care le coborâm pe parcursul calculului).

➢ Să împărțim 3 la 25.

Rezolvare: Cum 25 în 3 se cuprinde de 0 ori, obținem restul 3. Scriem cifra 0 la rest, punem virgula după 0 și continuăm împărțirea 30 : 25 = 1 rest 5. Adăugăm cifra 0 după 5 și împărțim 50 la 25. Obținem rezultatul 0,12.

```
3,00 : 25 = 0,12
0
30
25
=50
 50
 ==
```

➢ Să împărțim 7 la 3.

Rezolvare: Observăm că obținem de fiecare dată restul 1, iar împărțirea se poate continua la nesfârșit. În acest caz, spunem că am obținut fracția zecimală periodică simplă 2,(3). Cifra sau grupul de cifre zecimale care se repetă în mod periodic la nesfârșit se scriu între paranteze rotunde.

```
7,00 : 3 = 2,33
6
10
 9
=10
  9
 =1
```

➢ Să împărțim 5 la 6.

Rezolvare: Cum 6 în 5 se cuprinde de 0 ori, obținem restul 5. Adăugăm cifra 0 la rest, punem virgula după 0 și continuăm împărțirea 50 : 6 = 8 rest 2. Adăugăm cifra 0 după 2 și împărțim 20 la 6. Împărțirea se poate continua la nesfârșit și obținem mereu restul 2. Rezultatul final este 0,83333..., pe care îl scriem 0,8(3). Acesta este o fracție zecimală periodică mixtă, în care 8 este partea neperiodică și 3 este perioada numărului.

```
5,00 : 6 = 0,833
0
50
48
=20
 18
 =20
   18
  =2
```

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La împărțirea a două numere naturale putem obține:

• un număr natural sau o fracție zecimală finită (atunci când, după mai mulți pași, la împărțire se obține restul 0);

• fracție periodică simplă sau o fracție periodică mixtă (atunci când, oricâți pași facem, la împărțire se obține mereu un rest diferit de 0).

O fracție zecimală periodică simplă este formată din partea întreagă (din fața virgulei) și partea zecimală (după virgulă) care cuprinde o cifră sau un grup de cifre care se repetă la nesfârșit.

O fracție zecimală periodică mixtă este formată din partea întreagă (din fața virgulei) și partea zecimală (după virgulă) care cuprinde o parte neperiodică urmată de perioadă.

Să exersăm:

➢ Fracția zecimală finită 3,52 are partea întreagă 3 și partea zecimală 52; fracția zecimală periodică simplă 0,(12) are partea întreagă 0 și partea periodică 12;

fracția zecimală periodică mixtă 12,356(2) are partea întreagă 12, partea zecimală neperiodică 356 și partea periodică 2.

➢ Copiați pe caiete următorul tabel și completați-l după modelul anterior:

a	denumirea lui *a*	partea întreagă	partea zecimală	partea neperiodică	partea periodică
13,112					
1,(312)					
25,1(4)					

➢ Fie numărul 51,23(41). Dacă vrem să scriem numărul evidențiind 12 zecimale, vom scrie 51,234141414141. Dacă vrem să calculăm zecimala de pe poziția 21 procedăm astfel: primele două zecimale sunt 23 și apoi avem 41 de o infinitate de ori; din cele 21 zecimale necesare scădem 2 (partea neperiodică) și 19 îl împărțim la 2 (câte cifre sunt în perioadă); cum la împărțire obținem restul 1, înseamnă că cifra de pe poziția 21 este 4. Dacă vrem să calculăm zecimala de pe poziția 242 vom proceda la fel; cum la împărțire obținem restul 0, cifra cerută este 1.

➢ Aflați fracția zecimală care îndeplinește simultan condițiile:

• partea sa întreagă este 0;

• fracția este periodică simplă având perioada formată din trei cifre: cifra de pe locul 45 după virgulă este 1, cifra de pe locul 1997 după virgulă este 4 și cifra de pe locul 100 după virgulă este 3.

Rezultat: 0,(341).

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați-l:

a	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*	*a*	*b*	*a* : *b*
11	2		2	5		10	4		250	20	
169	16		54	50		1002	125		73	37	
15	6		83	12		91	3		154	18	

2. Cât costă un kilogram de portocale, dacă opt kilograme au costat 30 de lei?

3. Aflați numărul de 8 ori mai mic decât dublul lui 451.

4. Calculați câtul dintre suma numerelor 456 și 29 și diferența numerelor 703 și 575.

5. Un întreg se împarte în 16 părți egale. Exprimați o astfel de parte ca fracție zecimală.

6. Determinați a 2017-a zecimală a fracțiilor zecimale: 0,2; 5,(6); 11,5(162).

7. Într-un magazin există următoarea ofertă: 5 *l* de ulei costă 28 de lei, iar 4 *l* de ulei costă 26 de lei. Care ofertă este mai avantajoasă ca preț?

Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale

Când a început clasa a V-a și a luat primele note, Mihai s-a întrebat cum i se va calcula media la sfârșitul semestrului. Întrebându-l pe domnul profesor, acesta i-a răspuns că trebuie să-și adune notele și să împartă rezultatul la numărul lor. Ceea ce i-a răspuns profesorul atunci se numește *medie aritmetică.*

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Media aritmetică a două numere naturale a și b este numărul notat m_a (citim „m indice a") care se calculează $m_a = (a + b) : 2$ sau $m_a = \frac{a+b}{2}$. *Media aritmetică* a trei numere naturale a, b și c este numărul $m_a = (a + b + c) : 3$ sau $m_a = \frac{a+b+c}{3}$. Pentru a calcula *media aritmetică* a n numere naturale, se calculează suma lor, iar rezultatul se împarte la n.

Să exersăm!

- Media aritmetică a numerelor 8 și 10 este $m_a = (8 + 10) : 2 = 9$.
- Media aritmetică a numerelor 11, 16 și 18 este $m_a = \frac{11+16+18}{3} = 15$.
- Dacă notele lui Mihai sunt 8, 9, 10 și 10, media notelor lui va fi

$m_a = \frac{8+9+10+10}{4} = 9{,}25$, iar media din catalog va fi 9 (se rotunjește rezultatul).

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați media aritmetică a numerelor:
a) 5, 6 și 7; b) 20, 25, 17 și 43; c) 101, 225, 367, 400, 986.

2. Sorin a obținut la geografie, în semestrul întâi, următoarele note: 10, 8, 7, 9 și 10. Ce medie va avea nerotunjită? Ce medie i se va trece în catalog (rotunjită)?

3. Media aritmetică a numerelor 8, 12 și x este 11. Aflați numărul x.

4. Ce puteți spune despre media aritmetică a mai multor numere egale?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Suma a opt numere este 67. Aflați media aritmetică a lor.

2. Media aritmetică a numerelor a și b este 75, media aritmetică a numerelor b și c este 81, iar media aritmetică a numerelor a și c este 87. Aflați jumătatea mediei aritmetice a celor trei numere.

Transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală

SĂ NE AMINTIM!

Am văzut că, în general, pentru a transforma o fracție ordinară oarecare în fracție zecimală împărțim numărătorul la numitor.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fie fracția ordinară ireductibilă $\frac{a}{b}$. Dacă împărțim pe a la b rezultatul este:

a) o fracție zecimală finită, dacă b este o putere a lui 10 sau un produs de puteri ale lui 2 cu puteri ale lui 5.

b) o fracție periodică simplă, dacă b nu se divide nici cu 2 și nici cu 5.

c) o fracție periodică mixtă, dacă b se divide cu cel puțin unul dintre factorii 2 și 5 și un alt factor prim.

Să exersăm:

- Numitori de forma 10^n: $\frac{147}{10}=14,7$; $\frac{19}{100}=0,19$.
- Numitori produs de puteri ale lui 2 și 5: $^{2)}\frac{71}{5}=\frac{142}{10}=14,2$; $^{5)}\frac{13}{2}=\frac{65}{10}=6,5$; $^{25)}\frac{1}{40}=\frac{25}{1000}=0,025$.
- Numitori care nu se divid nici cu 2 și nici cu 5: $\frac{23}{9}=2,(5)$; $\frac{127}{99}=1,(28)$.
- Numitori care se divid cu 2 sau 5 și un alt număr prim $\frac{8}{55}=0,1(45)$; $\frac{37}{12}=3,08(3)$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Transformați în fracții zecimale:

a) $\frac{2}{5}$; $\frac{13}{20}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{49}{50}$; $\frac{67}{100}$; b) $\frac{1}{3}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{57}{17}$; $\frac{22}{21}$; c) $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{3}{14}$; $\frac{17}{24}$; $\frac{79}{70}$.

2. Transformați fracțiile ordinare: $\frac{1}{7}$; $\frac{8}{24}$; $\frac{23}{13}$; $\frac{1}{31}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{101}{120}$; $\frac{78}{29}$; $\frac{1483}{6000}$ în fracții zecimale; copiați următorul tabel în caiet și completați-l:

Fracții zecimale finite	Fracții periodice simple	Fracții periodice mixte

Împărţirea unei fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

- Să împărțim 13,2 la 10: $13{,}2:10=13\frac{2}{10}:10=\frac{132}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{132}{100}=1{,}32$;
- $21{,}43:1000=\frac{2143}{100}:1000=\frac{2143}{100}\cdot\frac{1}{1000}=\frac{2143}{100000}=0{,}02143$;
- $4153{,}348:10^4=\frac{4153348}{1000}:10000=\frac{4153348}{10000000}=0{,}4153348$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Când împărțim o fracție zecimală la o putere a lui 10 îi *mutăm virgula spre stânga* peste atâtea cifre câte zerouri are puterea lui 10 la care împărțim.

Să exersăm!

- Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați după model:

a	b	$a:b$	a	b	$a:b$	a	b	$a:b$	a	b	$a:b$
1,2	100	0,012	0,009	10		3,45	10^3		12	10	
3,2	10^2		123	1000		21,22	10^4		9,12	100	
123,5	10^2		8,7	10^4		1,19	10		3,2	10^5	

- Există diverse oferte de preț pentru creioane: oferta 1 – set de 4 bucăți cu 3 lei; oferta 2 – set de 10 bucăți cu 9,50 lei. Cum alegem cele mai ieftine creioane?

Rezolvare. În oferta 1 costul unui creion este de 3 : 4 = 0,75 (lei). În oferta 2 costul unui creion este de 9,50 : 10 = 0,95 (lei). Alegem oferta 1, pentru că $0{,}75 < 0{,}95$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

În situația împărțirii unei fracții zecimale la un număr natural, procedeul va decurge la fel ca în cazul împărțirii numerelor naturale: vom muta virgula de la împărțit la cât, atunci când ajungem la ea, apoi coborâm cifre din partea zecimală a deîmpărțitului. Dacă acestea nu sunt suficiente, după ultima zecimală nenulă a deîmpărțitului adăugăm zerouri.

Rezultatul împărțirii unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale la un număr natural poate fi o fracție zecimală finită sau o fracție zecimală periodică.

Să exersăm:

```
314,52 : 15 = 20,968
30
=14
  0
 145
 135
 =102
  =90
    120
    120
    ===
```

```
72,150 : 30 =2,405
60
 121
 120
 ==15
    0
   150
   150
   ===
```

```
87,13 : 3 = 29,04333...
6
27
27
==1
   0
    13
    12
    =10
       9
     =10
        9
        1...
```

Observăm că la primele două împărțiri am mai adăugat un zero la deîmpărțit pentru a putea continua împărțirea. La cea de-a treia împărțire, putem să coborâm oricâte zerouri și împărțirea nu se termină. Rezultatul este o fracție periodică mixtă: 29,04(3).

➢ Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați după model:

a	b	$a:b$	a	b	$a:b$	a	b	$a:b$	a	b	$a:b$
45,6	12	3,8	3,5	14		14,4	12		8,9	5	
3,75	25		16,9	9		14,76	18		15,547	15	

PROBLEME PROPUSE:

1. Efectuați: a) $51{,}2:10$; b) $456{,}12:1000$; c) $12{,}5:10^3$; d) $1{,}235:10000$.

2. Efectuați: a) $9{,}2:4$; b) $14{,}4:12$; c) $51{,}081:6$; d) $117{,}6:42$; e) $785{,}25:15$.

3. De câte ori este mai mare 4152,72 decât 6?

4. Efectuați: a) $3{,}2:7$; b) $73{,}581:96$; c) $1002{,}5:135$; d) $18{,}005:11$.

5. Aflați cât costă un kilogram de cartofi, dacă 45 de kilograme costă 56,25 lei.

6. Știind că 100 de lăzi cu pere cântăresc 2143 kg, cât vor cântări 32 de lăzi?

7. O fabrică prelucrează în 10 zile 170,1 tone de materie primă. Câte tone de materie primă va prelucra fabrica în 7 zile?

8. Un călător parcurge în trei zile 45,72 km. Dacă în fiecare zi distanța parcursă este aceeași, aflați câți km parcurge pe zi călătorul.

Împărţirea a două fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Mama și Irina merg la cumpărături și plătesc 14,55 lei pentru 1,5 kg de brânză. Irina vrea să calculeze cât costă 1 kg de brânză, dar nu a învățat să împartă două fracții zecimale. Ce face?

Rezolvare: Irina transformă cele două fracții zecimale în fracții ordinare: $14,55:1,5=\frac{1455}{100}:\frac{15}{10}=\frac{1455}{100}\cdot\frac{10}{15}=\frac{1455}{10}:15=145,5:15$ și descoperă că poate înmulți ambele numere cu 10, iar apoi poate face împărțirea. Așadar, 1 kg de brânză costă 145,5 : 15 = 9,7 lei.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a împărți două fracții zecimale finite înmulțim și deîmpărțitul și împărțitorul cu o putere a lui 10, astfel încât, după înmulțire, împărțitorul să devină un număr natural.

De fapt, într-o împărțire a unei fracții zecimale la altă fracție zecimală primul lucru pe care îl facem este să „eliminăm” virgula împărțitorului. Pentru aceasta, mutăm virgula spre dreapta și la deîmpărțit și la împărțitor până când împărțitorul devine număr natural.

Să exersăm:

- $0,625:2,5=(0,625\cdot10):(2,5\cdot10)=6,25:25=0,25$ (am efectuat împărțirea unei fracții zecimale la un număr natural, așa cum am învățat la lecția anterioară)
- $0,5:0,25=(0,5\cdot100):(0,25\cdot100)=50:25=2$
- $0,8:0,125=(0,8\cdot1000):(0,125\cdot1000)=800:125=6,4$
- Numărul de 0,5 ori mai mic decât 0,32 este $0,32:0,5=3,2:5=0,64$.
- Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați după model:

a	b	$a:b$	a	b	$a:b$	a	b	$a:b$
9,594	2,34	4,1	2,4	0,12		26,448	1,2	
12,1	1,1		0,84	0,4		4,5	0,005	
0,84	0,07		19,6	0,014		241,4	0,35	

- Pe marginea unui trotuar lung de 98 m sunt montați, la distanțe egale, 11 stâlpi ornamentali pentru iluminat. Ce distanță este între stâlpul al 7-lea și al 8-lea?

Rezolvare: Dacă sunt 11 stâlpi, atunci vom avea 10 distanțe între ei, deci între oricare doi stâlpi consecutivi avem 98 : 10 = 9,8 (m).

➢ Calculați media aritmetică a numerelor 4,84 și 5,2.

Rezolvare: Media aritmetică este (4,84 + 5,2) : 2 = 10,04 : 2 = 5,02.

➢ Fie numerele $a = 2 + 7{,}5 : 6$ și $b = 3 : (4 + 0{,}8 : 0{,}1)$. Aflați numerele a și b și apoi calculați media aritmetică a lor.

Rezolvare: $a = 3{,}25$, $b = 0{,}25$. Media aritmetică este (3,25 + 0,25) : 2 = 1,75.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Nu toate împărțirile se pot efectua exact. Mai mult decât atât, uneori avem nevoie doar de o aproximare a câtului pe care o obținem efectuând împărțirea și oprindu-ne la câteva zecimale.

Dacă vrem să împărțim pe 4,7 la 0,31 cu trei zecimale, obținem 15,161. Pentru a determina restul împărțirii vom scrie numărul 9 (obținut în final ca rest parțial) ca o fracție zecimală cu cinci zecimale, adică 0,00009. De ce cinci zecimale? Vom aduna zerourile pe care le-am adăugat la deîmpărțit cu exponentul puterii lui 10 de la înmulțirea împărțitorului și a deîmpărțitului. Numărul astfel obținut reprezintă numărul zecimalelor restului.

```
470,000 : 31 = 15,161
31
160
155
==5 0
  3 1
  1 90
  1 86
  = =40
     31
     =9
```

Așadar, pentru a efectua verificarea, calculăm: $15{,}161 \cdot 0{,}31 + 0{,}00009 = 4{,}7$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați:

a	b	$a : b$	a	b	$a : b$	a	b	$a : b$
5,6	0,2		25,56	0,3		33,44	0,08	
1,275	1,5		1,44	0,12		9,999	0,3	
0,035	0,7		0,0121	1,1		48,921	0,15	

2. Dănuț a cumpărat 6 cornuri, plătind la casă 10 lei. Vânzătoarea i-a dat rest 1 leu. I-ar fi ajuns lui Dănuț banii pentru a cumpăra 7 cornuri?

3. Cât costă 5 kilograme de portocale dacă pentru 3,25 kg Alina a plătit 13,65 lei?

4. Deîmpărțitul este 105,24, iar câtul unei împărțiri este 0,008. Cât este împărțitorul?

5. O gospodină a cumpărat 16,75 kg de legume pentru care a plătit 53,60 lei. Aflați cât a plătit gospodina pe un kg de legume.

6. Efectuați următoarele împărțiri cu două și trei zecimale și faceți proba:
a) $0{,}24 : 2{,}5$; b) $3{,}1 : 3{,}5$; c) $1{,}7 : 0{,}006$; d) $0{,}2 : 0{,}015$; e) $0{,}173 : 1{,}8$; f) $10 : 0{,}12$.

Transformarea unei fracții zecimale periodice într-o fracție ordinară

SĂ ÎNVĂȚĂM!

O fracție zecimală *periodică simplă* se poate transforma în fracție ordinară astfel:
- separăm întregii;
- numărătorul fracției este format din toate cifrele din perioadă;
- numitorul este un număr format doar din cifra 9, care apare de atâtea ori câte cifre sunt în perioadă.

Să exersăm:

➤ $12,(53)=12\frac{53}{99}$; $1,(1243)=1\frac{1243}{9999}=1\frac{113}{909}$; $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $4,(18)=4\frac{18^{(9}}{99}=4\frac{2}{11}$.

➤ $0,(a)=\frac{a}{9}$; $0,(ab)=\frac{\overline{ab}}{99}=\frac{10a+b}{99}$; $a,(b)=a\frac{b}{9}=\frac{9a+b}{9}$; $a,(bc)=a\frac{\overline{bc}}{99}=\frac{99a+10b+c}{99}$;

$ab,(c)=\overline{ab}\frac{c}{9}=\frac{9\overline{ab}+c}{9}=\frac{9(10a+b)+c}{9}=\frac{90a+9b+c}{9}$.

➤ Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați după model:

$0,(6)=\frac{6^{(3}}{9}=\frac{2}{3}$	0,(5) =	7,(3) =	15,(2) =	6,(12) =	14,(37) =

SĂ ÎNVĂȚĂM!

O fracție zecimală periodică mixtă se poate transforma în fracție ordinară astfel:
- separăm întregii;
- numărătorul fracției este diferența dintre numărul format din toate cifrele de după virgulă și numărul format din cifrele care se află între virgulă și perioadă;
- numitorul este un număr format din atâtea cifre de 9 câte cifre sunt în perioadă, urmate de atâtea zerouri câte cifre sunt între virgulă și perioadă.

Să exersăm:

➤ $1,24(3)=1\frac{243-24}{900}=1\frac{219}{900}=1\frac{73}{300}$; $0,1058(37)=\frac{105837-1058}{990000}=\frac{104779}{990000}$;

$0,0(a)=\frac{a}{90}$; $0,0(ab)=\frac{\overline{ab}}{990}=\frac{10a+b}{990}$; $a,b(c)=a\frac{\overline{bc}-b}{90}=\frac{90a+10b+c-b}{90}=\frac{90a+9b+c}{90}$.

➢ Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați-l după model:

$0,1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15^{(15}}{90}=\frac{1}{6}$	0,12(5) =	7,0(3) =	15,2(2) =	6,01(12) =	14,1(37) =

➢ Fie numărul ***a*** = 0,12(345). Aflați suma primelor 100 de zecimale ale numărului ***a***. Transformați numărul ***a*** în fracție ordinară ireductibilă.

Rezolvare: ***a*** = 0,12345345345... Primele două zecimale sunt 1 și 2, apoi se repetă 3, 4 și 5 de o infinitate de ori. Dacă vrem 100 de zecimale, după 1 și 2 vom avea de (98 : 3 = 32 rest 2) 32 de ori grupul de cifre 3, 4, 5 și încă 2 cifre, adică 3 și 4. S = 1 + 2 + 32(3 + 4 + 5) + 3 + 4 = 3 + 384 + 7 = 394.

$$a=0,12(345)=\frac{12345-12}{99900}=\frac{12333^{(3}}{99900}=\frac{4111}{33300}$$

➢ Determinați cifra ***a*** astfel încât fracția ordinară $\frac{\overline{a1}}{\overline{1a}}$ să se scrie sub forma unei fracții zecimale finite.

Rezolvare: O fracție ordinară se transformă în fracție zecimală finită dacă numitorul ei este un produs de puteri ale lui 2 și 5. Așadar, numitorul fracției nu poate fi decât: 10, 12 sau 16. Cum numărătorul nu poate începe cu 0, înseamnă că ***a*** = 0 nu se poate. Dacă ***a*** = 2 avem 1,75. Dacă ***a*** = 6 avem $\frac{61}{16}=3,8125$. Observăm că pot fi și ***a*** = 1, adică $\frac{11}{11}=1,0$ și ***a*** = 5, adică $\frac{51^{(3}}{15}=\frac{17}{5}=3,4$.

➢ Aflați a 1996-a cifră de după virgulă a numărului $\frac{3}{14}$.

Rezolvare: $\frac{3}{14}$ = 0,2(142857). Cifrele de după virgulă se repetă din 6 în 6 începând cu cifra sutimilor. Cum 1995 = 6 · 332 + 3, înseamnă că a 1996-a cifră de după virgulă este 2.

PROBLEME PROPUSE:

1. Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați-l transformând fracțiile zecimale în fracții ordinare:

0,(3)	0,(14)	3,(5)	15,(12)	21,(36)	6,(47)	7,(21)	11,(57)
0,0(4)	0,1(31)	0,1(3)	1,1(3)	22,5(1)	0,4(3)	0,4(15)	1,2(3)

2. Determinați a 1994-a zecimală a numărului $\frac{73}{37}$.

3. Ordonați crescător numerele: 0,45; 0,4(5); 0,5(2); 0,54(2); 0,(25); 0,(43).

Număr rațional pozitiv

SĂ NE AMINTIM!

Am lucrat până acum cu fracții ordinare și cu fracții zecimale. Mai mult, am văzut că există o legătură între ele, respectiv se pot transforma dintr-un tip de fracție în celălalt.

De asemenea, pornind de la o fracție ordinară, putem obține fracții echivalente cu aceasta prin amplificare și prin simplificare.

Să exersăm:

➤ Fie numărul $\frac{1}{2}$. Prin amplificare putem obține: ${}^{2)}\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; ${}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$; ${}^{4)}\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$; ${}^{21)}\frac{1}{2}=\frac{21}{42}$. Prin simplificare putem obține: $\frac{12}{24}^{(12}=\frac{1}{2}$; $\frac{18}{36}^{(18}=\frac{1}{2}$; $\frac{5}{10}^{(5}=\frac{1}{2}$. Și $0,5=\frac{5}{10}^{(5}=\frac{1}{2}$, dar și $50\%=\frac{50}{100}^{(50}=\frac{1}{2}$. Toate aceste fracții sunt echivalente și ele sunt, de fapt, forme de reprezentare a aceluiași număr, pe care îl vom numi ***număr rațional***.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Să considerăm o fracție $\frac{a}{b}$. Toate fracțiile $\frac{m}{n}$ echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ formează un număr rațional. Dacă notăm cu A acest numărul rațional, spunem că fracția $\frac{a}{b}$ este reprezentantul numărului rațional A. Prin convenție, numărul rațional A care are ca reprezentant fracția $\frac{a}{b}$ se notează ca fracția $\frac{a}{b}$. De fapt, orice fracție echivalentă cu fracția $\frac{a}{b}$ poate fi un reprezentant al acelui număr rațional.

Să exersăm:

➤ Copiați pe caiete următorul tabel și apoi completați-l după model cu reprezentanți ai numărului rațional dat:

$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	0,25	$\frac{3}{\square}$	$\frac{\square}{28}$	–	$\frac{5}{\square}$	$\frac{\square}{128}$	–
$\frac{81}{243}$	$\frac{3}{\square}$	0,...	$\frac{5}{\square}$	–	–	–	–	–

SĂ NE AMINTIM!

Într-un exercițiu de calcul cu numere raționale se păstrează ordinea efectuării operațiilor, cunoscută de la numere naturale, respectiv:

• Dacă într-un exercițiu apar adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri și puteri, efectuăm mai întâi calculele cu puteri, aplicând regulile învățate, apoi înmulțirile și împărțirile, iar apoi adunările și scăderile. Efectuăm calculele de la stânga la dreapta.

• Dacă într-un exercițiu sunt folosite paranteze rotunde, paranteze pătrate și acolade, atunci efectuăm întâi operațiile din parantezele rotunde, după care efectuăm operațiile din parantezele pătrate, apoi operațiile din acolade, iar la final efectuăm restul operațiilor în ordinea în care sunt scrise.

Știai că...

➢ Cuvântul ***rațional*** vine din limba latină: ***ratio*** = fracție.

Să exersăm:

➢ Efectuați:

a) $2{,}5^2+2{,}5\cdot 4=6{,}25+10{,}0=16{,}25$; b) $5{,}2:0{,}2+1{,}2\cdot 0{,}5-1=26+0{,}6-1=25{,}6$;

c) $2{,}1\cdot\left[5{,}1-0{,}2\cdot(0{,}005+0{,}13)\right]+2{,}65=2{,}1\cdot(5{,}1-0{,}2\cdot 0{,}135)+2{,}65=$

$=2{,}1\cdot(5{,}1-0{,}027)+2{,}65=2{,}1\cdot 5{,}073+2{,}65=10{,}6533+2{,}65=13{,}3033$.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă într-un exercițiu sunt și fracții ordinare și fracții zecimale, trebuie să le transformăm astfel încât să apară fracții de același tip, fie numai fracții ordinare, fie numai fracții zecimale. În cazul în care în exercițiu sunt și fracții zecimale periodice, pentru că nu putem opera cu ele, se vor transforma toate în fracții ordinare.

Să exersăm:

➢ Efectuați:

a) $0{,}24\cdot\frac{1}{2}+0{,}28:0{,}7=0{,}24\cdot 0{,}5+0{,}28:0{,}7=0{,}12+0{,}4=0{,}52$;

b) $0{,}25\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{12}=\frac{25}{100}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{12}=\frac{1}{12}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$;

c) $0,(3)+2{,}5\cdot\frac{7}{6}=\frac{3}{9}+\frac{25}{10}\cdot\frac{7}{6}=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{6}=\frac{1}{3}+\frac{35}{12}=\frac{4}{12}+\frac{35}{12}=\frac{39}{12}=\frac{13}{4}$.

➤ Calculați $13x+\frac{2y}{439}$, unde $x = \left[1,2(6) + 3,(6) - 3,5\right] : 0,4(3)$ și $y = \left[17 - 16,1(13)\right]\cdot 495$.

Rezolvare: $x = \left[1,2(6) + 3,(6) - 3,5\right] : 0,4(3) = \left(\frac{19}{15}+\frac{11}{3}-\frac{7}{2}\right):\frac{13}{30} = \frac{38+110-105}{30}\cdot\frac{30}{13}=\frac{43}{13}$, iar $y = \left[17 - 16,1(13)\right]\cdot 495 = \left(17-16\frac{56}{495}\right)\cdot 495 = 439$;

$13x+\frac{2y}{439}=45$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Efectuați: a) $0,2\cdot 0,3+0,04$; b) $\left(0,1^2\right)+0,1$; c) $2,6\cdot 3-7,1$; d) $15,3-3,1\cdot 4,2$; e) $0,1\cdot 0,2\cdot 0,3:0,4$.

2. Efectuați:
a) $(118,2-98,1)^2$; b) $1,2\cdot\left(2,5\cdot 4-9,5\right)+1$; c) $(157,77-43,15)\cdot(409,178-399,178)$.

3. Efectuați:
a) $\frac{1}{2}\cdot 0,5-0,25$; b) $1+\frac{2}{5}\cdot 1,5$; c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 15$; d) $2:8+0,75$.

4. Calculați:
a) $0,(3)+0,1\cdot 5$; b) $0,(6)+0,6\cdot 0,2$; c) $\left[0,(3)\right]^2+1,5$; d) $0,2(3)+0,5(6)\cdot 0,7$.

5. Calculați: a) $\frac{1}{5}+0,8\cdot\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{6}+1,2:0,15$; c) $0,3+0,(3)\cdot\frac{1}{2}$; d) $1,(3)+0,7\cdot\frac{1}{2}$.

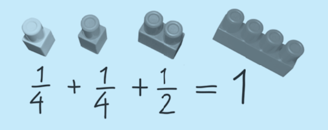
6. Calculați:
a) $(1,21+0,326+0,11)\cdot 10$; b) $2,3\cdot(23,5-11,5+13)+102$;
c) $(11,63+0,81-5,92)\cdot 11-2,4$; d) $2,1\cdot 1,21+(17-16,65)\cdot(57,89-0,789\cdot 10)$;
e) $20\cdot(4,56-2,06)+(18-17,25):(6,13-4,13)+1$;
f) $(18,33-2\cdot 2,11)\cdot 3,4+64:(87,3-79,3)+7^{23}:7^{21}$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Efectuați: a) $1,6\cdot\frac{1}{5}+0,1:0,08$; b) $(3,5-1,6)\cdot 2,1-0,654\cdot 0,002$;
c) $\left(\frac{5}{8}+5,8\right)\cdot 0,25-\frac{1}{4}$; d) $\left(\frac{5}{9}-0,2\right)\cdot 6+\left(0,5+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$.

2. Un producător agricol a vândut mere astfel: în prima zi, 64,25 kg, în a doua zi, cu 16,5 kg mai mult decât în prima zi, iar în a treia zi, dublul primelor două zile la un loc. Știm că un kilogram de mere costă 1,35 lei. Ce sumă de bani a încasat producătorul? Încercați să scrieți toate operațiile într-un singur exercițiu și apoi să îl rezolvați.

PROBLEME RECAPITULATIVE



1. Numiți cu alte cuvinte: 0,5 kilometri; 0,250 kg; 1,5 *l*.

2. Numiți următoarele numere după modelul „0,21 → 21 de sutimi”: 0,1; 0,123; 1,2; 17,103; 5,40; 5,400.

3. Scrieți ca fracții zecimale:

a) $\frac{1}{10}, \frac{7}{100}, \frac{77}{10}, \frac{200}{1000}, \frac{1877}{10^3}, \frac{19}{10^4}, 13\frac{71}{1000}$; b) $\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, \frac{49}{2\cdot 5^2}, \frac{101}{50}, \frac{3}{40}, \frac{124}{125}$.

4. Transformați în fracții ordinare și efectuați toate simplificările: 0,2; 1,5; 0,55; 2,75; 62,5; 0,14; 8,22; 15,25; 650,12.

5. Completați, astfel încât transformările următoare să fie corecte:

a) $18,7=\frac{187}{\square}$; b) $1,24=\frac{\square}{100}$; c) $0,032=\frac{\square}{125}$; d) $0,325=\frac{13}{\square}$.

6. Ordonați crescător numerele: 0,97; 2,23; 1,987; 1,005; 0,00421; 2,099.

7. Găsiți o fracție zecimală, cu trei zecimale, care să fie cuprinsă între 4,59 și 4,6.

8. Într-o pungă sunt 1,235 kg de zahăr, în alta 0,857 kg, iar în a treia, cu 0,125 kg de zahăr mai mult decât în primele două la un loc. Câte kilograme de zahăr sunt, în total, în cele trei pungi?

9. Efectuați: a) $15,23+84,77$; b) $28,102+102,28$; c) $14,296+0,95$; d) $0,12345+0,6789$; e) $14,023+0,9$; f) $1010,0101+2002,202$; g) $1475,85+2,584001$.

10. Efectuați:

a) $1+1,2+1,23$; b) $125,8+0,597+13$; c) $(1,58+5,42)+(2,996+0,004)$;

d) $25,103+25+103,25+103$; e) $0,012+12+1200,0012+10120,10102$.

11. Sorin, Ana și Bianca au calculat expresia $12,458-7,5$ așezând numerele unele sub altele. Sorin a obținut 12,383, Ana a obținut 4,958, iar Bianca, 19,958. Care dintre copii a obținut rezultatul corect? Puteți spune ce a greșit fiecare dintre ceilalți doi?

12. Calculați: a) $15,23-11,22$; b) $45,2-15,2$; c) $12,6-8,79$; d) $8,264-7,9978$; e) $18,2-15,0234$.

13. Efectuați: a) $5,257-5$; b) $2-1,543$; c) $148-129,2045$; d) $1234-0,004321$.

14. Aflați suma și diferența numerelor 4,566 și 3,08.

15. Suma a două numere este 43,021. Dacă unul dintre ele este 18.23. aflati celălalt număr.

16. Într-o cantină sunt 65,5 kg de cartofi. Se consumă pentru prânz 45,25 kg. Știind că la cină este necesară o cantitate de 31,75 kg, câte kilograme de cartofi mai trebuie aduse?

17. Calculați: a) $15,23-8,13+41,003$; b) $12-2,87+3$; c) $28,731+19,9-44,4891$.

18. Calculați:
a) $0,254\cdot10^6$; b) $833,2\cdot1000$; c) $10^3\cdot0,0001\cdot10$; d) $0,0000253\cdot10^3\cdot10^4\cdot10^0$; e) $1,02\cdot2,02$; f) $5,06\cdot0,05$; g) $0,001\cdot0,002\cdot0,005\cdot10^8$.

19. Calculați: a) $2:4$; b) $7:2$; c) $1:20$; d) $10:100$; e) $260:1300$; f) $525:1250$; g) $173:40$; h) $60006:125$; i) $450062:800$; j) $1000:62500$.

20. Media aritmetică a cinci fracții zecimale este 17,38. Aflați suma numerelor.

21. Transformați în fracție zecimală:
a) $\frac{3}{5}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{53}{40}$; $\frac{97}{100}$; b) $\frac{1}{6}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{17}{14}$; $\frac{23}{21}$; $\frac{80}{81}$.

22. Care dintre următoarele fracții se transformă în fracții zecimale periodice simple și care în fracții zecimale periodice mixte: $\frac{1}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{11}, \frac{1}{19}, \frac{23}{75}, \frac{150}{140}, \frac{3}{9000}$?

23. Efectuați următoarele împărțiri:
a) $17,2:8$; b) $35,23:40$; c) $59,1:9$; d) $183,89:71$; e) $0,56:0,007$; f) $5,82:0,009$; g) $1001,2:3,05$; h) $411,0068:12,1$.

24. Efectuați:
a) $\frac{3}{4}+0,25+99$; b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+0,8$; c) $0,75\cdot0,04+\frac{3}{10}$; d) $5,1\cdot1,1+11,7$.

25. Efectuați:
a) $12\cdot(1,1^2+0,9+2)$; b) $0,3\cdot(2,6+0,2\cdot0,17)-0,008$;
c) $0,3^2\cdot0,3^3+0,2\cdot0,4+5$; d) $1,02\cdot3,5+6\cdot\left(2,1^0+1,9+0,3\cdot10^2\right)$;
e) $\left[2\cdot\left(4,5+5,1\cdot0,06\right)+23,9-0,01^3\right]\cdot7-18,09$.

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Exprimați diferența dintre 3,5987 și 1,0009 ca sumă de două fracții zecimale.

2. Scrieți numărul 48,056 ca sumă de trei fracții zecimale.

3. Scrieți numărul 58,73 ca diferență de două fracții zecimale, prima fiind cu o singură zecimală.

4. Se dublează fracția 2,0625. Apoi se dublează din nou, iar această operație se repetă în continuare. După câte astfel de „dublări” rezultatul obținut va fi număr natural? Dar dacă schimbăm numărul 2,0625 cu numărul 1,8 ce se întâmplă?

5. Calculați dublul sumei dintre triplul lui 7,21 și dublul lui 1,18.

6. Media aritmetică a patru numere este 11,22. Știind că trei dintre ele sunt 7,4, 5,2 și 8,13, aflați-l pe al patrulea.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Dintre următoarele fracții zecimale: 0,1; 2,00; 159,0001; 45,02; 12,0; 587,01; 7,00000000, sunt numere naturale un număr de:

a) 7; b) 5; c) 2; d) 3.

2. Dintre numerele: 1,0009; 0,99; 1,111 și 0,9999, cel mai mic este:

a) 0,99; b) 0,9999; c) 1,0009; d) 1,111.

3. Rezultatul calculului $15{,}23-8{,}13+41{,}003$ este:

a) 41,4; b) 48,103; c) 48,13; d) 47,103.

4. Rezultatul calculului $2\cdot 0{,}5+19$ este:

a) 21,5; b) 20; c) 22,5; d) 20,5.

5. Suma a 20 de numere este 48,67. Media lor aritmetică este egală cu:

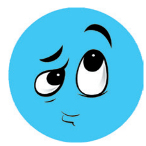
a) 4,867; b) 48,67; c) 2,4335; d) 24,335.

6. Dacă 7,5 kg de banane costă 33,75 lei, atunci un kilogram costă:

a) 4,5 lei; b) 4 lei; c) 5 lei; d) 5,5 lei.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu

Testul 2



1. Fracția ordinară $\frac{5}{4}$ este egală cu fracția zecimală:

a) 1,5; b) 2,5; c) 0,25; d) 1,25.

2. Dintre numerele: 26,999; 26,91; 26,9 și 26,991, cel mai mare este:

a) 26,999; b) 26,91; c) 26,9; d) 26,991.

3. Rezultatul calculului 12 – 2,87 + 3 este:

a) 11,87; b) 12,13; c) 13,87; d) 12,87.

4. Rezultatul calculului $0{,}5\cdot 0{,}8+11{,}6$ este:

a) 16,6; b) 12; c) 11,64; d) 15,6.

5. Media aritmetică a numerelor 8,1, 5,6, 12,3 și 18,49 este:

a) 11,12; b) 11,25; c) 11,1225; d) 11.

6. Numărul cu 4,06 mai mic decât suma fracțiilor 0,257 și 13,803 este:

a) 10; b) 11,3; c) 10,3; d) 10,03.

Punctaj: 1p, 1p, 1p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu

Testul 3

1. Scrieți în ordine descrescătoare patru fracții zecimale mai mari decât 18 și mai mici decât 18,3.

2. Transformați în fracții ordinare ireductibile: $0,(13); 1,(6); 0,12(3); 15,25$.

3. Calculați suma dintre triplul lui 2,4 și dublul lui 4,2.

4. Ana a cumpărat 3,5 kg de ceapă cu 1,8 lei/kg, 5,75 kg de cartofi cu 1,25 lei/kg și 3,25 kg de roșii. Știind că 1 kg de roșii costă cu 0,45 lei mai mult ca 1 kg de ceapă și 1 kg de cartofi la un loc, cât a plătit Ana?

Punctaj: 2p, 2p, 2p, 3p; 1p din oficiu

PROBLEME PRACTICE REZOLVATE PRIN METODE ARITMETICE

Știați că...

Unitățile de măsură au apărut încă din cele mai vechi timpuri, mai ales ca urmare a activităților comerciale. Indiferent de forma de schimb, trebuia găsită o modalitate de evaluare a mărfurilor. De asemenea, a apărut nevoia măsurării distanțelor, a ariilor suprafețelor terenurilor, a cantităților/volumelor, a greutăților (de fapt a maselor) de produse sau a timpului.

PROIECT

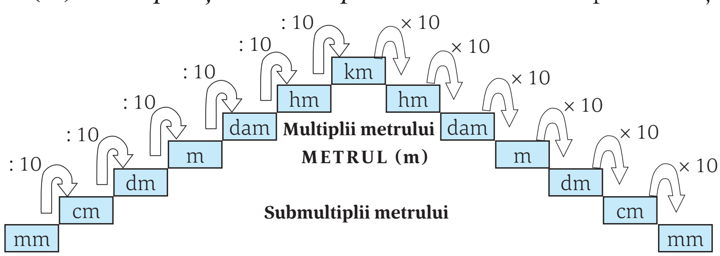
1. Căutați pe internet și realizați un referat despre evoluția unităților de măsură, de la apariție și până în zilele noastre.

2. Căutați pe internet și realizați un referat despre evoluția instrumentelor de măsură folosite în țara noastră de la apariție și până în zilele noastre.

SĂ NE AMINTIM!

A măsura înseamnă a stabili prin comparare cu *o unitate de măsură etalon*, de aceeași speță, valoarea unei mărimi (lungime, masă, greutate, etc.). Etalonul este o măsură-tip acceptată oficial în știință sau în tehnică și care determină un sistem de unități de măsură.

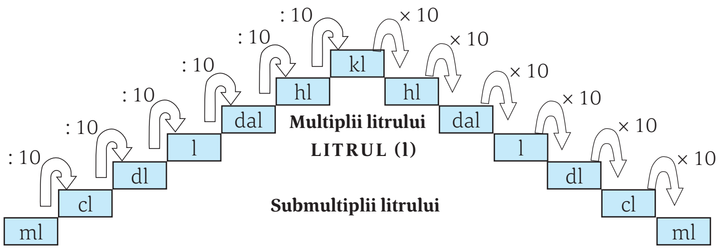
✶ Prin convenție internațională, unitatea principală pentru *măsurarea lungimii* este *metrul* (*m*). *Multiplii și submultiplii metrului* sunt reprezentați în desen.



Să exersăm:

- 23 m = 230 dm; 118 m = 1,18 hm; 1,76 hm = 17600 cm;
- 366 cm = 36,6 dm; $\frac{23}{5}$ dam = 4,6 dam = 460 dm;
- 12 hm + 210 m + 1250 dm = 120 dam + 21 dam + 12,5 dam = 153,5 dam;
- 0,005 m + 0,07 dm + 0,12 cm = 5 mm + 7 mm + 1,2 mm = 13,2 mm.

★ Unitatea principală pentru măsurarea *capacității vaselor (volumul lichidelor)* este *litrul* (*l*). Multiplii și submultiplii litrului sunt reprezentați în desen.



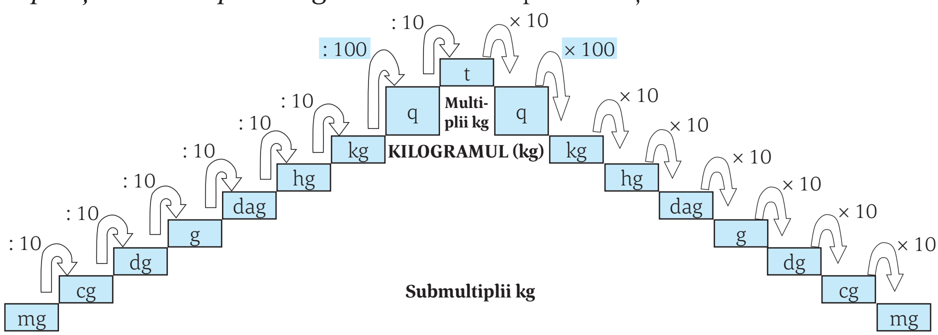
Să exersăm:

➢ 2371 *l* = 2,371 kl; 124,82 dal = 1,2482 kl; 1,62 dal = 16200 ml; 370 dl = 3700 cl;

➢ 0,012 hl – 2,23 dl + 7,1 dal = 1,2 *l* – 0,223 *l* + 71 *l* = 71,977 *l*;

➢ 8,15 dl + 0,021 dal + 150 cl = 0,815 *l* + 0,21 *l* + 1,5 *l* = 2,525 *l*.

★ Unitatea principală pentru *măsurarea masei corpurilor* este *kilogramul* (*kg*). *Multiplii și submultiplii kilogramului* sunt reprezentați în desen.



Să exersăm:

➢ 2,15 kg = 215 dag; 0,02 hg = 2 g; 5 hg = 0,005 q; 4,7 cg = 47 mg; 19,1 dg = 1,91 g;

➢ 2435 cg + 0,014 hg + 320 mg = 24,35 g + 1,4 g + 0,32 g = 26,07 g.

★ Unitatea principală pentru *măsurarea timpului* este *secunda* (s). *Multiplii secundei* sunt:

$$1s \underset{:60}{\overset{\cdot 60}{\rightleftarrows}} 1min \underset{:60}{\overset{\cdot 60}{\rightleftarrows}} 1h \underset{:24}{\overset{\cdot 24}{\rightleftarrows}} 1zi \underset{:7}{\overset{\cdot 7}{\rightleftarrows}} 1 \text{ săptămână}$$

O lună poate să aibă 28, 29, 30 sau 31 de zile, un an are 12 luni (365 sau 366 de zile), un deceniu are 10 ani, un secol are 100 de ani și un mileniu are 1000 de ani.

✶ În țara noastră unitatea monetară este leul; 1 leu = 100 de bani.

✶ Pentru ***a măsura aria unei suprafețe*** vom folosi ca unitate de măsură ***pătratul cu latura de 1 cm***. Aria unui poligon reprezintă numărul de unități de măsură care se cuprind în suprafața poligonului.

✶ Pentru ***a măsura volumul unui cub sau al unui paralelipiped dreptunghic*** vom folosi ca unitate de măsură ***cubul cu latura de 1 cm***. Volumul unui cub sau al unui paralelipiped dreptunghic reprezintă numărul de unități de măsură care se cuprind în interiorul corpului.

Pentru a rezolva probleme practice cu fracții în care intervin și unități de măsură vom folosi metodele aritmetice de rezolvare a problemelor.

ACTIVITATE PRACTICĂ

✓ Elevii împărțiți pe grupe vor face: a) planul clasei cu toate obiectele existente; b) planul curții școlii. Elevii vor fi anunțați să aibă la ei instrumente de măsură și creioane colorate pentru desen. Vor măsura și vor desena clasa/curtea școlii și toate obiectele existente.

✓ Elevii clasei, împărțiți pe grupe sau perechi, sunt „investiți” cu meseria de croitor, își primesc clienții și îi măsoară pentru realizarea unor obiecte de vestimentație (bluză, pantalon, fustiță, rochiță, etc); își notează în tabel numele și dimensiunile pentru fiecare obiect vestimentar solicitat (lungimea mânecii, lungimea pantalonului, lungimea fustiței etc), după care desenează obiectul de vestimentație și notează pe marginea lui dimensiunile.

Să exersăm:

➢ Un excursionist a mers într-o zi 10 km și 25 m, a doua zi 12 km, 2 hm și 18 m, iar a treia zi 8 km, 5 dam și 10 m. Care este lungimea (în hm) drumului parcurs în cele trei zile?

Rezolvare: Pentru a aduna cele trei lungimi de drum vom transforma întâi distanțele în hm: 10 km + 25 m = 100 hm + 0,25 hm = 100,25 hm (în prima zi); 12 km + 2 hm + 18 m = 120 hm + 2 hm + 0,18 hm = 122,18 hm (în a doua zi); 8 km + 5 dam + 10 m = 80 hm + 0,5 hm + 0,1 hm = 80,6 hm (în a treia zi). În total: 100,25 hm + 122,18 hm + 80,6 hm = 303,03 hm.

➢ Într-un bazin cu capacitatea de 100 *l* sunt 9 dal de benzină. Știind că într-o zi s-a vândut $\frac{1}{3}$ din cantitatea de benzină, iar a doua zi s-a completat cantitatea cu $\frac{1}{4}$ din cantitatea rămasă, câți litri de benzină mai sunt necesari pentru a umple bazinul?

Rezolvare: $\frac{1}{3}$ din cantitatea de benzină din bazin (din 9 dal = 90 *l*) reprezintă 30 *l*. După ce se vând 30 *l*, rămân în bazin 90 – 30 = 60 (*l*). Cantitatea de 60 *l* se completează cu $\frac{1}{4}$ din 60 *l*, adică cu 15 *l*. Pentru a umple bazinul mai sunt necesari 100 – (60 + 15) = 25 (*l*) de benzină.

➢ Cum putem aduce 6 *l* de apă dacă dispunem de două vase: unul de 4 *l* și altul de 9 *l*?

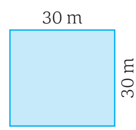
Rezolvare: Umplem vasul de 9 *l* și turnăm din el 4 *l* în vasul mic (rămân 5 *l*). Răsturnăm apa din vasul de 4 *l* și îl umplem din nou din cel de 9 *l* (în care rămâne 1 *l*). Golim vasul mic și turnăm în el 1 *l* de apă din vasul mare. Vasul mare (rămas gol) este din nou umplut cu apă (9 *l*). Turnăm din acest vas apă în vasul mic până se umple (3 *l*). În vasul de 9 *l* au rămas 6 *l*.

➢ În șapte cutii sunt batoane de ciocolată de câte 100 g. Printre ele, o cutie este cu batoane de ciocolată de 90 g. Printr-o singură cântărire să se determine aceste cutii, știind că toate batoanele sunt ambalate la fel.

Rezolvare: Numerotăm cutiile cu numerele 1, 2, 3, ... , 7 și luăm din fiecare cutie atâtea batoane de ciocolată cât arată numărul cutiei (din cutia nr. 1 luăm un baton, din cutia nr. 2 luăm 2 batoane...). Avem 1 + 2 + ... + 7 = 28 (batoane). Dacă toate batoanele ar fi de 100 g, atunci cele 28 de batoane ar cântări 2800 g. Cântărim cele 28 de batoane (sigur nu obținem 2800 g). Dacă obținem 2790 g înseamnă că lipsesc doar 10 g, deci un singur baton are 90 g și deci cutia nr. 1 are batoanele mai ușoare. Dacă obținem 2780 g, lipsesc 20 g, deci 2 batoane au 90 g și deci cutia nr. 2 are batoanele mai ușoare. Astfel aflăm cutia mai ușoară.

➢ Mihai are o sumă de bani. Știind că plătește un stilou cu două cincimi din sumă, adică cu 20 de lei, ce sumă avea la început Mihai?

Rezolvare: Dacă două cincimi din sumă reprezintă 20 de lei, putem spune (prin metoda reducerii la unitate) că o cincime din sumă reprezintă 10 lei. Suma este de cinci ori mai mare, deci 50 de lei.



➢ Un teren în formă de pătrat cu latura de 30 m se împrejmuiește cu un gard din lemn. Lemnul este susținut de stâlpi din 3 în 3 metri, primul stâlp fiind așezat într-un vârf al pătratului. De câți stâlpi este nevoie ?

Rezolvare: Pornim dintr-un colț al terenului în care punem primul stâlp; pe prima latură vom avea nevoie de 11 stâlpi, ultimul fiind cel din al doilea colț al pătratului; pe latura a doua punem 10 stâlpi, ultimul fiind cel din al treilea colț al pătratului; pe latura a treia punem 10 stâlpi, ultimul fiind cel din al patrulea colț al pătratului; pe latura a patra punem doar 9 stâlpi, ultimul fiind înainte de primul colț al pătratului în care se află deja stâlp. Realizați un desen.

ACTIVITATE PRACTICĂ

Fiecare elev va realiza planul camerei sale cu toate obiectele existente în cameră.

PROBLEME PROPUSE:

1. La fermă sunt oi, vaci și capre, în total 111 animale. Știind că o treime sunt oi, iar numărul vacilor este cu 4 mai mare decât numărul caprelor, câte capre sunt?

2. Raluca are 36 de lei. Ea cumpără cu un sfert din sumă un stilou, iar cu două treimi din rest, caiete. Ce sumă de bani i-a rămas Ralucăi?

3. Marga are 36 de timbre. Ea îi dă Anei o șesime din timbre, iar apoi Mariei o cincime din rest, după care primește de la tatăl ei încă 7 timbre. Câte timbre are acum?

4. În livadă sunt nuci, peri și pruni. Știind că 50% din pomi sunt pruni, 20% sunt peri, care este procentul nucilor?

5. Trei sferturi dintre locuitorii unui sat sunt români. Știind că satul are 124 de locuitori, câți locuitori sunt de alte etnii?

6. Într-un depozit se află 560 kg de mere, dintre care jumătate sunt ionatane și un sfert delicios, restul fiind golden. Ce cantități de mere sunt din fiecare soi?

7. Într-o școală sunt 330 de elevi. Știind că 40% sunt fete, calculați procentul și numărul băieților.

8. Norma zilnică a unui muncitor este de 50 de piese. Într-o zi el a depășit norma cu 10%. Câte piese a executat în acea zi?

9. Alin a vrut să cumpere o cămașă care costa la raft 150 de lei, dar la casă a aflat că are o reducere de 14% din preț. Cât a plătit Alin pe cămașă?

10. Tudor are 125 de lei. El îi dă fratelui mai mic 20% din sumă, iar bunicii 10% din cât a rămas. Ce sumă îi rămâne în final lui Tudor?

11. Prețul unui stilou este de 16 lei. Aflați prețul după o scumpire cu 50% din prețul inițial.

12. Prețul unui penar este de 25 de lei. Aflați prețul după o ieftinire cu 20% din prețul inițial.

13. Pe laturile unei alei, în formă de dreptunghi cu lungimea de 24 m și lățimea de 3 m, grădinarul vrea să planteze arbori care costă 32,50 lei bucata. Distanța dintre doi arbori alăturați trebuie să fie de 3 m, iar primul arbore este plantat într-un vârf al aleii. Cât vor costa acești arbori ?

14. Irina face clătite pentru 4 persoane folosind următoarea rețetă: 300 g de făină, 400 ml de lapte, 2 ouă și 4 ml de ulei. Din aceste cantități se fac 16 clătite. Ce rețetă aplicăm pentru 128 de clătite ?

15. Rândunelele migrează în fiecare iarnă din Marea Britanie în Africa de Sud. Ele zboară cei 9600 km în 12 săptămâni. Media de viață a unei rândunici este de 16 ani. Calculează câți kilometri zboară o rândunică în timpul vieții.

16. Mihai cumpără din piață 2,5 kg de cartofi și 1,5 kg de ceapă. Știind că 1 kg de cartofi costă 1,5 lei, iar 1 kg de ceapă costă 1,2 lei, ce rest i-a rămas lui Mihai, știind că a avut la el o bancnotă de 5 lei și două bancnote de 1 leu?

17. Anca are de citit o carte în trei zile. În prima zi a citit o treime din carte, a doua zi a citit jumătate din paginile rămase, iar a treia zi, restul de 35 de pagini. Câte pagini are cartea?

18. Perimetrul unui teren în formă de dreptunghi este de 3 km. Câți metri are lungimea terenului, dacă este de 2 ori mai mare decât lățimea?

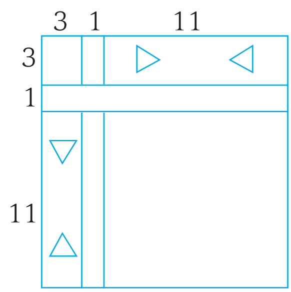
19. Andreea are de citit o carte de 100 de pagini. Dacă ieri a citit trei sferturi din carte și astăzi a citit o cincime din rest, câte pagini mai are de citit?

20. O fermă agricolă a obținut o producție medie de 4000 kg de grâu la hectar. Patru cincimi din cantitatea de grâu este depozitată și restul se distribuie celor 250 de asociați. Dacă suprafața însămânțată a fost de 648 ha, ce cantitate de grâu revine fiecărui asociat?

21. Maria cumpără 5 lalele și 7 frezii și plătește 50 de lei, iar Ioana cumpără 7 lalele și 5 frezii și plătește 46 de lei. Cât costă o lalea și cât costă o frezie?

22. Vlad a cumpărat 45 de caiete și a plătit 200 de lei. Dacă unele caiete costă 4 lei și altele 5 lei, câte caiete de fiecare fel a cumpărat Vlad?

23. Între blocurile din cartierul nostru s-a amenajat un parc ca cel din figură (dimensiunile sunt în metri). Cele două alei au lățimea de 1 m și sunt pavate cu dale mari, pătrate, cu latura de 50 cm. Triunghiurile cu laturile de 2 m sunt straturi de flori, pătratul mic cu latura de 3 m este cu gazon, pătratul mare este locul de joacă pentru copii și are pe margine bănci.



a. Câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui terenul de joacă?

b. Cât costă dalele ce se pun pe alei, dacă o dală costă 25,30 lei?

c. Straturile de flori au pe margine panseluțe, la distanța de 15 cm una de alta, și în interior câte 10 trandafiri. Dacă o panseluță costă 1 leu și un trandafir ce trebuie plantat costă 11,25 lei, câți lei sunt necesari pentru flori?

d. Pentru a însămânța cu gazon un pătrat cu latura 1 m avem nevoie de 50 g de sământă. Dacă 1 kg de sământă costă 14,50 lei, cât costă gazonul necesar?

ACTIVITATE PRACTICĂ

Mama vrea să facă o prajitură cu mere. Pentru o tava de prăjituri folosește: 1 kg de mere, jumătate de kg de zahăr, 1 pachet de unt, 3 ouă, 2 plicuri de zahăr vanilat, 1 plic de scorțișoară, 1 kg de făină. Mama îi dă lui Matei 100 de lei și îl trimite la cumpărături.

Mergeți la cel puțin două magazine și verificați cele mai mici prețuri pentru aceste produse. Ce rest îi rămâne lui Matei după ce face cumpărăturile?

24. O carte are 248 de pagini. De câte ori s-a folosit cifra 7 în paginarea cărții? Câte cifre s-au folosit în paginarea cărții?

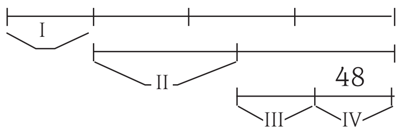
25. O napolitană are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 5 cm, 3 cm și 2 cm. Se ambalează astfel de napolitane într-o cutie în formă de cub, fără a rămâne goluri. Care este lungimea minimă a laturii cubului?

26. Într-o livadă sunt 620 de pomi. Meri sunt de 2 ori mai mulți decât caiși și cu 15 mai puțini decât peri. Câți pomi de fiecare fel sunt în livadă ?

27. Organismul uman conține în proporție de 90% apă. Zilnic trebuie să bem circa 2 litri de apă. Dacă într-o săptămână, în primele 2 zile bei câte 1 *l* de apă, în următoarele 3 zile câte 2 *l* de apă iar în restul zilelor câte 2,5 *l* de apă care este consumul tău mediu zilnic?

28. Două cisterne conțin 2500 *l* de lapte. Dacă din prima cisternă se pun 5 hl de lapte în a doua cisternă, atunci ambele cisterne au aceeași cantitate de lapte. Câți dal de lapte conținea inițial fiecare cisternă?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI



1. Compune o problemă după schema:

2. Într-un vas sunt 8 *l* de lapte. Cum putem înjumătăți această cantitate, având la dispoziție vase goale de 3 *l* și de 5 *l*?

3. Cum putem împărți pe 11 și pe 9 exact la 2?

Rezolvare: Scriem numerele 11 și 9 cu cifre romane: ~~XI~~ ~~IX~~.

4. Marcel și Iulian merg să cumpere ulei cu trei canistre a câte 3 *l*, 7 *l* și 10 *l*. Ei cumpără numai 10 *l* de ulei. Cum au reușit cei doi copii să împartă uleiul în părți egale, dacă nu aveau la îndemână decât cele trei canistre?

Rezolvare: Punem tot uleiul în canistra de 10 *l*. Umplem canistra de 3 *l* și apoi o turnăm în cea de 7 *l*. Umplem din nou canistra de 3 *l* și o turnăm în cea de 7 *l*. Umplem iar canistra de 3 *l* și turnăm în cea de 7 *l* încă 1 *l* până când o umplem. În canistra de 3 *l* au rămas 2 *l* de ulei. Turnăm cei 7 *l* din canistra de 7 *l* în cea de 10 *l* și o golim pe cea de 7 *l*. Turnăm cei 2 *l* de ulei din canistra de 3 *l* în cea de 7 *l*. Umplem canistra de 3 *l* și turnăm în cea de 7 *l*, unde avem acum 2 *l* + 3 *l* =5 *l* de ulei.

5. La un depozit sunt 7 butoaie pline și 7 umplute pe jumătate cu ulei. Uleiul este repartizat în mod egal la 3 magazine, dar nu există nicio posibilitate să-l măsoare. Cum trebuie să se împartă butoaiele, fără a trece uleiul dintr-un butoi în altul?

Rezolvare: 7 butoaie pline fac cât 14 jumătăți de butoaie pline, 14 + 7 = 21 (jumătăți de butoaie cu ulei); 21 : 3 = 7 (jumătăți) trebuie să primească fiecare magazin. Primul magazin primește 3 butoaie pline și un butoi pe jumătate. Al doilea magazin primește 3 butoaie pline și un butoi pe jumătate. Al treilea magazin primește 1butoi plin și 5 butoaie pe jumătate. Fiecare primește 3 butoaie și jumătate.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Anii compleți 2016, 2017, respectiv 2018 au împreună un număr de luni egal cu:

a) 32; b) 33; c) 34; d) 36.

2. Suma laturilor unui cub este 4,32 m. Lungimea unei laturi este egală cu:

a) 36 cm; b) 3,6 cm; c) 360 cm; d) 0,36 cm.

3. Dacă 30% dintr-o zi sunt plecat în excursie, atunci excursia durează:

a) 7 ore și 30 de minute; b) 7 ore și 15 minute;
c) 7 ore și 12 minute; d) 7 ore și 5 minute.

4. Maria are 3 vase, primul de 3 *l*, al doilea cu 1,5 *l* mai mare decât primul și al treilea de capacitate egală cu jumătatea primului vas. Cele trei vase au împreună:

a) 9,75 *l*; b) 10 *l*; c) 8 *l*; d) 9 *l*.

5. Am o bancnotă de 100 lei și cumpăr 3 kg de cartofi, 4 kg de mere și 1 kg de carne. Dacă 1 kg de cartofi costă 1,50 lei, 1 kg de mere costă 4,25 lei și 1 kg de carne costă 19,50 lei, ce rest primesc?

a) 52 lei; b) 59 lei; c) 30 lei; d) 37,50 lei.

Punctaj: 1p; 2p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

Testul 2

1. De la 1 ianuarie 2017 până la 15 iunie 2017 sunt:

a) 166 zile; b) 167 zile; c) 165 zile; d) 168 zile.

2. Lățimea manualului de matematică este egală cu $\frac{2}{3}$ din lungimea sa. Dacă suma dintre lungime și lățime este egală cu 40 cm, atunci lungimea are:

a) 24 cm; b) 16 cm; c) 25 cm; d) 20 cm.

3. Astăzi s-au adus la școală 5 lăzi de mere. Dacă o ladă goală cântărește 2,5 kg și plină cu mere cântărește 15 kg, atunci la școală au fost aduse:

a) 125 kg de mere; b) 75 kg de mere;
c) 62,5 kg de mere; d) 60 kg de mere.

4. Prețul inițial, de 875 de lei, al unui palton scade cu 25%. Noul preț este de:

a) 218,75 lei; b) 656 lei; c) 700 lei; d) 656,25 lei.

5. În prima zi din excursie Maria parcurge o treime din tot drumul și încă 10 km. În a doua zi parcurge jumătate din drumul rămas și încă 10 km, iar în a treia zi parcurge jumătate din noul rest și încă 50 km. Ce distanță a parcurs Maria?

a) 345 km; b) 700 km; c) 250 km; d) 800 km.

Punctaj: 1p; 2p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR

SĂ NE AMINTIM!

Am învățat în clasele primare cum să organizăm un set de date într-un tabel, să reprezentăm datele prin grafice cu bare, liniare și circulare, să extragem informații, să le analizăm și să le interpretăm.

➤ Alina a studiat numărul de cărți împrumutate de la bibliotecă de elevii unei școli, în primul semestru. Ea a ales să organizeze datele în următorul tabel:

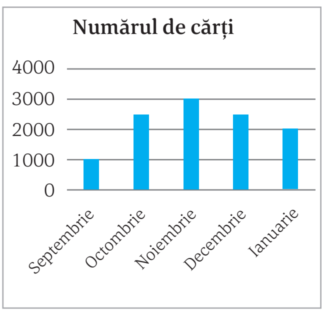
Luna	Septembrie	Octombrie	Noiembrie	Decembrie	Ianuarie
Numărul de cărți	1000	2500	3000	2500	2000

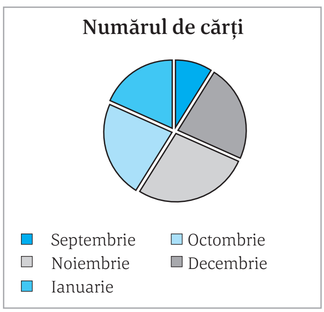
Desigur că Alina putea organiza datele folosind și alte criterii: numărul de cărți citite în fiecare săptămână sau numărul de cărți citite pe domenii sau numărul de cărți citite de fete sau de băieți, etc.

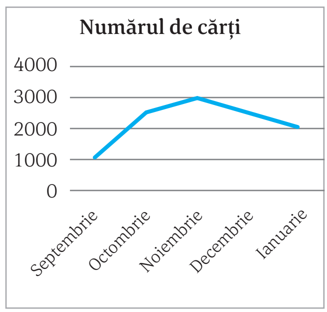
Reprezentați datele culese de Alina într-un grafic cu bare, într-un grafic circular și într-un grafic liniar.

Câte cărți au fost citite, în total, în lunile noiembrie și decembrie? Dar în ultimele două luni ale semestrului? Cu cât este mai mare numărul de cărți citite în luna noiembrie față de numărul de cărți citite în luna septembrie? Câte cărți au fost citite, în total, în primul semestru? Care este luna în care a fost citit cel mai mare număr de cărți? Dar cel mai mic?

Rezolvare:







Rezultate: 5500; 4500; 2000; 11000; noiembrie și septembrie.

Pentru realizarea graficelor procedăm astfel: trecem datele într-un tabel și selectăm tabelul. În meniul INSERT, la căsuța CHARTS, alegem tipul de grafic pe care vrem să-l prezentăm (în word sau excel).

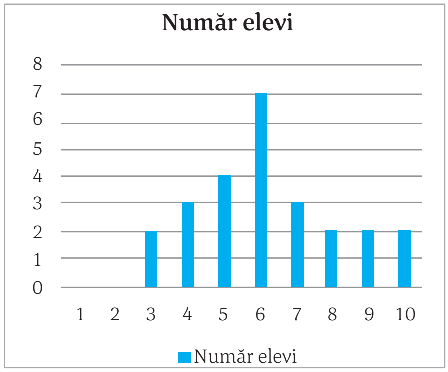
➤ Să analizăm notele obținute de elevii unei clase la testul de matematică. Notele obținute de cei 25 de elevi ai clasei sunt: 3, 5, 6, 8, 5, 6, 7, 9, 10, 6, 3, 4, 7, 8, 6, 6, 6, 5, 4, 6, 4, 5, 7, 10, 9. Spunem că am făcut culegerea datelor și acum vrem să le interpretăm. Pentru aceasta ar fi mai ușor să grupăm aceste date și să le prezentăm sub forma unui tabel.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	0	0	2	3	4	7	3	2	2	2

Observăm că nota 3 a fost luată de 2 elevi; spunem că valoarea 3 are *frecvența* 2. Valoarea 6 are *frecvența* 7, adică 7 elevi au obținut nota 6. Care este frecvența valorilor 10, 8, 4?

Frecvența apariției unei proprietăți este numărul natural care arată de câte ori apare respectiva proprietate în studiul realizat.

Vedeți alăturat reprezentarea datelor într-un grafic cu bare. Dacă analizăm graficul cu bare putem spune că: 2 elevi au nota 3, nota 6 a fost obținută de cei mai mulți elevi (7), nota 5 a fost obținută de 4 elevi.



De obicei, la fiecare test calculăm și *media* notelor:

$$\frac{3+5+6+8+5+6+7+9+10+6+3+4+7+8+6+6+6+5+4+6+4+5+7+10+9}{25} = 6{,}2$$

Pentru a calcula mai ușor media aritmetică putem grupa notele și, în loc să trecem o notă de mai multe ori, trecem fiecare notă o singură dată și o înmulțim cu numărul de apariții: $\frac{3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot7+7\cdot3+8\cdot2+9\cdot2+10\cdot2}{25} = 6{,}2$.

Media unui set de date statistice este media aritmetică a datelor respective.

Putem analiza datele și pe tranșe de note sau după o altă grupare:

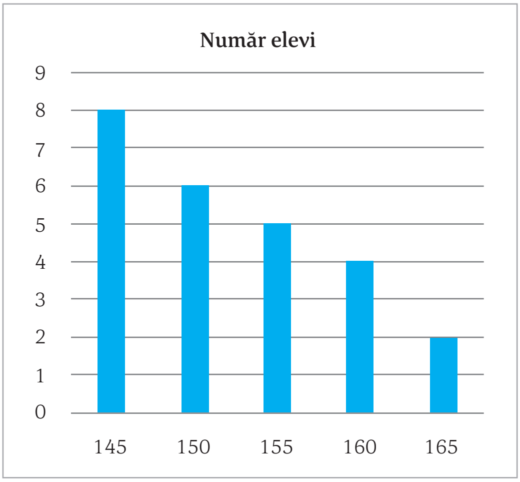
Note între	1-5	6-8	9-10
Număr de elevi	9	12	4

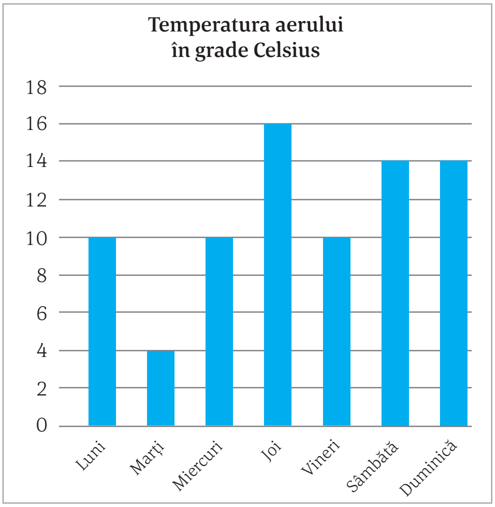
Realizați un grafic circular pentru acest tabel.

PROBLEME PROPUSE:

1. La ora de educație fizică a fost măsurată înălțimea elevilor clasei noastre. În graficul alăturat este prezentată această măsurătoare. Înălțimea elevilor este exprimată în cm.

Prezentați datele într-un tabel. Câți elevi sunt în clasă? Care este frecvența înălțimii de 150 cm? Dar de 160 cm? Care este media înălțimilor elevilor clasei?





2. În diagrama alăturată sunt redate temperaturile măsurate pe parcursul unei săptămâni.

a) Completați datele din diagramă într-un tabel.

b) Calculați temperatura medie a săptămânii.

3. La ora de educație fizică, 8 elevi au făcut o cursă de rezistență. După cinci minute s-au notat distanțele parcurse. Iată tabelul cu rezultatele obținute:

a) Ordonează distanțele de la cea mai mică la cea mai mare.

b) Cine a parcurs cea mai mare distanță?

c) Cine a parcurs cea mai mică distanță?

d) Care sunt elevii care au parcurs o distanță mai mică de 760 m?

Prenumele elevilor	Distanțele parcurse în metri
Cristina	803
Dorin	736
Bogdan	754
Amalia	712
Elena	763
Raluca	813
Anton	750
Ștefan	721

Să exersăm:

1. Cei 30 de elevi din clasa a V-a au obținut la sfârșitul semestrului I următoarele medii: 5, 7, 7, 8, 6, 9, 10, 6, 9, 8, 5, 6, 8, 7, 8, 10, 9, 9, 7, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 7, 8, 7, 10, 7.

a) Reprezentați datele într-un tabel de forma:

Media	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi						

b) Reprezentați datele într-un grafic cu bare.

c) Care este frecvența fiecărei medii?

d) Calculați media clasei.

e) Reprezentați datele într-un tabel de forma următoare:

Media	Medii între 5 și 7	Medii între 7 și 9	Medii de 10
Număr de elevi			

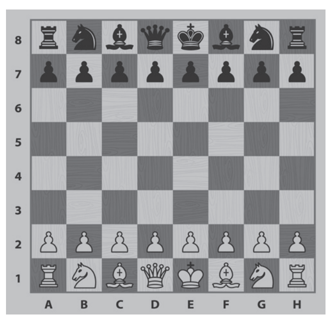
f) Reprezentați datele într-un grafic circular.

Rezultat:

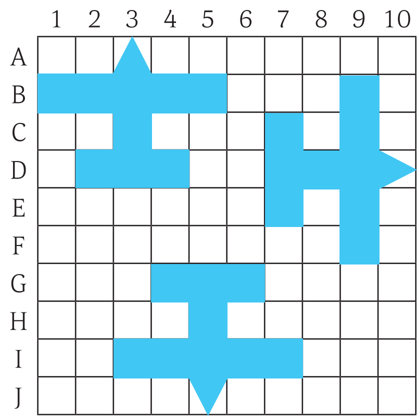
Media	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	5	9	6	5	3

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

Să ne orientăm pe tabla de șah. Șahul este jucat pe o tablă care este împărțită în 64 de pătrățele (8 x 8) de culori alternative. Indiferent de culorile exacte de pe tablă, pătrățele de culoare deschisă se numesc albe, iar cele de culoare închisă se numesc negre. Fiecare câmp de pe tabla de șah este identificat cu un cuplu unic dintre o literă și un număr. Șirurile verticale — denumite coloane (8) — sunt marcate cu litere de la A la H, de la stânga albului (flancul reginei) la dreapta albului (flancul regelui). Similar, șirurile orizontale — denumite linii (8) — sunt numerotate de la 1 la 8, începând de la orizontala de lângă alb. Deci, fiecare pătrățel de pe tablă este identificat cu litera verticalei și numărul orizontalei. Regele alb, de exemplu, începe jocul de pe pătrățelul E1, iar calul negru de pe B8 și poate muta pe A6 și C6. Găsiți locul pe tabla de șah a fiecărei piese.



SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!



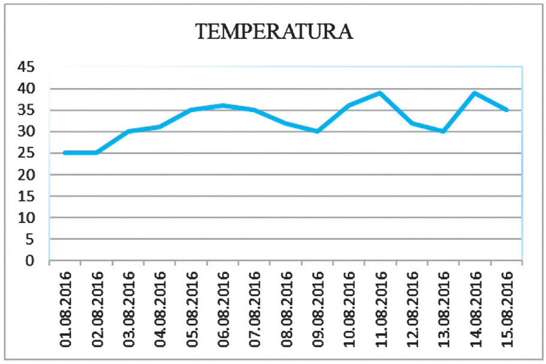
Avioane este un joc la care pot participa doi sau mai mulți copii. Fiecare copil trasează pe o foaie de matematică (ce nu trebuie văzută de adversari) atâtea pătrate de 10 x 10 căsuțe câți participanți sunt la joc. Coloanele se notează cu cifre de la 1 la 10, iar liniile cu litere de la A la J (sau invers). În primul careu de pe foaia lui, fiecare copil desenează 3 avioane asemănătoare cu cele din figura alăturată, situate în diverse poziții. Avioanele au un cap (un triunghi), aripi cu lățimea totală de 5 căsuțe, apoi un corp de 1 căsuță și o coadă lată de 3 căsuțe. Cele 3 avioane nu trebuie să se suprapună și nici să depășească limita careului. Fiecare copil va avea un careu cu avioanele sale (pe care trebuie să le ghicească adversarii) și careuri goale (în care va încerca să ghicească cum sunt așezate avioanele fiecărui adversar). Scopul jocului este să identifici primul poziția avioanelor adversarilor. Pe rând, fiecare copil îl întreabă pe altul despre o căsuță (B5 să zicem). În funcție de ceea ce are la B5, adversarul îi răspunde: „Cap" – dacă a nimerit capul vreunui avion, „Corp" – dacă a nimerit restul avionului, „Aer" – dacă nu a nimerit niciun avion. Apoi rolurile se schimbă și tot așa. Pentru a descoperi avioanele adversarului, fiecare copil desenează în careul gol al acestuia ceea ce răspunde, până când găsește cele trei avioane.

PROBLEME PROPUSE:

1. La Olimpiada Națională de Matematică au participat 100 de elevi la clasa a V-a, care au obținut, pentru fiecare problemă, punctajele reprezentate în tabelul alăturat. Calculați media punctajelor pentru fiecare problemă. Reprezentați datele într-un grafic cu bare pentru fiecare problemă.

	0 p	1 p	2 p	3 p	4 p	5 p	6 p	7 p
Problema 1	15	16	14	10	20	10	10	5
Problema 2	20	15	15	13	10	15	8	4
Problema 3	25	24	16	14	8	7	4	2
Problema 4	30	21	14	19	9	5	2	0

2. În graficul alăturat este prezentată evoluția temperaturilor în prima jumătate a lunii august. Ce zile au fost cele mai călduroase? În ce zile temperatura a fost cea mai scăzută? Realizați un tabel în care să prezentați datele din grafic.



3. Căutați pe Google Maps și completați tabelul de mai jos cu distanțele dintre localitățile indicate.

	București	Brașov	Sibiu	Ploiești	Pitești	Deva	Alba Iulia	Craiova	Buzău
București									
Brașov									
Sibiu									
Ploiești									
Pitești									
Deva									
Alba Iulia									
Craiova									
Buzău									

PROIECT

Mihai vrea să organizeze o excursie cu autocarul, de 4 zile, pe traseul București – Sinaia – Brașov (prima noapte) – Făgăraș – Sibiu (a doua noapte) – Deva – Târgu Jiu (a treia noapte) – Craiova – Pitești – București. Autocarul are 40 de locuri.

Realizați un proiect (pe grupe) care să prezinte:

• programul pentru această excursie (obiective turistice ce pot fi vizitate pe traseu);
• locurile de cazare (căutați pe net cazări în orașele fixate pentru noapte și alegeți prețuri convenabile);
• numărul de kilometrii parcurși în fiecare zi, ținând cont și de deviațiile de la traseu pentru vizite (căutați pe net distanțele dintre orașe);
• prețul transportului (autocarul consumă aproximativ 40 *l* de motorină la 100 km parcurși, iar 1 *l* de motorină costă 4,88 lei);
• prețul excursiei pentru fiecare participant (prețul să conțină: drum, cazare, intrări la obiective turistice, prânzul și cina).

3 ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Punctul, linia (dreaptă, zig-zag sau ondulată), triunghiul, pătratul sau rombul au fost folosite ca elemente pentru înfrumusețarea unor obiecte încă din cele mai vechi timpuri, fie prin picturi pe obiecte ceramice sau ouă încondeiate, fie prin sculpturi în lemn sau cusături pe materiale.

ELEMENTE DE GEOMETRIE
Elemente de geometrie

Știați că...

Geometria este una dintre cele mai vechi științe. Cuvântul „Geometrie” provine din limba greacă: „geo” care înseamnă pământ și „meatria” care înseamnă măsură. Ea a apărut cu multe mii de ani în urmă. Egiptenii și caldeenii descoperiseră reguli practice pentru măsurarea ariilor și volumelor. În Grecia antică, geometria a fost dezvoltată foarte mult de către Thales, Pitagora și Euclid.

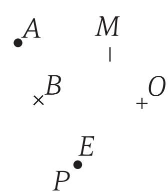
Cuvintele *punct, segment, extremitate, plan* provin din limba latină: *punctum* = *înțepătură, punct; segmentum* = parte tăiată; *extremus* = margine; *planus* = neted.

SĂ NE AMINTIM!

În clasa a IV-a ați făcut cunoștință cu noțiuni ca: punct, dreaptă, plan, segment de dreaptă, semidreaptă, unghi, triunghi, pătrat, cerc și altele, despre care am văzut că se pot „desena” și că reprezintă ceea ce se cheamă „figuri geometrice”. De asemenea, ați aflat că figurile geometrice se desenează cu ajutorul „instrumentelor”: riglă gradată, riglă negradată, echer, compas, raportor.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Punctul este una dintre noțiunile fundamentale ale geometriei. *Punctul* poate fi descris ca fiind *urma lăsată pe hârtie de vârful unui creion foarte bine ascuțit,* sau *ca înțepătura unui vârf de ac*. Chiar dacă atunci când îl reprezentăm pare mai mare sau mai mic, mai gros sau mai subțire, el nu are dimensiune. Prin desen el se reprezintă în diverse moduri și se notează cu litere mari de tipar. În figura alăturată observăm că:



• punctele A și B ocupă locuri diferite în planul hârtiei și de aceea le vom numi puncte *diferite* sau puncte *distincte*. Vom nota acest lucru $A \neq B$.

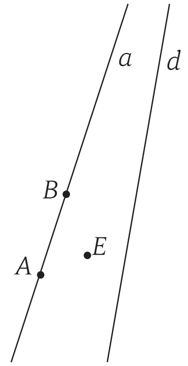
• punctele P și E ocupă același loc și se numesc puncte *identice* sau *confundate* (sau coincid). Notăm $P = E$.

Să exersăm:

Să privim în jur și să identificăm *puncte* în clasă: oricare dintre colțurile caietului este un punct; urma lăsată de cui pe perete, sau chiar cuiul de care este agățată harta privit de la distanță, este un punct pe planul peretelui; o piatră din curtea școlii, privită de pe geam, este un punct în planul pământului.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

O altă noțiune fundamentală a geometriei este ***dreapta.*** Despre ea putem spune că este ca un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins, nemărginit și într-o parte și în cealaltă. Prin desen, ***dreapta*** se reprezintă, cu ajutorul riglei, ca în figura alăturată și se notează cu o literă mică sau cu două litere mari (două puncte ale dreptei). Cele două drepte din figura alăturată au fost notate a și d, dar dreapta a mai este notată și AB (scriem și $a = AB$).



Considerând oricare 2 puncte distincte, putem trasa o singură dreaptă care să treacă prin ele. Cu alte cuvinte: ***două puncte distincte determină o singură dreaptă.***

Să exersăm:

Marginea băncii în care stați sau linia care se obține la îmbinarea peretelului cu tavanul (dacă vă imaginați că sunt prelungite). Marginea trotuarului pe care mergeți când veniți la școală sau dunga trasă pe stradă pentru a delimita cele două direcții de mers. Toate acestea pot fi privite ca reprezentări ale dreptei.

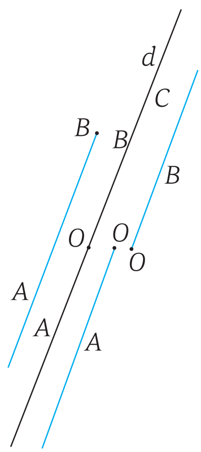
SĂ ÎNVĂȚĂM!

Semidreapta este o porțiune dintr-o dreaptă, mărginită la un capăt și nelimitată în celălalt capăt. Capătul în care semidreapta este mărginită se numește ***originea*** semidreptei.

Fie trei puncte distincte pe o dreaptă d: A, O și B, astfel încât O este între A și B. Există exact două semidrepte cu originea în O:

- semidreapta OA, cu originea în O și căreia îi aparține A;
- semidreapta OB, cu originea în O și căreia îi aparține B.

Aceste două semidrepte, care ***au aceeași origine, nu au puncte comune*** și ***sunt incluse în aceeași dreaptă*** (d) se numesc ***semidrepte opuse***. Dreapta d se numește ***dreapta suport*** a celor două semidrepte. Notăm $[OA$ și $[OB$.



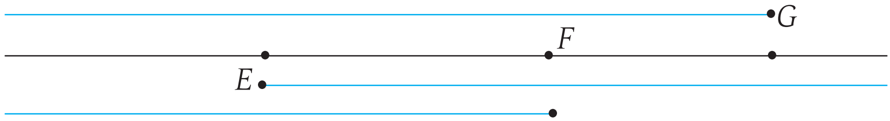
Punctele B și A formează și ele semidreapta BA, în care B este originea (vezi desenul alăturat). Întotdeauna când vom nota o semidreaptă, prima literă va fi originea. Semidreapta BA se notează $[BA$.

Semidreapta OC, cu originea în O și care trece prin C, este aceeași cu semidreapta OB. Spunem că ele sunt ***identice***.

Să exersăm:

➢ Raza de lumină care pleacă din lanternă poate fi gândită ca o reprezentare a unei semidrepte (lanterna este originea). Umbra unui stâlp, unde baza stâlpului este originea, poate fi interpretată tot ca reprezentarea unei semidrepte.

➢ În figura următoare am pus în evidență, cu altă culoare, semidreptele GE, EF și FE.

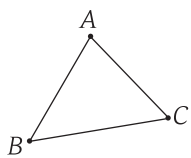


SĂ ÎNVĂȚĂM!

Considerăm două puncte distincte, *C* și *D,* pe o dreaptă ***d***.

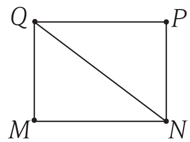
Porțiunea de pe dreaptă cuprinsă între cele două puncte se numește ***segment de dreaptă*** sau, pe scurt, ***segment***. Cele două puncte, *C* și *D*, se numesc ***extremitățile segmentului*** sau ***capetele segmentului***. Dreapta ***d*** se numește ***dreapta suport*** a segmentului. Notăm: segmentul *CD* sau *DC*.

Să exersăm:

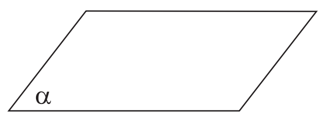


➢ Marginile caietului, ale cărții, ale tablei sunt segmente. O scobitoare, un băț de chibrit, un creion (dacă nu ne gândim la grosimea lui) se reprezintă prin segmente.

➢ În triunghiul alăturat, vârfurile sunt punctele *A*, *B* și *C,* iar laturile sunt segmentele *AB*, *BC* și *AC*. În dreptunghiul alăturat, vârfurile sunt punctele *M*, *N*, *P* și *Q,* iar laturile sunt segmentele *MN*, *NP*, *PQ* și *QM*. Segmentul *NQ* se numește ***diagonală a dreptunghiului.***

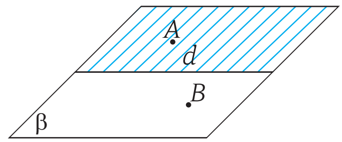


SĂ ÎNVĂȚĂM!



Planul este altă noțiune fundamentală a geometriei. El este comparabil cu suprafața unul lac fără niciun val, cu suprafața unei foi de hârtie sau cu suprafața tablei din clasă, închipuindu-ne că acestea sunt prelungite la nesfârșit în toate părțile. De asemenea, vom considera că el nu are grosime. Planul conține o infinitate de puncte dar, atunci când îl reprezentăm, desenăm doar o parte a lui (ca în figură). Pentru notarea planului folosim litere mici ale alfabetului grecesc: α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta), etc.

Fie dreapta *d,* într-un plan β. Observăm că dreapta împarte planul în două regiuni (hașurate diferit). Vom numi aceste regiuni ***semiplane*** mărginite de dreapta ***d***. Orice punct al planului care nu se află pe dreapta ***d*** este situat în unul dintre cele două semiplane. Notația unui semiplan se face cu ajutorul dreptei care îl mărginește și cu unul dintre punctele sale. De exemplu semiplanul de deasupra dreptei ***d*** este semiplanul (***dA,*** iar celălalt este semiplanul ***(dB***.

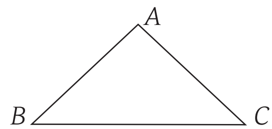


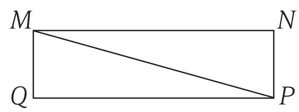
Să exersăm:

➢ Pereții clasei sunt reprezentări ale planului. Despre corpurile geometrice se spune că sunt corpuri mărginite de plane, deci fețele unui cub sau ale unei piramide sunt reprezentări ale unor plane. Muchiile lor sunt segmente, iar vârfurile sunt puncte.

➢ În figurile alăturate, numiți punctele evidențiate. Scrieți apoi segmentele existente în aceste figuri.

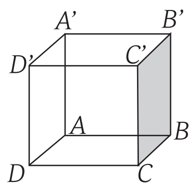
Rezolvare. Vârfurile figurilor sunt puncte, respectiv *A, B, C, M, N, P* și *Q*. Segmentele care apar în aceste figuri sunt: *AB, BC, CD, MN, NP, PQ, MQ* și *MP*.

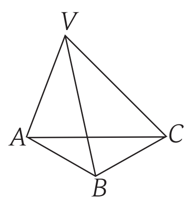




➢ Ce figuri geometrice sunt muchiile corpurilor alăturate? Numiți-le! Dar vârfurile?

Rezolvare. Muchiile sunt segmente: *AB, BC, CD, DA, A'B', B'C', C'D', D'A', AA', BB', CC', DD'* (pentru cub) și *VA, VB, VC, AB, AC, BC* (pentru piramidă). Vârfurile lor sunt puncte (de exemplu, vârfurile piramidei sunt punctele *V, A, B* și *C*).





PROBLEME PROPUSE:

1. Desenați două punte diferite, *M* și *N.* Desenați apoi dreapta *MN.*

3. Desenați un punct *A*. Câte drepte trec prin el?

4. Desenați o dreaptă *d* și trei puncte diferite, *C, D* și *E,* situate pe dreaptă. Colorați și numiți toate semidreptele care se formează cu câte două dintre punctele date.

5. Pe o dreaptă desenați punctele *A, B, C,* în această ordine. Numiți toate segmentele care se formează.

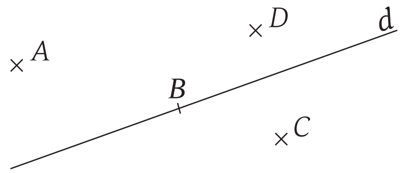
6. Desenați segmentele *AB*, *BC* și *CD* astfel încât punctele *A, B, C* și *D* să nu fie toate pe aceeași dreaptă.

7. Desenați un plan α și în el 3 puncte distincte și 2 drepte.

Poziții relative ale unui punct față de o dreaptă

SĂ ÎNVĂȚĂM!

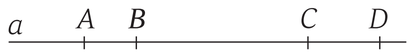
✓ Imaginați-vă că avem desenate în plan o dreaptă ***d*** și mai multe puncte oarecare: *A, B, C, D*. Ce observați?



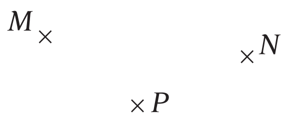
Există două posibilități: vor fi puncte care sunt „străbătute” de dreaptă, deci puncte situate pe dreaptă (în cazul nostru, punctul *B*) și puncte nesituate pe dreapta respectivă, de-o parte sau de alta a ei (punctele *A, C* și *D*).

Un punct și o dreaptă pot să aibă următoarele ***poziții relative***: punctul este situat pe dreaptă sau punctul nu este situat pe dreaptă.

✓ Am văzut că dreapta este formată din puncte. Deci putem desena o dreaptă și să luăm oricâte puncte dorim pe ea. De exemplu, fie dreapta ***d*** și, pe ea, punctele *A, B, C* și *D*. Despre aceste ***puncte*** spunem că sunt ***coliniare***, deoarece ele se află pe aceeași dreaptă.

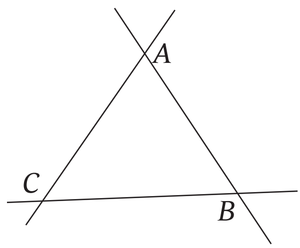


✓ În cazul în care ***punctele*** nu sunt pe aceeași dreaptă, deci nu sunt coliniare, spunem că sunt ***necoliniare***. De exemplu, punctele *M, N* și *P* nu sunt coliniare pentru că nu există o dreaptă care să treacă prin toate trei.



Să exersăm:

➢ Să desenăm trei puncte în plan. Câte drepte determină ele?



Vom avea două situații:

• cele trei puncte sunt coliniare – în acest caz, există o singură dreaptă determinată de ele;

• cele trei puncte nu sunt coliniare – în acest caz vom uni câte două dintre ele și vor fi evidențiate astfel trei drepte distincte.

În rezolvarea exercițiului de mai sus am folosit un lucru pe care îl știam, anume că *orice două puncte sunt coliniare*. Așadar, dându-se două puncte în plan, ele pot fi unite printr-o singură dreaptă și numai una!

Matematicienii enunță acest lucru astfel: *Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.*

♦ Poziții relative a două drepte

SĂ NE AMINTIM!

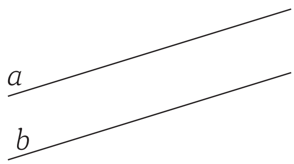
✓ Să privim marginea de sus și marginea de jos a tablei și să considerăm că acestea sunt două drepte. Ele nu au puncte comune și ne imaginăm că, oricât le-am prelungi, nu se întâlnesc (altfel tabla ar fi „strâmbă”).

✓ Să ne gândim la urma lăsată pe cer de un avion cu reacție. Un alt avion trece pe o altă rută, lăsând și el o urmă. Să considerăm că acestea sunt două drepte. Se observă că ele au un punct comun.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

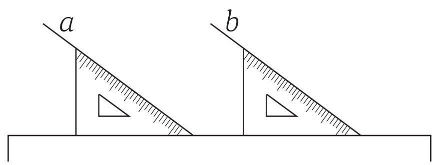
Dându-se două drepte *(a)* și *(b)*, ce poziție pot să aibă una față de cealaltă?

Dreptele pot să fie așezate în așa fel încât să nu aibă niciun punct comun. În acest caz, ele se numesc ***drepte paralele*** (în clasele mici obișnuiați să spuneți că „nu se întâlnesc niciodată”...). Vom nota $a \parallel b$.



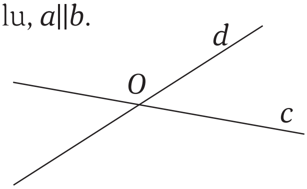
Dați exemple de drepte paralele din clasă sau din mediul înconjurător.

Construim dreptele paralele cu ajutorul riglei și al echerului, astfel: o latură a echerului „se sprijină” pe riglă (care e fixă). Mișcăm echerul pe riglă și trasăm drepte pe aceeași latură a acestuia, în diverse poziții ale lui. Acestea vor fi paralele. De exemplu, $a \parallel b$.

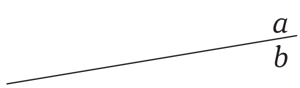


Dreptele pot să aibă un singur punct comun. Se spune că dreptele sunt ***drepte concurente***.

Dați exemple de drepte concurente din jurul vostru.



Dreptele pot să aibă toate punctele comune (ca și cum am desena o dreaptă, iar pe a doua o desenăm „peste” prima). În acest caz se spune că ***dreptele coincid*** sau că sunt ***drepte confundate***.



PROBLEME PROPUSE:

1. În planul α desenați o dreaptă *a* și punctele *A* și *B*, de o parte și de alta a dreptei.

2. Desenați trei puncte coliniare. Notați și numiți punctele și dreptele care apar în desen.

3. Desenați patru puncte în plan. Cum pot fi ele așezate unele față de altele?

Indicație: Pot să fie coliniare, sau doar trei dintre ele coliniare, sau, al treilea caz, oricare trei dintre ele să fie necoliniare. Acum desenați fiecare caz în parte!

4. Desenați trei puncte coliniare și un al patrulea necoliniar cu ele. Construiți și apoi numiți toate dreptele care se formează.

5. Desenați dreptele *AB* și *CD*, paralele.

6. Desenați punctele *A*, *B*, *C* și *D* astfel încât oricare trei să nu fie coliniare.

a) Așezați-le astfel încât dreptele *AC* și *BD* să fie concurente.

b) Așezați-le astfel încât dreptele *AC* și *BD* să fie paralele.

7. Câte drepte trec printr-un punct?

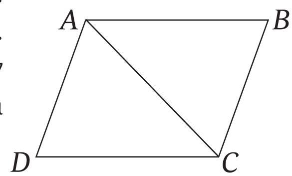
8. Câte drepte trec prin două puncte diferite?

9. Câte drepte distincte trec prin trei puncte coliniare?

10. Desenați trei drepte care au un singur punct comun.

11. Desenați trei drepte care nu au niciun punct comun.

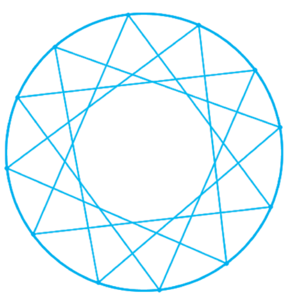
12. Scrieți toate perechile de drepte paralele, respectiv concurente, din figură. (Convenim să considerăm dreapta *AB*, dreapta din care face parte segmentul *AB*).

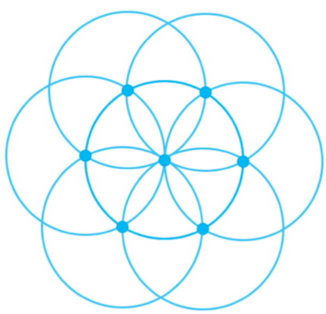


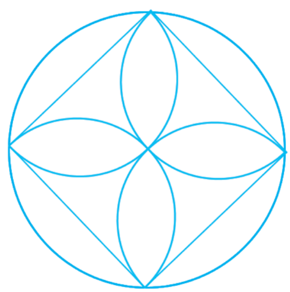
13. Se dau două drepte care au două puncte comune. Ce puteți spune despre ele în acest caz?

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

• Vă place să desenați? Haideți să învățăm să desenăm mandale. Mandala este o diagramă alcătuită din mai multe cercuri, triunghiuri și pătrate combinate în fel și chip. După ce le desenați, colorați desenele cum vreți voi. Vă arătăm câteva desene și vă propunem să le colorați.

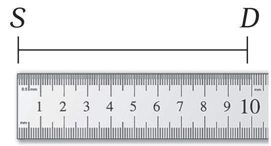






Lungimea unui segment

Să ne imaginăm că Sorin și Dana sunt două „puncte” în curtea școlii, *S* și *D*. Ne interesează ***distanța dintre cele două puncte.*** În primul rând, am văzut mai devreme că, dacă avem două puncte distincte, există o singură dreaptă care trece prin ele. Așadar, vom uni cele două puncte, formând segmentul *SD*. Ce mai avem de făcut? Să măsurăm ***lungimea*** acestui segment. Cum măsurăm? Cu ajutorul riglei gradate pe care o așezăm „sub” segment, cu diviziunea „zero” într-un capăt al segmentului, de exemplu în *S* și vedem ce diviziune de pe riglă corespunde celuilalt capăt al segmentului, adică lui *D*. Cu alte cuvinte, vedem de câte ori se cuprinde unitatea de măsură (centimetrul sau milimetrul) în segmentul *SD*.



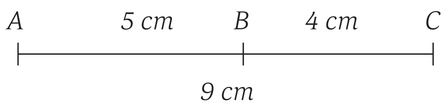
Așadar, ***distanța dintre două puncte*** este lungimea segmentului determinat de ele. ***Lungimea*** segmentului *SD* o notăm cu *SD*. S-a folosit ca instrument de măsură ***rigla***.

Dați și voi exemple de instrumente cu care măsurăm lungimi. Ce alte instrumente, mai puțin „științifice”, se pot folosi pentru determinarea lungimilor?

Să exersăm:

Sunt date trei puncte: *A, B* și *C* astfel încât *AB* = 5 cm, *BC* = 4 cm și *AC* = 9 cm. Arătați că punctele sunt coliniare.

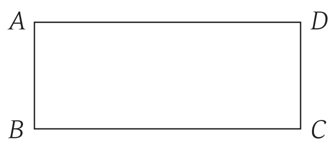
Rezolvare: 4 + 5 = 9, deci *AB* + *BC* = *AC*. Așadar punctele *A, B* și *C* sunt coliniare.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Să desănăm două segmente, *AB* și *CD*, fiecare având lungimea de 5 cm. Ce putem spune despre ele? Deoarece segmentele sunt formate din puncte, foarte multe puncte, nu putem pune semnul „egal” între ele, ci vom folosi altă noțiune și anume: ***Dacă două segmente au lungimile egale, spunem că segmentele sunt congruente.*** Vom scrie: $AB \equiv CD$.

Să exersăm:

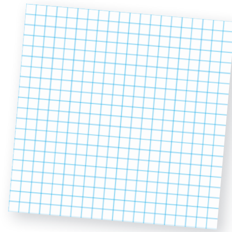


➢ În dreptunghiul din figură, scrieți segmentele congruente.

Rezolvare: Segmentele *AD* și *BC* reprezintă lungimea dreptunghiului și sunt congruente. Deci, $AD \equiv BC$.
Segmentele *AB* și *CD* reprezintă lățimea dreptunghiului și $AB \equiv CD$.

➢ Desenați, pe caietul de matematică, un segment cu lungimea de cinci pătrățele. Desenați apoi un segment congruent cu el.

Rezolvare: Cum segmentul inițial și cu cel pe care îl construiți sunt congruente, ele au lungimile egale. Deci, al doilea segment va avea tot cinci pătrățele.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Așadar, putem construi un segment congruent cu un segment dat folosind rigla gradată.

Există însă și o altă metodă, folosind rigla negradată și compasul.

Astfel, dacă se dă un segment *AB* de 7 cm, cu rigla negradată vom construi alături o dreaptă pe care vom fixa un punct *C*. Apoi, vom pune acul compasului în punctul *A* și celălalt vârf al compasului în punctul *B*. În continuare, vom pune acul compasului în punctul *C* și vom trasa un semn cu celălalt capăt al compasului pe dreaptă. Acesta va fi punctul *D* și avem că $AB \equiv CD$.

SĂ NE JUCĂM!

Doi copii sunt două „puncte”. Al treilea copil primește comanda „așează-te la mijloc”. El se va așeza pe segmentul determinat de cele două puncte, într-un punct care este egal depărtat de capetele segmentului.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Deci *mijlocul unui segment,* ca figură geometrică, este un punct! Unde este situat el? Pe segmentul determinat de cele două puncte. Dar, unde anume? Sau, ce proprietate deosebită are acest punct (pentru că, este evident că el nu este un punct oarecare așezat undeva, la întâmplare)?

Distanțele de la el la fiecare dintre capetele segmentului sunt egale. Așadar: *Mijlocul unui segment este un punct, situat în interiorul segmentului și care împarte segmentul în două segmente congruente.*

Să exersăm:

Luați o bucată de sfoară. Suprapuneți cele două capete ale sale. Întindeți bine! Ce ați obținut?

Răspuns: Capetele sforii fiind suprapuse, în partea cealaltă am obținut chiar mijlocul segmentului. Cele două porțiuni ale sforii, care sunt una lângă alta, sunt segmente congruente.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Se dă un segment AB și fie M mijlocul său. Am văzut că distanța de la M la A este egală cu distanța de la M la B. În acest caz, spunem că *A este simetricul lui B față de M.*

Cum A, B, M sunt puncte, deducem următoarele:

1. Simetricul unui punct A față de un punct M este un punct B.
2. Acest punct B (adică simetricul) are proprietatea că se află la aceeași distanță față de punctul M ca și punctul al cărui simetric este, adică A.

PROBLEME PROPUSE:

1. Desenați pe caietul de matematică segmente care să aibă următoarele lungimi: 4 pătrățele, 7 pătrățele, 10 pătrățele. Măsurați-le apoi și exprimați în centimetri.

2. Desenați trei puncte în plan. Uniți-le și apoi măsurați distanța dintre oricare două. Exprimați rezultatele obținute în milimetri.

3. Se dau punctele M, N, P și Q astfel încât $MN = 3$ cm, $NP = 4$ cm și $PQ = 2$ cm. Se știe că $MQ = 9$ cm. Arătați că cele patru puncte sunt coliniare.

4. Se consideră punctele coliniare M, N *și* P, în această ordine, astfel încât $MN \equiv NP$ și lungimea lui MN este de 4 cm. Calculați lungimea segmentului MP.

5. Se dă un segment CD cu lungimea de 7 cm. Construiți un segment congruent cu CD și care să aibă un capăt comun cu acesta.

6. Se consideră punctele coliniare M, N și P, astfel încât $MN = MP$, iar lungimea lui MN este de 6 cm. Calculați MP și NP.

7. Desenați un segment de lungime 6 cm. Construiți mijlocul său, M.

8. Construiți în plan două segmente, care să aibă același mijloc.

9. Fie punctele A, O și B, astfel încât A este între O și B. Știm că $AO = 5$ cm și $BO = 9$ cm. Dacă M este mijlocul segmentului AB, aflați lungimea segmentului OM.

10. Se consideră punctele coliniare A, B, C, D, E, în această ordine, astfel încât B este mijlocul lui AC, C este mijlocul lui AD și D, mijlocul lui AE. Dacă lungimea segmentului AB este de 2 cm, aflați lungimea segmentului AE.

11. Desenați în plan două puncte: P și Q. Determinați simetricul lui P față de Q.

12. Desenați două puncte în plan, A și B. Desenați simetricul lui A față de B și apoi, simetricul lui B față de A.

13. Se dau punctele A, B și C, coliniare în această ordine. Dacă C este simetricul lui A față de B, ce puteți spune despre B?

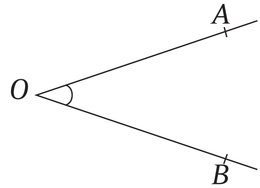
14. Desenați segmentul CD de 6 cm. Desenați simetricul lui C față de D. Fie acesta punctul E. Calculați lungimea segmentului CE.

15. Fie C simetricul lui A față de B și fie D simetricul lui A față de C. Dacă AB = 8 cm, determinați lungimea segmentului BD.

Unghiul

SĂ NE AMINTIM!

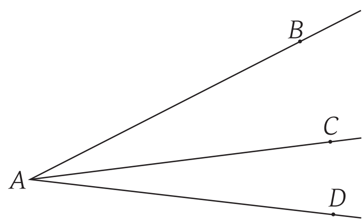
✓ Figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine se numește ***unghi***. Cele două semidrepte care formează unghiul se numesc ***laturile unghiului***, iar originea lor comună se numește ***vârf***.



✓ Pentru unghiul din figura alăturată, semidreptele *OA* și *OB* sunt laturile, iar *O* este vârful. Notăm $\sphericalangle AOB$ sau $\widehat{AOB}$ și citim „unghiul *AOB*”. Se poate nota și $\sphericalangle BOA$ deoarece, atunci când notăm sau citim un unghi, nu are importanță cu care latură începem, important este ca litera punctului din vârf să fie scrisă între celelalte două litere. Uneori, dacă este clar care sunt laturile unghiului, acesta se mai poate nota pe scurt, folosind doar litera corespunzătoare vârfului: $\sphericalangle O$ sau $\hat{O}$ (citim ***unghiul O***).

Să exersăm:

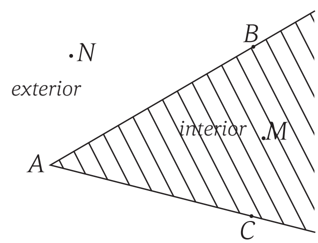
➢ Figura alăturată conține trei unghiuri:
$\sphericalangle BAC$, care are laturile $[AB$ și $[AC$;
$\sphericalangle CAD$, care are laturile $[AC$ și $[AD$;
$\sphericalangle BAD$, care are laturile $[AB$ și $[AD$.



Pentru această figură nu putem nota niciunul dintre unghiuri cu $\sphericalangle A$ deoarece nu ar fi clar la care ne referim.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

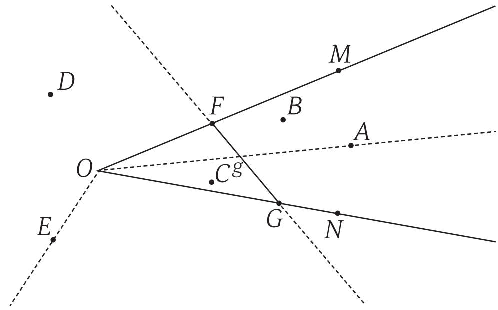
Pentru $\sphericalangle BAC$ din figura alăturată, partea hașurată reprezintă ***interiorul unghiului***. Partea din plan care nu aparține nici interiorului unghiului și nici laturilor unghiului reprezintă ***exteriorul unghiului***.



Afirmăm că ***interiorul unui unghi*** este format din toate punctele *M* din plan pentru care *C* și *M* se află de aceeași parte a dreptei *AB* și *B* și *M* sunt de aceeași parte a dreptei *AC*.

Observăm că punctul *N*, situat în exteriorul unghiului, se află de celalaltă parte a dreptei *AB* față de punctul *C*.

Să exersăm:



Desenați un unghi MON, punctele A, B, C în interiorul acestuia, punctele D, E în exteriorul unghiului și F și G pe laturile acestuia. Ce puteți spune despre semidreapta OA? Dar despre semidreapta OE? Construiți dreapta FG și spuneți ce reprezintă partea din această dreaptă situată în interiorul unghiului.

Rezolvare: Despre semidreapta OA putem spune că se află în interiorul unghiului; semidreapta OE este în exteriorul unghiului. Porțiunea din dreapta FG situată în interiorul unghiului este segmentul FG. Unghiul MON se mai poate nota și $\sphericalangle FOG$ sau $\sphericalangle MOG$ (adică putem folosi oricare dintre punctele de pe laturile unghiului).

PROBLEME PROPUSE:

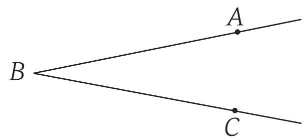
1. Completați, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Unghiul este format din două .... care au aceeași ....

b) Laturile unui unghi sunt ....

c) Vârful unghiului este ...... a celor două ...... care formează unghiul.

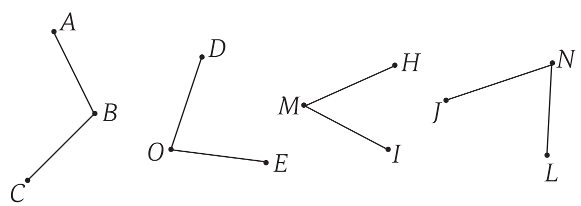
2. Care dintre notațiile următoare este corectă pentru a denumi unghiul din figura alăturată?



a) $\sphericalangle ABC$; b) $\sphericalangle BAC$; c) $\sphericalangle ACB$;
d) $\sphericalangle A$; e) $\sphericalangle B$; f) $\sphericalangle C$.

3. Completați, pe caiet, tabelul alăturat cu unghiurile și elementele acestora:

Unghi	Vârf	Laturi
$\sphericalangle ABC$	B	$[BA$, $[BC$



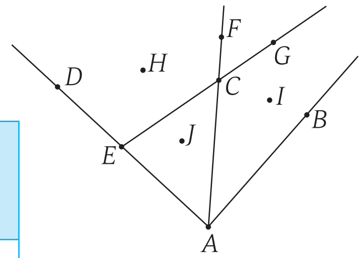
4. Considerăm semidreptele diferite OA, OB și OC astfel încât oricare două dintre ele să nu fie semidrepte opuse.

a) Câte unghiuri se pot forma având ca laturi aceste semidrepte?

b) Realizați un desen astfel încât interioarele unghiurilor formate (oricare două am considera) să nu aibă puncte comune.

c) Realizați un desen astfel încât interiorul unuia dintre unghiurile obținute să fie cuprins în interiorul altuia.

5. Numiți toate unghiurile din figura alăturată. Copiați și completați (conform exemplului) tabelul următor pe caiet:



Unghiul	Puncte din interiorul unghiului	Puncte din exteriorul unghiului
$\sphericalangle ECA$	J	D, H, F, G, I, B
...		

6. Realizați câte un desen în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\sphericalangle MNP$, punctele A, E și S în interiorul unghiului, punctele B, C și T în exteriorul unghiului, iar punctele D și F pe laturile unghiului;

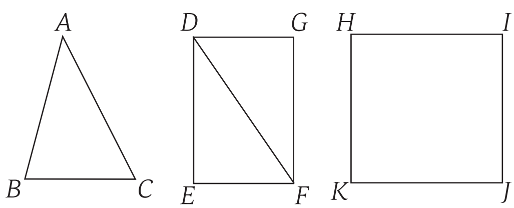
b) unghiurile $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle FBE$, astfel încât $\sphericalangle CBD$ este situat în întregime în interiorul $\sphericalangle FBE$;

c) unghiurile $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle FBE$, astfel încât $\sphericalangle CBD$ este situat în întregime în exteriorul $\sphericalangle FBE$;

d) unghiurile $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle FBE$, astfel încât latura BF să fie în interiorul $\sphericalangle CBD$, iar latura BE să fie în exteriorul $\sphericalangle CBD$;

e) unghiurile $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle FBE$, astfel încât punctele B, C și F să fie coliniare.

7. Identificați unghiurile din figurile alăturate, notați-le pe caiet și precizați în dreptul fiecăruia elementele.



Știați că...

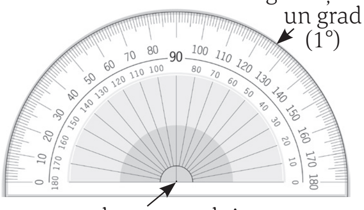
- Cuvântul *unghi* vine din limba latină: ***angulus = unghi*** (anguli = colț)
- Cuvântul ***latură*** vine din limba latină: ***latora = margine***.

Măsura unui unghi

SĂ NE AMINTIM!

În clasele mici s-a vorbit despre ***deschiderea*** unui unghi, sau, mai corect spus, despre ***deschiderea*** dintre semidreptele ce formează unghiul. Această deschidere poate fi măsurată, măsurarea ei reprezentând ***măsurarea unghiului***. Unitatea de măsură folosită la măsurarea unghiurilor este ***unghiul de un grad*** – scriem 1° și citim „un grad”.

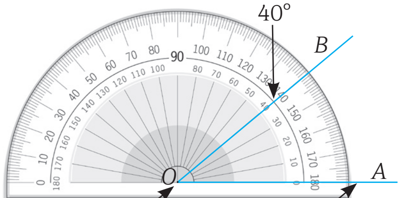
SĂ ÎNVĂȚĂM!



Măsura unui unghi se determină cu ajutorul unui instrument geometric numit ***raportor*** (figura alăturată). Observăm că ***raportorul*** arată ca un semicerc (adică o figură geometrică formată dintr-o jumătate de cerc), care este împărțit în 180 de părți egale, fiecare reprezentând 1°. Prin convenție, unghiul de un grad (1°) se poate împărți în 60 de diviziuni (părți egale), numite ***minute*** (sau ***minute de arc***). Notăm 1’ și citim „un minut”. Tot prin convenție, unghiul de un minut (1’) are 60 de secunde. Notăm 1” și citim „o secundă”. Deci $1° = 60'$, 1’= 60”, iar 1°= 3600”. Datorită acestei împărțiri a gradului în 60 de minute și a minutului în 60 de secunde, gradul se numește ***grad sexagesimal***, dar, de obicei, i se spune simplu, ***grad***.

Pentru unghiuri cărora le cunoaștem măsura scriem, de exemplu, $\sphericalangle AOB = 40°$ și citim „măsura unghiului *AOB* este egală cu 40 de grade”; $\sphericalangle MNP = 28°35'$ și citim „măsura unghiului *MNP* este egală cu 28 de grade și 35 de minute”.

Măsurarea unui unghi cu ajutorul raportorului

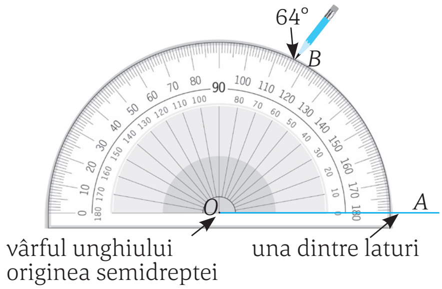


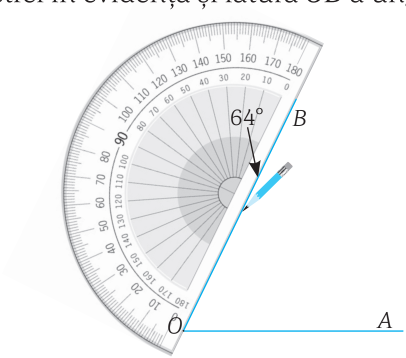
Pentru a măsura $\sphericalangle AOB$ vom așeza raportorul astfel încât centrul acestuia să fie în vârful *O* al unghiului, iar una dintre laturi, în cazul nostru latura *OA,* să fie în dreptul diviziunii 0°. Citim pe gradațiile raportorului numărul de grade care se află în dreptul celeilalte laturi a unghiului, în cazul nostru în dreptul laturii *OB*. Acest număr reprezintă măsura unghiului, notăm $\sphericalangle AOB = 40°$ și citim „măsura unghiului *AOB* este egală cu 40°”.

Nu orice unghi are măsura un număr natural de grade, sau un număr natural de grade și minute. Mai mult, datorită împărțirii gradului în 60 de diviziuni, este greu să măsurăm exact orice unghi. Din acest motiv, vom considera valorile determinate prin măsurare ca fiind aproximative.

Construirea unui unghi cu măsura dată

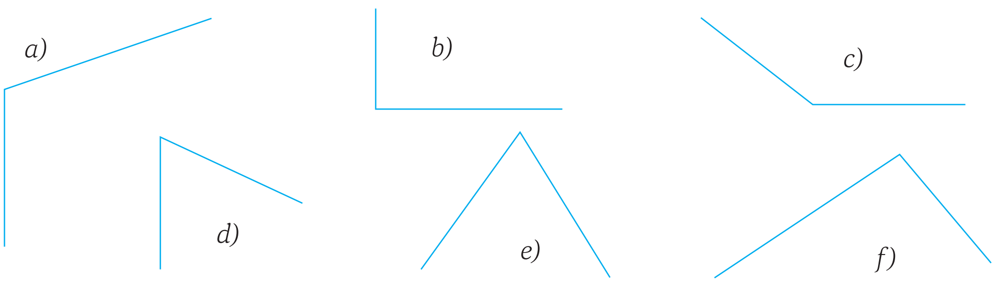
Pentru a desena $\sphericalangle AOB$, știind că $\sphericalangle AOB = 64°$, începem prin a desena semidreapta ***OA***. Așezăm raportorul cu centrul în ***O*** și cu diviziunea 0° pe semidreaptă. Cu ajutorul unui creion, desenăm un punct ***B*** în dreptul diviziunii 64° (atenție, se citește de la diviziunea 0° spre 64° – pe desenul nostru pe diviziunile din interior). Unim punctul ***O*** cu punctul ***B***, punând astfel în evidență și latura ***OB*** a unghiului.





PROBLEME PROPUSE:

1. Măsurați unghiurile alăturate și scrieți pe caiete măsurile lor.



2. Desenați, cu ajutorul raportorului, unghiuri cu măsura de: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°.

3. Desenați: unghiul *ABC* cu măsura de 35°, unghiul *DEF* cu măsura de 70°, unghiul *GHI* cu măsura de 90° și unghiul *KLM* cu măsura de 127°.

4. Desenați unghiurile *ABC* și *CBD*, știind că $\sphericalangle ABC = 120°$ și $\sphericalangle CBD = 50°$. Măsurați unghiul *ABD* (atenție, sunt două posibilități pentru desen).

Unghiuri congruente

ACTIVITATE PRACTICĂ:

Pe o foaie de hârtie desenați unghiul *ABC* cu măsura egală cu 60°. Decupați hârtia de-a lungul laturilor unghiului. Partea decupată reprezintă interiorul unghiului și putem spune că conturul acesteia este unghiul dat (partea din hârtie rămasă reprezintă exteriorul unghiului).

Desenați, pe caiet, unghiul *DEF* cu aceeași măsură de 60°. Suprapuneți partea decupată (adică interiorul unghiului *ABC*) peste interiorul unghiului *DEF*. Putem observa că marginea hârtiei decupate se suprapune peste unghiul *DEF*, adică unghiul *ABC se suprapune exact* peste unghiul *DEF*, lucru care se datorează faptului că ***au aceeași măsură***. Vom spune despre cele două unghiuri că sunt *congruente*.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

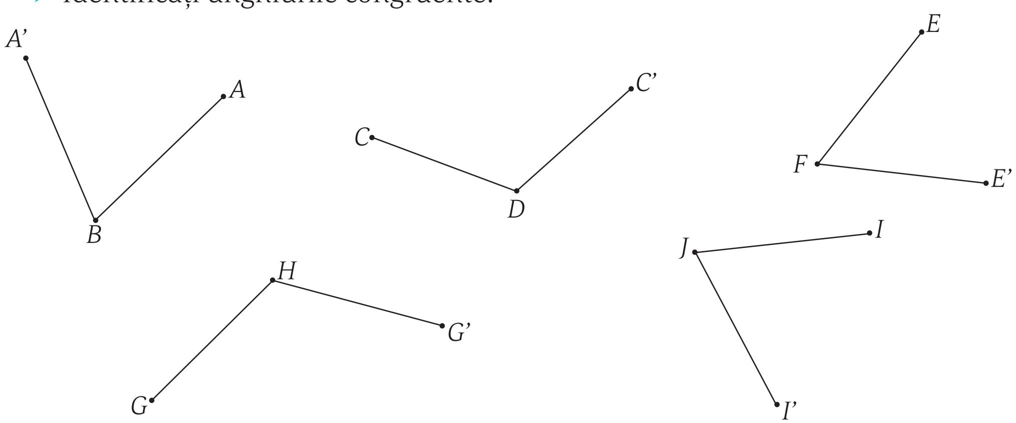
Despre două figuri geometrice se spune că sunt *congruente* dacă pot fi făcute să coincidă una cu alta printr-o deplasare. Este ca și cum am suprapune cele două figuri și ele ar coincide.

Două unghiuri sunt *congruente* dacă *au măsurile egale*. Notăm $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ și citim „unghiul *ABC* congruent cu unghiul *DEF*”.

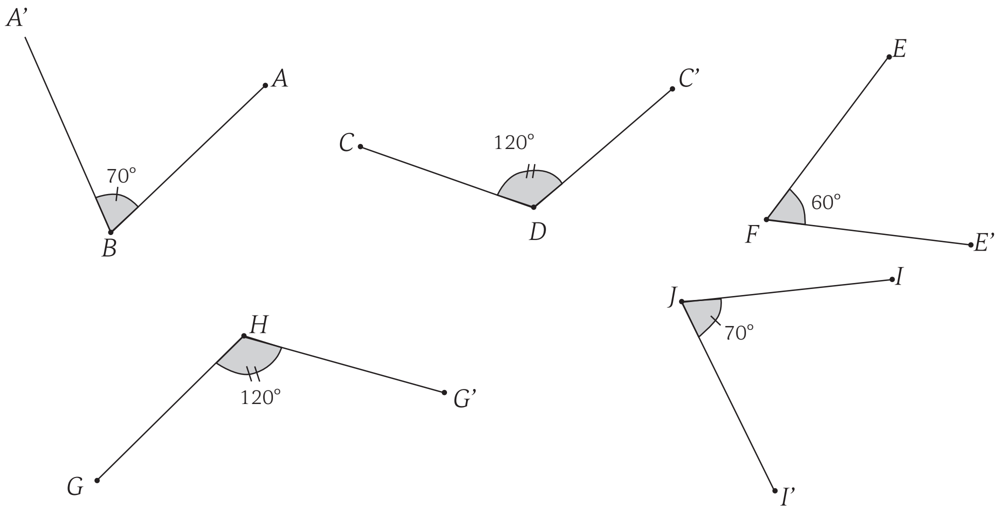
Dacă două unghiuri, $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle N$, nu au măsurile egale, atunci ele nu sunt congruente. Notăm acest lucru $\sphericalangle M \not\equiv \sphericalangle N$ și citim „unghiul *M* nu este congruent cu unghiul *N*” sau „unghiul *M* necongruent cu unghiul *N*”.

Să exersăm:

➢ Identificați unghiurile congruente:



Rezolvare. Prin măsurarea unghiurilor obținem: $\sphericalangle B=70^\circ$, $\sphericalangle D=120^\circ$, $\sphericalangle F=60^\circ$, $\sphericalangle H=120^\circ$ și $\sphericalangle J=70^\circ$, deci $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle J$ și $\sphericalangle D\equiv\sphericalangle H$. Convenim să punem în evidență pe o figură faptul că două (sau mai multe) unghiuri sunt congruente ca în desenul următor. Astfel, notând interiorul unghiurilor cu o liniuță este evidențiată congruența $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle J$, iar cu două liniuțe este evidențiată congruența $\sphericalangle D\equiv\sphericalangle H$.

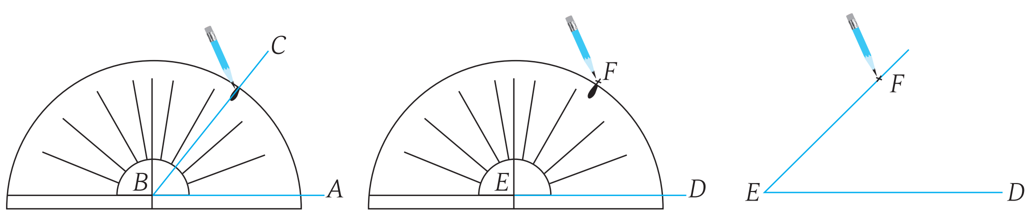


Construcţia cu ajutorul raportorului a unui unghi congruent cu un unghi dat

Să considerăm $\sphericalangle ABC$ și să construim $\sphericalangle DEF$, astfel încât $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle DEF$.

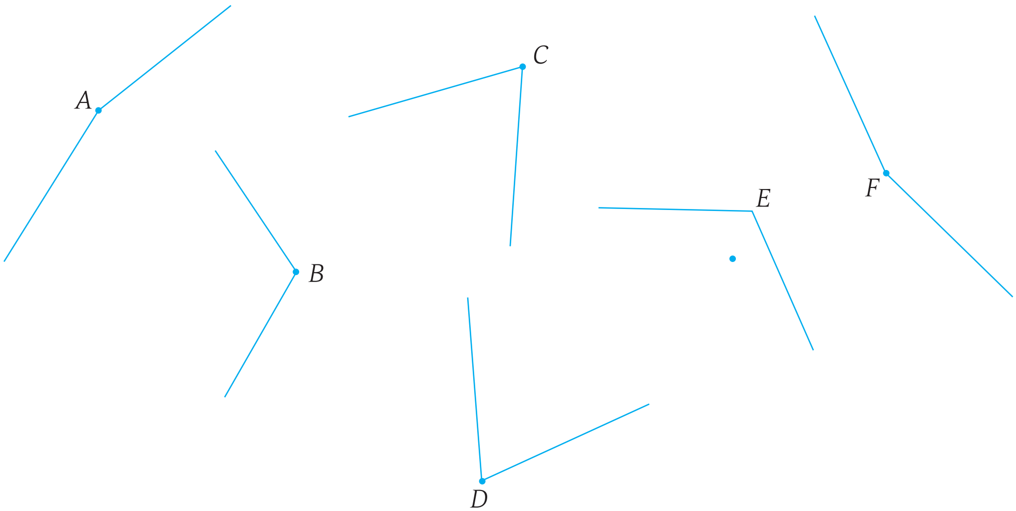
Metoda I. Măsurăm $\sphericalangle ABC$ și construim $\sphericalangle DEF$ cu măsura găsită.

Metoda II. Vom construi $\sphericalangle DEF$ fără măsurarea $\sphericalangle ABC$. Folosim un raportor negradat (sau un raportor gradat, fără să ținem cont de gradații). Așezăm raportorul ca și cum am dori să măsurăm $\sphericalangle ABC$ și facem un semn pe raportor în dreptul semidreptei **BC**. Desenăm semidreapta **ED**, așezăm raportorul cu centrul în punctul **E** și semidreapta **ED** în dreptul diviziunii de 0°. Facem un semn pe hârtie în dreptul semnului de pe raportor – punctul **F**. Îndepărtăm raportorul și unim **E** cu **F**.



PROBLEME PROPUSE:

1. Identificați unghiurile congruente din figura următoare. Scrieți, folosind simbolul de congruență, perechile de unghiuri congruente:



2. Folosind unghiurile din figura anterioară, construiți pe caiete unghiurile *M*, *N* și *P* astfel încât $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle C$.

3. Desenați două segmente *AB* și *AC*, astfel încât *AB* = *AC* = 8 cm, iar unghiul *BAC* să aibă măsura de 70°. Măsurați unghiurile *ABC* și *ACB*. Ce constatați?

4. Pe o foaie de hârtie desenați două segmente *AB* și *AC*, astfel încât *AB* = *AC* = = 12 cm, iar unghiul *BAC* să aibă măsura de 110°. Uniți punctele *B* și *C* și decupați triunghiul *ABC* obținut. Îndoiți hârtia (adică triunghiul) astfel încât punctele *B* și *C* să se suprapună.

a) Ce constatați referitor la segmentele *AB* și *AC*? Justificați răspunsul.

b) Dar referitor la unghiurile *ABC* și *ACB*? Justificați răspunsul.

c) Notăm cu *M* punctul de pe latura *BC* a triunghiului unde este îndoită hârtia. Ce constatați referitor la segmentele *BM* și *CM*? Dar referitor la unghiurile *AMB* și *AMC*?

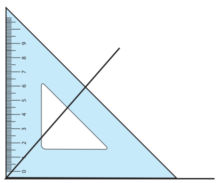
5. Desenați un dreptunghi *MNPQ* și segmentul *MP*. Măsurați toate unghiurile formate și precizați perechile de unghiuri congruente. (Segmentul *MP* se numește ***diagonală*** a dreptunghiului)

6. Pe o foaie de hârtie desenați un pătrat *BCDE* cu latura de 15 cm, segmentele *BD* și *CE* (***diagonalele*** pătratului) și notați cu *O* punctul lor de intersecție. Decupați pătratul și îndoiți-l după diagonala *BD*. Ce puteți spune despre punctele *C* și *E* și despre unghiurile *C* și *E*? Mai îndoiți o dată hârtia după cealaltă diagonală, *CE* și comparați cele 4 unghiuri care se formează în jurul punctului *O*.

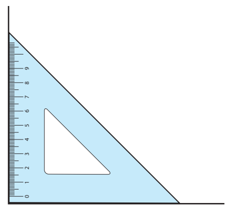
Clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz; unghi nul, unghi alungit

SĂ NE AMINTIM!

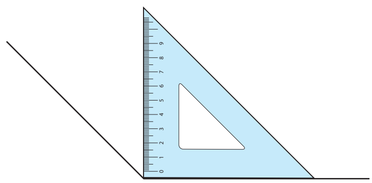
În clasele mai mici ați învățat că, pentru a recunoaște un unghi drept, se folosește echerul. Dacă cele două laturi scurte ale echerului se suprapun peste laturile unghiului, acesta este un unghi drept. Dacă un unghi are deschiderea mai mică decât a unui unghi drept, atunci el este un unghi ascuțit, iar dacă are deschiderea mai mare, el este un unghi obtuz.



unghi ascuțit



unghi drept



unghi obtuz

ACTIVITATE PRACTICĂ:

Folosiți un echer pentru a identifica unghiuri drepte de pe bancă. De exemplu, colțul cărții de matematică sau colțul caietului. Identificați și alte unghiuri drepte din clasă: colțul tablei, al geamului, etc. Desenați, cu ajutorul echerului, pe caiet, un unghi drept și apoi măsurați-l. Putem observa că măsura unghiului drept este de 90°.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Unghiul *ascuțit* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 0° și 90°.
Unghiul *drept* este unghiul a cărui măsură este egală cu 90°.
Unghiul *obtuz* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 90° și 180°.

Să ne imaginăm acele care indică ora, minutul și secunda la un ceas mecanic. În funcție de mișcarea lor, se formează diverse unghiuri. Există momente ale zilei în care, de exemplu secundarul se suprapune cu minutarul, sau situații în care minutarul și secundarul sunt ca și cum ar fi semidrepte opuse. Acestea sunt două situații particulare referitoare la unghiuri.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Unghiul ***nul*** este unghiul ale cărui laturi se suprapun. Cele două semidrepte care formează un unghi nul sunt semidrepte identice. Măsura unghiului nul este de 0°.

Unghiul ***alungit*** este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse. Măsura unui unghi alungit este 180°. Unghiul alungit se mai numește ***unghi cu laturile în prelungire***.

Un unghi care nu este nici nul și nici alungit se numește ***unghi propriu***.

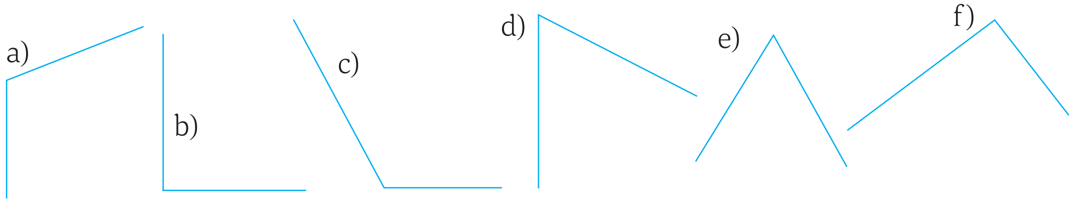
Trei ***puncte*** A, B și C pentru care unghiul ABC este alungit sau nul sunt ***coliniare***.

PROBLEME PROPUSE:

1. Considerăm următoarele unghiuri cu măsuri date: $\sphericalangle A=28^\circ$, $\sphericalangle C=47^\circ$, $\sphericalangle E=90^\circ$, $\sphericalangle F=104^\circ$, $\sphericalangle G=0^\circ$, $\sphericalangle H=75^\circ$, $\sphericalangle K=8^\circ$, $\sphericalangle M=125^\circ 25'$, $\sphericalangle A_1=163^\circ$, $\sphericalangle O=180^\circ$ $\sphericalangle C_3=89^\circ 60'$. Copiați și completați pe caiet tabelul:

unghiuri nule	unghiuri ascuțite	unghiuri drepte	unghiuri obtuze	unghiuri alungite

2. Precizați tipul fiecăruia dintre următoarele unghiuri:



3. Desenați un unghi obtuz, *ABC,* și o semidreaptă *BD*, astfel încât *ABD* să fie unghi drept. Realizați desenul și precizați ce fel de unghi este *CBD* în fiecare dintre cazurile:
a) semidreaptă *BD* este situată în interiorul unghiului *ABC*;
b) semidreaptă *BD* este situată în exteriorul unghiului *ABC*.

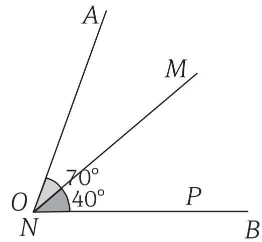
4. Desenați unghiul drept *MNP* și semidreapta *NQ*, astfel încât măsura unghiului *MNQ* să fie de 30°. Ce fel de unghi este *PNQ*?

5. Desenați unghiul *EFG* cu măsura de 70° și o semidreaptă *FH* astfel încât măsura unghiului *EFH* să fie de 40°. Ce fel de unghi este *GFH*?

6. Desenați trei puncte coliniare *A, B* și *C*, în această ordine, și o semidreaptă *BD*. Precizați ce fel de unghi este *ABD* dacă unghiul *DBC* este ascuțit. Dar dacă unghiul *DBC* este obtuz sau drept?

Calcule cu măsuri de unghiuri

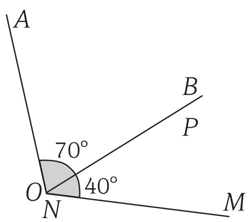
ACTIVITATE PRACTICĂ



Decupați dintr-un carton două unghiuri: $\sphericalangle AOB = 70°$ și $\sphericalangle MNP = 40°$. Așezați al doilea unghi peste primul unghi, astfel încât vârful *N* să fi în punctul *O*, latura *NP* să coincidă cu latura *OB*, iar *NM* să fie de aceași parte cu *OA* față de *OB*. Măsurați $\sphericalangle AOM$.

Constatăm că $\sphericalangle AOM = 30°$, rezultat pe care îl putem obține și efectuând scăderea 70° – 40° = 30°. Să observăm că

$$\sphericalangle AOB > \sphericalangle MNP \text{ și } \sphericalangle AOB - \sphericalangle MNP = 30°$$



➢ Așezați al doilea unghi lângă primul unghi, astfel încât vârful N să fi în punctul *O*, latura *NP* să coincidă cu latura *OB*, iar *NM* și *OA* să fie de o parte și de cealaltă față de *OB*. Măsurați $\sphericalangle AOM$.

Constatăm că $\sphericalangle AOM = 110°$, rezultat pe care îl putem obține și efectuând adunarea 70° + 40° = 110°. Cu alte cuvinte $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MNP = 110°$.

Putem efectua, așadar, calcule aritmetice cu măsuri de unghiuri, iar rezultatul calculelor poate fi măsura unui unghi.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

La adunarea (scăderea) măsurilor a două unghiuri, se adună (scad) între ele doar unități de același ordin: grade cu grade, minute cu minute, respectiv secunde cu secunde, începând cu ordinul cel mai mic.

Să exersăm:

35° + 42° 77°	28°24’ + 17°31’ 45°55’	adunăm minutele: 24’ + 31’ = 55’ adunăm gradele: 28° + 17 °= 45°	41°15’24” + 27°27’32” 68°42’56”	24” + 32” = 56” 15’ + 27’ = 42’ 41° + 27° = 68°
75° – 31° 44°	98°54’ – 45°23’ 53°31’	scădem minutele: 54’ – 23’ = 31’ scădem gradele: 98° – 45° = 53°	78°48’28” – 43°14’ 5” 35°34’23”	28” – 5” = 23” 48’ – 14’ = 34’ 78° – 43° = 35°

În exemplele de mai sus putem observa cum se fac calcule când măsurile unghiurilor au și secunde, dar noi ne vom limita doar la calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

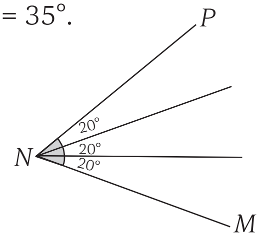
Dacă la însumarea minutelor se depășesc 60 de unități, se transformă grupele de câte 60 de unități în grade care se adună la gradele deja existente în sumă:

58°47' +	47' + 32' = 79',
24°32'	79' – 60' = 19', deci scriem 19' și ținem minte 1° (60' = 1°)
83°19'	58° + 24° = 82°, 82° + 1° (ținut minte) = 83°

Dacă numărul de minute de la descăzut este mai mic decât cel de la scăzător, se împrumută un grad din gradele de la descăzut, care se transformă în minute:

108°38' –	cele 38' de la descăzut sunt mai puține decât cele 54' de la scăzător; ca urmare, împrumutăm un grad de la 108°:
72°54'	1° = 60'; 60' + 38' = 98'; 98' – 54' = 44';
35°44'	108° – 1°(împrumutat) = 107°; 107° – 72° = 35°.

Ne putem afla în situația în care lipim trei (sau mai multe) unghiuri pentru a obține un unghi. Măsura unghiului *MNP* din figura alăturată poate fi calculată prin adunarea celor 3 măsuri (20° + 20° + 20° = 60°), dar poate fi calculată și mai direct *MNP* = 20°·3 = 60°.

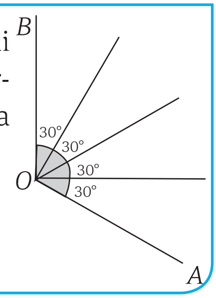


Să exersăm:

32°14' · 4 = 128°56'	14' · 4 = 56', 32° · 4 = 128°
22°31' · 5 = 112°35'	31' · 5 = 155'; 155' – 120' = 35'; 120' = 2°; 22° · 5 = 110°; 110° + 2° = 112°

SĂ ÎNVĂȚĂM!

O altă situație poate să apară dacă împărțim un unghi în mai multe unghiuri: unghiul *AOB*, cu măsura de 120°, a fost împărțit cu ajutorul a 3 semidrepte în 4 unghiuri congruente. Măsura unui astfel de unghi se obține astfel: 120° : 4 = 30°.



Să exersăm:

85°35' : 5 = 17°5'	85° : 5 = 17°, 35' : 5 = 7'
73° : 3 = 24°20'	73° : 3 = 24° rest 1°; 1° = 60', 60' : 3 = 20'

PROBLEME PROPUSE:

1. Calculați:

40° + 50°;	108° + 72°;	90° – 30°;	180° – 50°;
24°38’ + 17°18’;	44°30’ + 16°20’;	57°35’ + 42°25’;	60°40’ + 50°50’;
56°43’ – 21°18’;	70°52’ – 20°12’;	88°30’ – 43°50’;	90° – 32°30’;
25° · 4;	30°20’ · 3;	90° : 3;	90° : 4.

2. Considerăm un unghi cu măsura de 160°, pe care îl împărțim în 4 unghiuri congruente. Calculați măsurile acestora. Realizați desenul și determinați măsurile tuturor unghiurilor care se formează.

3. Desenați un triunghi, măsurați-i unghiurile și calculați suma lor.

Observație: Veți constata că obțineți o valoare foarte apropiată de 180° (după cum spuneam, valorile obținute prin măsurare sunt aproximative). Veți învăța anul viitor că aceasta este o proprietate a triunghiului: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

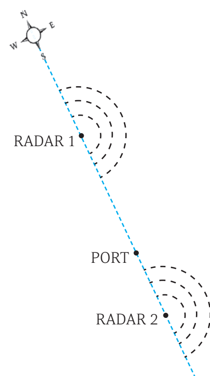
3. Decupați din carton unghiuri cu măsurile de 10°, 20°, 30°, 40°, 50° și 60°, câte două de fiecare tip.

a) Formați cu ajutorul lor unghiuri cu măsura de 70°, 90°, 120°, 150°, 180°.

b) Puneți în evidență, cu ajutorul cartoanelor decupate, adunarea 10° + 40° = 50°. Realizați același lucru pentru alte grupe de câte trei cartoane.

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

AJUTĂ VAPORUL SĂ AJUNGĂ ÎN PORT



Un vapor este în derivă și nu poate ajunge în port. Fiecare dintre cele două radare din desenul alăturat poate determina *direcția* vaporului, adică poate măsura unghiul format de dreapta ce unește poziția radarului cu poziția vaporului cu dreapta imaginară care reprezintă direcția N-S (Nord-Sud). Cele două radare fac câte două măsurători astfel:

• La prima măsurare, Radarul 1 *vede* vaporul sub un unghi cu măsura de 100°, iar Radarul 2, sub un unghi cu măsura de 40°.

• La a doua măsurare, după 5 minute, primul radar *vede* vaporul sub un unghi cu 30° mai mare, iar al doilea, cu 10° mai mare.

Realizează și tu desenul pe caiet, folosind următoarele date: distanța Radar 1 – Port este de 5 cm (5 km în realitate), distanța Radar 2 – Port este de 3 cm (3 km în realitate). Folosind unghiurile determinate mai sus, găsește cele 2 poziții ale vaporului și spune-i cum să-și modifice deplasarea pentru a ajunge în port.

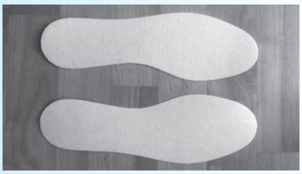
Figuri congruente; axă de simetrie

SĂ NE AMINTIM!

La lecția cu segmente am văzut că două segmente sunt congruente dacă au aceeași lungime. La unghiuri spuneam că două unghiuri sunt congruente dacă au aceeași măsură și am probat acest lucru folosindu-ne de suprapunerea figurilor.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Două *figuri geometrice* sunt *congruente* dacă, atunci când le suprapunem, ele coincid. Atunci când două figuri sunt congruente, am putea spune că fiecare dintre ele este copia celeilalte, doar că se află în locuri diferite.



Exemple: Atunci când suprapunem două foi de hârtie și decupăm o figură oarecare obținem două figuri congruente. Croitorii se folosesc de tipare la croitul hainelor, bucata de stofă tăiată și tiparul fiind figuri congruente. Branțurile pe care le folosim în pantofi sunt figuri congruente. Ornamentele pe care le obțineți prin decupare folosind tipare sunt figuri congruente.

ACTIVITATE PRACTICĂ

Desenați și decupați dintr-un carton următoarele figuri:

- un triunghi ABC, în care A este unghi drept, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm;
- un pătrat cu latura de 7 cm;
- un dreptunghi cu lungimea de 10 cm și lățimea de 6 cm;
- un cerc cu raza de 8 cm.

Ne propunem să verificăm congruența acestor figuri decupate cu cele ale colegului de bancă (bineînțeles, a triunghiurilor între ele, a pătratelor între ele etc).

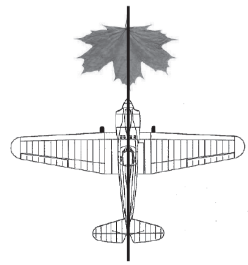
Înainte de a suprapune triunghiul vostru cu cel al colegului, măsurați latura BC și comparați măsura obținută cu cea obținută de coleg. Faceți același lucru pentru unghiurile B și C. După ce ați constatat că ați obținut (aproximativ) aceleași valori, observați cum, prin suprapunere, triunghiurile coincid. Din cele verificate anterior, ne putem da seama că două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile și respectiv toate unghiurile congruente. Despre congruența triunghiurilor veți afla mai multe lucruri în clasa a VI-a.

Verificați și congruența celorlalte figuri și vedeți ce concluzii puteți trage.

Știați că...

Cuvântul congruent vine din limba latină: *congruentia* = potrivire, conformitate, acord?

♦ Axă de simetrie

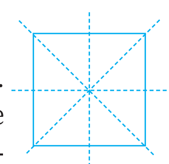


Simetria poate fi întâlnită în foarte multe lucruri din jurul nostru. Să ne gândim la simetria unei frunze, a unui fluture, a unei mașini sau a unui avion, sau chiar la simetria unei broderii din frumosul nostru port popular. Să observăm frunza alăturată și linia punctată care o împarte în două părți congruente. Același lucru se poate observa și la desenul cu avionul. În ambele figuri, partea situată în stânga liniei punctate este *simetrică* cu partea situată în dreapta liniei punctate, în sensul că, dacă am îndoi figurile după linia punctată, cele două părți s-ar suprapune perfect. Despre cele două figuri putem spune că *admit axă de simetrie.*

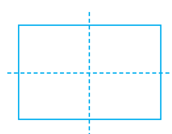
SĂ ÎNVĂȚĂM!

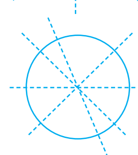
Spunem că o figură admite ***axă de simetrie*** dacă există o dreaptă ce împarte figura în două părți astfel încât, dacă îndoim figura după dreapta respectivă, cele două părți se suprapun perfect. Dreapta după care se face îndoirea este *axa de simetrie* a figurii.

Să exersăm:



➢ Să ne jucăm cu cartoanele pe care le-am decupat anterior. Îndoim cartonul în formă de pătrat astfel încât cele două părți situate de-o parte și de alta a îndoirii să se suprapună. Realizăm toate îndoirile posibile. Obținem astfel mai multe axe de simetrie pentru pătrat.

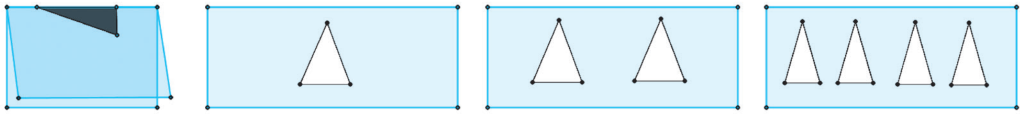




Realizați aceleași acțiuni pentru dreptunghi și pentru cerc.

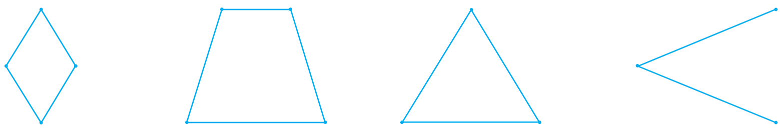
Obținem că pătratul are 4 axe de simetrie, dreptunghiul are 2, iar cercul are o infinitate de axe de simetrie.

➢ Împăturim o foaie de hârtie în două și decupăm din ea un triunghi dreptunghic, ca în figură. Să observăm ce se obține când desfacem figura. Luăm o altă foaie de hârtie pe care o împăturim în două și încă o dată în două și decupăm iar triunghiul. Repetăm procedeul cu încă o îndoire.

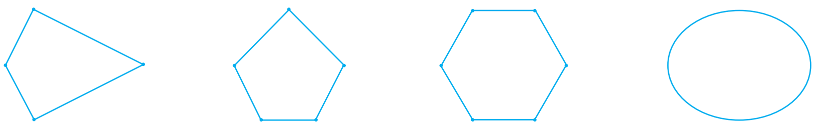


PROBLEME PROPUSE:

1. Construiți axele de simetrie pentru următoarele figuri:



2. Construiți axele de simetrie pentru următoarele figuri:



3. Luați toate literele mari de tipar și arătați care sunt axele lor de simetrie (pentru cele care au):

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M,

N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

4. Scrieți cifrele care au axă de simetrie și desenați axa. Scrieți două numere de două cifre astfel încât unul dintre ele să admită o axă de simetrie, iar al doilea, două axe de simetrie.

5. Realizați experimentul cu foaia îndoită pentru a obține, atunci când desfacem foaia, un pătrat, 2 pătrate, 4 pătrate, 8 pătrate. Explicați de ce nu puteți obține 6 pătrate. Confecționați diverse ornamente folosind aceeași metodă.

6. În urma realizării experimentului de la problema anterioară ați rămas cu bucățile de hârtie decupate. Putem afirma despre ele că sunt congruente? Desenați axele lor de simetrie.

7. Citiți cuvintele: AXA, POTOP, AERISIREA, MIM, CAZAC, COJOC, TIVIT, TOT de la coadă la cap! Ce legătură găsiți între aceste cuvinte și simetrie? Care dintre cuvinte admit axă de simetrie?

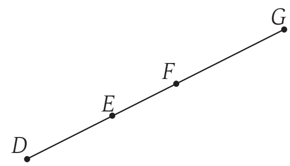
PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Pe o dreaptă d se consideră două puncte distincte A și B. În câte părți este împărțită dreapta de cele două puncte? Care dintre aceste părți este semidreaptă și care este segment? Numiți-le și notați-le pe caiet.

2. Rezolvă problema 1 în cazul în care pe dreaptă se consideră trei puncte.

3. Desenați patru drepte a, b, c și d care se intersectează două câte două, dar care să nu se intersecteze câte trei sau toate patru. Câte puncte de intersecție se obțin? Notați toate punctele de intersecție și stabiliți poziția acestora față de dreapta a.

4. Numiți toate segmentele din figura alăturată. Măsurați segmentele din figură și realizați pe caiete un desen echivalent figurii, dublând valorile măsurate. Determinați mijlocul segmentului FG.



5. Desenați punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, știind că $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AD = 12$ cm. Calculați lungimile segmentelor CD, AC și BD.

6. Desenați punctele coliniare C, D, E și F astfel încât C să fie între D și E, iar F să fie între D și C.

7. Desenați punctele coliniare M, N, P și Q astfel încât M să fie mijlocul segmentului NP, iar P, mijlocul segmentului MQ. Justificați faptul că $MN \equiv PQ$.

8. Punctul M este mijlocul segmentului AB, $AB = 8$ cm. Punctul C este situat pe semidreapta MA, iar punctul D pe semidreapta opusă, dar niciunul dintre ele nu este pe segmentul AB. Știind că $AC = 2$ cm, iar $AD = 10$ cm, justificați faptul că M este mijlocul segmentului CD.

9. Desenați și notați trei unghiuri: unul ascuțit, unul drept și unul obtuz. Măsurați și notați pe caiete măsurile lor.

10. Desenați unghiuri cu măsura de: 40°, 70°, 100°, 110°, 140°.

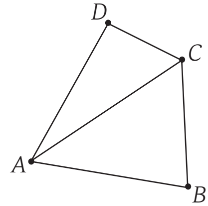
11. Desenați un unghi AOB cu măsura de 120° și o semidreaptă OC în interiorul unghiului astfel încât $\sphericalangle BOC = 40°$. Determinați măsura unghiului AOC prin măsurare și prin calcul. Rezolvați aceeași problemă pentru cazul în care semidreapta OC este situată în exteriorul unghiului AOB.

12. Desenați trei semidrepte AM, AN, AP astfel încât $\sphericalangle MAN = 50°$ și $\sphericalangle NAP = 30°$. Determinați (măsurare și calcul) măsura unghiului MAP.

13. Desenați două unghiuri, $\sphericalangle AMB = 80°$ și $\sphericalangle AMC = 50°$, astfel încât să nu aibă puncte interioare comune. Determinați măsura unghiului BMC.

14. Rezolvați problema anterioară în cazul în care cele două unghiuri au puncte interioare comune.

15. Măsurați unghiurile din patrulaterul și din cele două triunghiuri din figura alăturată. Calculați suma măsurilor unghiurilor pentru fiecare dintre cele trei figuri. Desenați apoi figura pe caiete, dublând lungimile laturilor pe care le măsurați de pe carte (folosiți măsurile unghiurilor găsite).



16. Copiați și completați pe caiete tabelul:

$\measuredangle A$	$\measuredangle B$	$\measuredangle A+\measuredangle B$	$\measuredangle A-\measuredangle B$	$3\cdot\measuredangle A$	$2\cdot\measuredangle B$	$3\cdot\measuredangle A-2\cdot\measuredangle B$
35°	25°					
50°	40°					
30°40'	20°10'					

17. Calculați măsurile unghiurilor congruente $\measuredangle A$ și $\measuredangle B$ dacă: a) $\measuredangle A+\measuredangle B=48°$; b) $2\cdot\measuredangle A+\measuredangle B=120°$; c) $3\cdot\measuredangle A+2\cdot\measuredangle B=121°$.

ACTIVITATE PRACTICĂ

• Desenați pe o foaie de hârtie un segment *AB* de lungime 10 cm. Îndoiți hârtia de-a lungul dreptei suport a segmentului, astfel încât să puteți vedea segmentul. Mai îndoiți o dată hârtia astfel încât punctele *A* și *B* să se suprapună. Desfaceți hârtia și marcați punctul *M* la intersecția celor două *îndoituri*. Ce reprezintă punctul *M* pentru segmentul *AB*? Justificați răspunsul.

• Decupați dintr-un carton un unghi cu măsura mai mică de 60°. Desenați cu ajutorul lui, pe caiet, un unghi cu măsura dublă unghiului decupat și un unghi cu măsura triplă acestuia.

TEST DE EVALUARE

1. Desenați trei puncte distincte și necoliniare *A, B* și *C*. Construiți cu linie punctată segmentul *AB* și cu linie continuă semidreapta *CB*. Semidreapta *CB* și semidreapta *CA* sunt semidrepte opuse? Justificați răspunsul.

2. Desenați punctele coliniare *B, C, D* și *E* astfel încât $BC\equiv CD$ și $DE\equiv BD$. Dacă $BE=20$ cm, aflați *BC*.

3. Desenați punctele coliniare *M, N, P, Q,* în această ordine, știind că: *MN* = 3 cm, *MP* = 8 cm și *MQ* = 11 cm. Calculați *NQ* și *NP*. Justificați de ce $MN\equiv PQ$.

4. Desenați un unghi obtuz *BCD* și semidreapta *CE* situată în interiorul unghiului.

5. Desenați semidreptele *CM, CN, CL* astfel încât $\measuredangle MCN=120°$ și $\measuredangle LCN=30°$. Ce fel de unghi este $\measuredangle MCL$? Studiați două cazuri.

6. Unghiurile $\measuredangle FOG$, $\measuredangle GOH$ și $\measuredangle HOI$ sunt congruente și au măsurile de 30°. Oricare două dintre cele trei unghiuri nu au puncte interioare comune.

a) Justificați de ce $\measuredangle FOI$ este unghi drept; b) Justificați faptul că $\measuredangle FOH\equiv\measuredangle GOI$.

Punctaj: 1p, 1p, 2p, 1p, 2p, 2p; 1p din oficiu

UNITĂŢI DE MĂSURĂ

Unităţi de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări ale unităților de măsură

SĂ ÎNVĂȚĂM!

A măsura o lungime înseamnă a o compara cu o altă lungime, luată ca unitate de măsura (altfel spus, a măsura o lungime înseamnă a afla de câte ori o unitate de măsură se cuprinde în acel segment).

Să exersăm:

➢ Profesorul cere unui elev să măsoare lungimea catedrei cu palma. Descoperă că trebuie să așeze palma de 5 ori. Apoi un alt elev măsoară lungimea catedrei tot cu palma. Descoperă că trebuie să așeze palma de 7 ori. Un alt elev măsoară lungimea catedrei cu un creion. Descoperă că trebuie să așeze creionul de 6 ori. Care măsurătoare este bună? De ce elevii au obținut rezultate diferite la măsurători?

Toate măsurătorile sunt bune, diferențele provenind din faptul că unitățile de măsură folosite sunt diferite (cele două palme și creionul nu sunt la fel de mari).

➢ Pentru a verifica alte unități de măsură folosite în trecut, elevii vor avea temă să măsoare cu pasul lungimea holului școlii și să compare rezultatele.

PROIECT

Căutați pe internet și realizați un referat despre unitățile de măsură folosite din cele mai vechi timpuri și până în prezent.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

În 1875 s-a încheiat un acord, numit ***Convenția metrului,*** prin care s-a hotărât să se folosească, ca unitate de măsură pentru lungime, ***metrul*** (*m*).

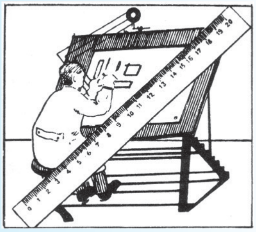
Multiplii și submultiplii metrului sunt:

$$1\ mm \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ cm \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ dm \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ m \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ dam \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ hm \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} 1\ km$$

Multiplii și submultiplii se exprimă prin cuvinte obținute prin adăugarea la cuvântul „metru” a unui prefix ce indică de câte ori este mai mare multiplul sau mai mic submultiplul. Astfel ***kilo*** este de 1000 de ori mai mare, ***hecto*** este de 100 de ori mai mare, ***deca*** este de 10 ori mai mare, ***deci*** este de 10 ori mai mic, ***centi*** este de 100 de ori mai mic și ***mili*** este de 1000 de ori mai mic.

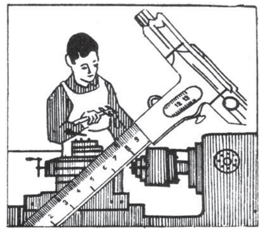
Pentru a face măsurători vom avea nevoie de instrumente de măsură.

✓ *Instrumente de măsura pentru lungime*: rigla, șublerul, metrul de croitorie, metrul de tâmplărie, ruleta, lanțul (pentru distanțe foarte mari).

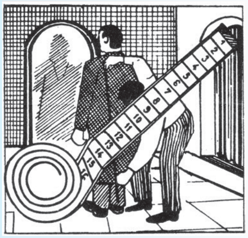


rigla

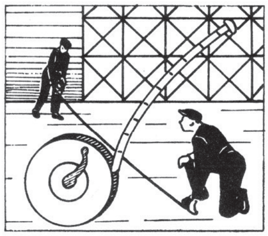
metrul de tâmplărie



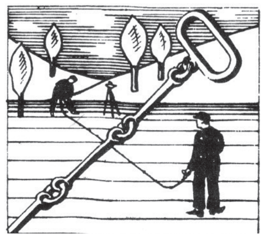
șublerul



metrul de croitorie



ruleta



lanțul

Știați că...

Metrul a fost definit la cea de-a XVII-a Conferință Generală de Mărimi și Greutăți din 1983 ca fiind „lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timpul de 1/299792458 secunde”. Aceasta a fost cea de-a cincea și ultima definiție a metrului.

Să exersăm:

➢ Să măsurăm din nou (facem mai multe măsurători) lungimea catedrei, de data aceasta cu ajutorul unei rigle. Ce obținem?

➢ Măsurați: dimensiunile manualului de matematică, dimensiunile băncii și ale clasei.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Pentru a ne face o imagine a multiplilor și submultiplilor metrului dăm câteva exemple:

- în kilometri se măsoară distanțele dintre localități;
- în hectometri și decametri se măsoară dimensiuni ale unor loturi de pământ (în agricultură);

• în decimetri și centrimetri se măsoară obiecte din gospodărie, lungimi ale părților corpului uman;

• în milimetri se exprimă dimensiuni ale unor obiecte foarte mici (lungimi de șuruburi, de plăci, de jucării etc.)

Să exersăm:

➢ Enunțurile de mai jos exprimă lucruri posibile? Notați cu A dacă enunțul este posibil să fie adevărat și cu F dacă enunțul este posibil să fie fals.

• Înălțimea fratelui meu este de 1 km. (F)
• Părul meu are lungimea de 5 m. (F)
• Caietul de matematică are lungimea de 10 cm. (A)
• Grosimea carnetului de note este de 5 mm. (A)

➢ Ana are de parcurs până la școală 500 m, iar Ionel are de parcurs 0,7 km. Care copil stă mai aproape de școală?

Rezolvare: Pentru a compara cele două distanțe, ele trebuie să fie exprimate în aceeași unitate de măsură. Vom transforma: 0,7 km = 700 m. Ana stă mai aproape de școală.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

Transformarea unităților de măsură pentru lungime se realizează astfel:
a) din unități mari în unități mici, prin înmulțire (cu 10, 100, 1000);
b) din unități mici în unități mari, prin împărțire (la 10, 100, 1000).

Să exersăm:

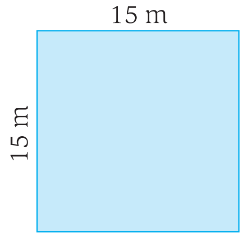
➢ Transformați:

11,8 dam = 1180 dm;	2,511 km = ... dam;	1500 mm = ...m;
7112 dm = 0,7112 km;	0,01 hm = ... m;	0,151 km = ... m;
3000 mm = 0,3 dam;	2,18 dam = ... m;	321 dm = ... dam;
4823 cm = ... m;	49 dm = ... m;	170 m = ... dam.

➢ Calculați:

0,271 m + 140 mm + 0,051 dam = ... dm;
4,23 km + 0,45 hm + 2710 dm = ... dam;
1,034 hm + 452 cm + 0,21 dam = ... m;
14,18 km + 766 dam + 69,3 m = ... hm;
1,05 m + 0,721 hm + 0,6 m = ... dm;
2,56 dam + 1800 mm + 0,235 km = ...m.

➤ Bunicul îl trimite pe Rareș să măsoare gardul curții pentru că trebuie făcut unul nou. Curtea are forma de pătrat cu latura de 15 m. După măsurătoare, Rareș descoperă că lungimea gardului este de 60 m și că ar fi calculat mai ușor dacă se gândea că fiecare latură a pătratului este de 15 m și avea de fapt de calculat 15 m + 15 m + 15 m + 15 m = 60 m.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Suma lungimilor laturilor unui poligon se numește *perimetru*.

Perimetrul pătratului de latură l se calculează astfel: $P_{pătrat} = 4 \cdot l$.

Perimetrul dreptunghiului cu lungimea L și lățimea l se calculează astfel: $P_{dreptunghi} = 2 \cdot (L + l)$. Semiperimetrul dreptunghiului: $p = L + l$.

Să exersăm:

1. Calculați latura pătratului cu perimetrul de 24 cm, apoi desenați pătratul.

Rezolvare: l = P : 4 = 6 (cm).

2. Un triunghi are laturile egale cu 15 cm, 20 cm și 25 cm. Calculați perimetrul triunghiului.

Rezolvare: $P = a + b + c$ = 15 cm + 20 cm + 25 cm = 60 cm.

3. Parcul din vecinătate are un loc de joacă în formă de dreptunghi cu lungimea de 10 m și lățimea de 8 m. Pe marginea locului de joacă se pun bănci din 2 m în 2 m. Câte bănci sunt necesare?

Rezolvare: $P = 2 \cdot (L + l)$ = 36 m; 36 : 2 = 18 (bănci).

PROBLEME PROPUSE:

1. Alege numărul care arată măsura cea mai apropiată de realitate:
- lățimea băncii de la școală: 10 m, 1 m, 3 m;
- înălțimea casei în care locuiești: 10 m, 6 m, 100 m;
- lungimea unui creion se măsoară în: cm, m, km, lei.

2. Andreea are de parcurs până la școală 1,5 km, iar Raluca cu 2,5 km mai mult. Câți kilometri parcurg zilnic Andreea și Raluca împreună? (*Atenție!* Calculează drumul dus și întors).

3. Transformați:

0,38 m = ... dm;

0,02 hm = ... dam;

0,471 hm = ... dm;

123 m = ... cm;

8,03 m = ... dm;

350 dm = ... dam;

0,07 hm = ... dm;
7,2 km = ... dam;
125 cm = ... dm;

150 m = ... hm;
70 mm = ... dm;
43 mm = ... m.

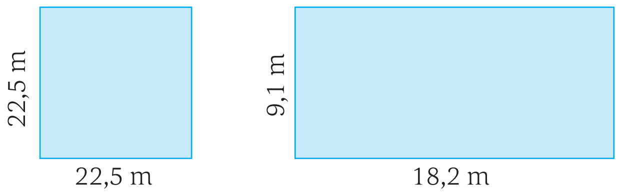
4. Calculați:

3 km + 15 hm = ... dam;
0,3 dam + 1,9 m = ... dm;
7 km – 35 dam = ... m;
0,011 hm –1 m = ... dm;
13 km + 11 hm = ... dam;
3 dm + 0,19 m = ... mm;

0,1 hm – 1 dam = ... km;
11 hm – 4,2 dam = ... cm;
13 mm + 150 cm = ... dam;
3 m + 19 cm = ... dm;
0,805 m – 3,5 dm= .... hm;
11 dm – 4 cm = ... mm.

5. Pe marginea străzii bunicii mele, pe o lungime de 120 m, de o parte și de alta, s-au plantat pomi la distanța de 5 m între ei. Câți pomi s-au plantat? (*Atenție!* S-au plantat pomi și la capetele străzii.)

6. Calculați perimetrul unui pătrat cu latura de 22,5 m și perimetrul unui dreptunghi cu laturile de 18,2 cm și 9,1 cm.



7. Construiți din sârmă un triunghi, apoi:
a) măsurați în centimetri laturile triunghiului din sârmă;
b) scrieți în caiet rezultatele obținute;
c) desenați triunghiul pe caiet;
d) calculați suma lungimilor laturilor măsurate;
e) desfaceți triunghiul din sârmă, obținând un segment;
f) comparați suma lungimilor laturilor măsurate cu lungimea segmentului obținut.

8. Construiți din sârmă un pătrat, apoi:
a) măsurați în cm laturile pătratului din sârmă;
b) scrieți în caiet rezultatele obținute;
c) desenați pătratul pe caiet;
d) calculați suma lungimilor laturilor măsurate;
e) desfaceți pătratul din sârmă, obținând un segment;
f) comparați suma lungimilor laturilor măsurate cu lungimea segmentului obținut.

9. Construiți din sârmă un dreptunghi, apoi:
a) măsurați în centimetri laturile dreptunghiului din sârmă;
b) scrieți în caiet rezultatele obținute;

c) desenați dreptunghiul pe caiet;
d) calculați suma lungimilor laturilor măsurate;
e) desfaceți dreptunghiul din sârmă, obținând un segment;
f) comparați suma lungimilor laturilor măsurate cu lungimea segmentului obținut.

10. Curtea școlii are lungimea de 30 dam și lățimea trei cincimi din lungime. Ce lungime are gardul școlii?

11. Un teren în formă de dreptunghi are lungimea cu 3 m mai mare decât lățimea și perimetrul de 8,6 dam Aflați lungimile laturilor terenului.

12. Un triunghi are perimetrul de 153 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că ele sunt exprimate prin 3 numere consecutive.

13. Perimetrul unui triunghi este de 99 m. Aflați lungimile laturilor, dacă ele sunt exprimate prin trei numere naturale impare consecutive.

14. Aflați perimetrul unui pătrat a cărui latură este egală cu semiperimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile de 3 cm și 5 cm.

15. Perimetrul unui dreptunghi este de 60 cm. Mărind lungimea și lățimea cu același număr de centimetri, obținem un alt dreptunghi cu perimetrul de 140 cm. Cu câți centimetri a fost mărită fiecare dimensiune?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Un melc urcă în timpul zilei pe un copac 3 m și alunecă noaptea 2 m. După câte zile ajunge în vârful copacului înalt de 10 m?

2. Aflați laturile unui triunghi care are perimetrul de 93 m, știind că a doua latură este cu 50 dm mai mare decât prima și a treia este cu 0,02 hm mai mare ca a doua.

3. O grădină în formă triunghiulară, cu laturile de 22,5 m, 18,(3) m și 25,1(4) m este închisă cu 6 rânduri suprapuse de sârmă. Cât costă sârma necesară, știind că 1 m de sârmă costă 19,50 lei?

4. Un dreptunghi are dimensiunile l = 0,018 hm și L = 2560 mm. Cu cât crește perimetrul dreptunghiului dacă mărim cele două dimensiuni cu 33% din mărimile lor?

5. Un dreptunghi are dimensiunile l = 0,052 dam și L = 256,0 cm. Cu cât crește perimetrul dreptunghiului dacă mărim lățimea cu 25% din mărimea ei și lungimea cu 16% din mărimea ei?

6. Un dreptunghi are perimetrul egal cu 24 m și lungimea de 4 ori mai mare decât lățimea. Aflați dimensiunile pătratului care are perimetrul egal cu al dreptunghiului

Unităţi de măsură pentru arie. Aria pătratului. Aria dreptunghiului. Transformări ale unităților de măsură

SĂ NE AMINTIM!

✓ Observați fiecare imagine din figura alăturată și precizați care este diferența dintre figura din stânga și cea din dreapta.

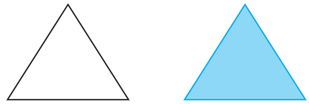


Fig. 1

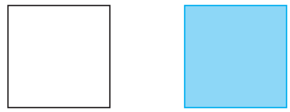


Fig. 2

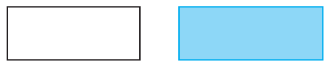


Fig. 3

Ne amintim din clasa a IV-a:

• în partea stângă a fig.1 este reprezentat un triunghi, iar în dreapta o suprafață triunghiulară;

• în fig.2, în partea stângă observăm un pătrat, iar în dreapta o suprafață pătrată;

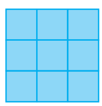
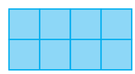
• în fig.3, în partea stângă este un dreptunghi, iar în dreapta o suprafață dreptunghiulară.

Spuneam că:

• *Suprafața unui poligon este formată din toate punctele interioare și toate punctele ce aparțin laturilor poligonului.*

• *Aria reprezintă o măsură a suprafeței, adică arată de câte ori se cuprinde o anumită unitate de măsură în acea suprafață.*

Să exersăm:

➢ Ilinca vrea să afle aria pătratului  și a dreptunghiului , considerând pătrățelul  ca unitate de măsură. Câte pătrățele acoperă pătratul mare?

Rezolvare: Aria pătratului mare este egală cu 9 unități de măsură pentru arie. Pe fiecare latură a pătratului mare au intrat 3 ($l = 3$) pătrățele mici, deci latura este egală cu 3. Aria pătratului mare este egală cu $3 \cdot 3$ ($A = l^2$).

➢ Câte pătrățele acoperă dreptunghiul?

Rezolvare: Aria dreptunghiului este egală cu 12 unități de măsură pentru arie. Pe lungimea dreptunghiului au intrat 4 ($L = 4$) pătrățele mici, iar pe lățimea dreptunghiului au intrat 3 ($l = 3$) pătrățele mici. Aria dreptunghiului este egală cu $4 \cdot 3$ ($A = L \cdot l$). Cum laturile dreptunghiului sunt lungimi, unitatea de măsură pentru arie este pătratul unității de măsură pentru lungime.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

✓ Aria pătratului: $A_{pătrat} = l^2$.
✓ Aria dreptunghiului: $A_{dreptunghi} = L \cdot l$.
✓ Unitatea de măsură pentru arie este: m^2.

$$1\ mm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ cm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ dm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ m^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ dam^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ hm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ km^2$$

Alți multipli des folosiți ai metrului pătrat sunt ***unitățile agrare***:
1 hectar = 1 ha = 1 hm² = 10000 m²;
1 ar = 1 dam² = 100 m²;
1 pogon = 0,5 ha = 0,5 hm² = 5000 m².
Transformarea unităților de măsură pentru arie se realizează astfel:
a) din unități mari în unități mici, prin înmulțire (cu 100, 10000, 1000000);
b) din unități mici în unități mari, prin împărțire (la 100, 10000, 1000000).

Să exersăm:

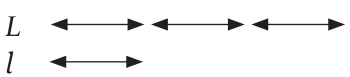
1. Transformați:

$1040\ dm^2 = 0{,}104\ dam^2$;	$954785\ cm^2 = ...\ m^2$;	$1{,}12\ dam^2 = ...\ ha$;
$12{,}46\ hm^2 = 124600\ m^2$;	$12458{,}1\ mm^2 = ...\ dm^2$;	$1{,}0002$ ari $= ....\ m^2$;
$10\ km^2 = 1000\ ha$;	$564738\ m^2 = ...\ hm^2$;	$0{,}001\ cm^2 = ...\ mm^2$;
$72586{,}43\ dm^2 = ...$ ari;	$0{,}01243\ cm^2 = ...\ km^2$;	$0{,}1\ dm^2 = ...\ ha$.

2. Calculați:
$14{,}52\ cm^2 + 1{,}01\ dm^2 - 0{,}00224\ m^2 = 0{,}1452\ dm^2 + 1{,}01\ dm^2 - 0{,}224\ dm^2 = 0{,}9312\ dm^2$;
$0{,}156\ ha + 5481{,}02\ m^2 - 0{,}0341\ km^2 = ...$ ari;
$2135{,}2\ mm^2 + 0{,}1\ dm^2 + 0{,}3\ m^2 = ...\ cm^2$;
$145{,}2\ dm^2 + 0{,}054\ dam^2 + 94301\ cm^2 = ...\ m^2$.

3. Aria unui pătrat este de 64 m². Aflați perimetrul pătratului.
Rezolvare: $A_{pătrat} = l^2$. Cum $A_{pătrat} = 64\ m^2$, obținem că $l = 8$ m, deci $P_{pătrat} = 32$ m.

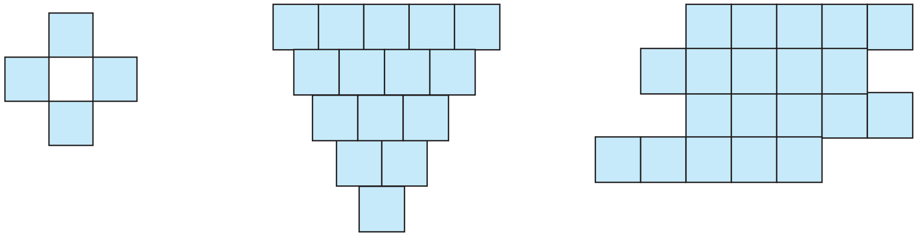
4. Aflați aria unui dreptunghi cu perimetrul de 124 m și lățimea cât o treime din lungime.
Rezolvare: Dacă lățimea dreptunghiului este egală cu o treime din lungime, reprezentăm dimensiunile:



$P_{dreptunghi} = L + l + L + l$ este format din 8 segmente egale cu cel care reprezintă lățimea. Obținem $l = 15{,}5$ m și $L = 46{,}5$ m. $A_{dreptunghi} = L \cdot l$, deci $A_{dreptunghi} = 720{,}75\ m^2$.

PROBLEME PROPUSE:

1. Știind că fiecare pătrat colorat măsoară 1 cm^2, precizați cât este aria pentru fiecare dintre figurile următoare (partea colorată):



2. Transformați:

12 m^2 = ... dm^2;	152,07 dam^2 = ... hm^2;	3470 dm^2 = ... ar;
5003 cm^2 = ... m^2;	5,032 m^2 = ... cm^2;	2453,2 mm^2 = ... cm^2;
11 ha = ... m^2;	5,2 m^2 = ... cm^2;	1,012 km^2 = ... hm^2;
52,5 dm^2 = ... cm^2;	0,125 dam^2 = ... m^2;	22,001 dm^2 = ... mm^2.
7500 m^2 = ... ha;	0,032 hm^2 = ... m^2;	

3. Calculați:

1,32 ha – 123,5 dam^2 = ... m^2; 0,142 km^2 + 42,35 hm^2 = ... dam^2;
0,125 km^2 + 0,14 dam^2 = ... cm^2; 24 dam^2 + 36,25 hm^2 + 276325 cm^2 = ... m^2;
5 dam^2 + 4320 cm^2 – 2,4 m^2 + 0,12 hm^2 = ... dm^2;
43,5 m^2 – 1243 cm^2 + 0,01 dam^2 = ... dm^2.

4. Calculați perimetrul unui dreptunghi care are aria de 60 cm^2, iar lățimea egală cu trei cincimi din lungime.

5. Desenați un dreptunghi. Calculați aria dreptunghiului știind că are L = 3,5 m, iar l = 2,1 dm.

6. O baie are lungimea de 3,5 m și lățimea de 2,5 m. De câte plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 35 cm este nevoie pentru a acoperi podeaua?

7. Aria unei grădini dreptunghiulare este de 2914,50 m^2, iar lungimea grădinii este de 72,5 m. Câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui grădina?

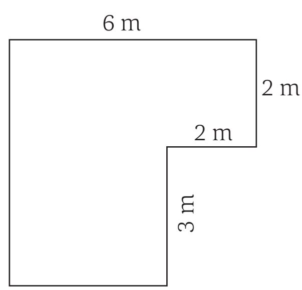
8. Un sătean, măsurând un lot dreptunghiular, a găsit 112 pași în lungime și 104 pași în lățime. Care este aria lotului, știind că 8 pași măsoară 7 m?

9. Un apartament are trei camere cu suprafețele de 12 m^2, 13,5 m^2 și 8,5 m^2. Cât costă mochetarea celor trei camere, știind că 1 m^2 de mochetă costă 52,60 lei?

10. Pentru un pavaj se folosesc plăci de mozaic cu suprafața de 120 cm^2, așezate în 36 de rânduri a câte 18 plăci fiecare. Aflați aria suprafeței pavate.

11. Un dreptunghi poate fi împărțit în patru pătrate egale cu latura de 5 cm. Care este aria dreptunghiului ?

12. Calculați aria terenului din figură.



PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. La un acoperiș de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 5 m și 4 m, s-au folosit 1000 de țigle. Câte țigle se vor folosi la un acoperiș de aceeași formă cu dimensiunile 6 m și 5 m?

2. O vie de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 1000 m și 300 m, se stropește cu sulfat de cupru pentru a stârpi dăunătorii. Ce cantitate de sulfat de cupru este necesară, dacă la 1 ha se folosesc 100 kg de sulfat?

3. Un teren dreptunghiular, care este împrejmuit cu un gard de 300 m, are lungimea de patru ori mai mare decât lățimea. Câte tone de cartofi se cultivă de pe întreaga suprafață, știind că de pe fiecare ar se obțin 220 kg de cartofi?

4. Câte plăci de beton de formă pătratică cu latura de 50 cm sunt necesare pentru a pava o curte care are formă de dreptunghi cu dimensiunile de 48 m și 27 m?

5. Grădina Alinei are formă dreptunghiulară cu lungimea de 112 m și lățimea de 25 m. Ea a cultivat ardei pe 375 m^2, cartofi pe 8,5 m^2 și roșii pe restul suprafeței. Câți m^2 cu roșii a cultivat?

6. Un dreptunghi are perimetrul de 120 cm și lungimea cu 10 cm mai mare decât lățimea.

a) Determinați dimensiunile dreptunghiului.

b) Dreptunghiul se împarte în pătrate cu latura de 5 cm. Câte pătrate se obțin?

7. O curte are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m și lățimea de 7,5 m.

a) Câți metri de gard sunt necesari pentru împrejmuirea curții?

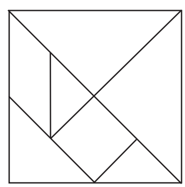
b) Curtea se pavează cu dale de beton în formă de pătrat cu latura de 30 cm. Câte dale sunt necesare?

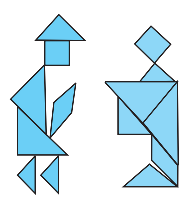
8. Un teren de joacă are forma dreptunghiulară, cu lățimea egală cu o șesime din perimetru, iar diferența dintre lungime și lățime este de 24 cm. Ce suprafață are terenul de joacă?

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

TANGRAM este un joc chinezesc cunoscut de mai bine de 2000 de ani. Cele 7 figuri geometrice, numite tanuri (cinci triunghiuri, un pătrat și un paralelogram), decupate din pătratul dat, trebuie așezate toate, una lângă alta, fără suprapuneri pentru a obține nenumărate figuri (geometrice și artistice). Peste 1600 de imagini reprezentând animale, păsări, viețăți marine, oameni, litere, cifre, obiecte, castele, vapoare și multe altele pot fi create din cele 7 piese ale tangramului. Tu câte dintre ele poți descoperi? Caută pe internet și citește povestea tangramului. Încearcă să obții figurile alăturate:

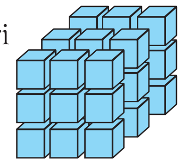
Construiește și alte figuri.





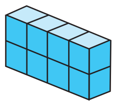
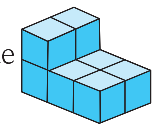
Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări ale unităților de măsură

SĂ NE AMINTIM!



Elevii clasei noastre au adus pentru ora de astăzi jocuri de cuburi și s-au apucat de construit.

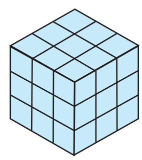
Ionel construiește cubul din imagine. Câte cuburi mici a folosit?

Cristina construiește , iar Marius construiește . Câte cuburi mici a folosit fiecare?

SĂ OBSERVĂM:

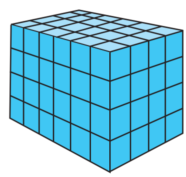
➢ Fiecare construcție ocupă un spațiu egal cu cel ocupat de numărul de cuburi din care este format. *Volumul* reprezintă mărimea spațiului ocupat de un corp.

➢ Maria și Tudor au cubulețe de mărimi egale. Maria construiește din cubulețe ei cubul alăturat. Câte cubulețe a folosit?



Volumul cubului mare este egal cu 27 unități de măsură pentru volum. Pe fiecare latură a cubului mare au intrat 3 ($l = 3$) cubulețe, deci latura este egală cu 3. Volumul cubului mare este egal cu $3 \cdot 3 \cdot 3$ ($V = l^3$).

Tudor construiește din cubulețele lui paralelipipedul dreptunghic alăturat. Câte cubulețe a folosit?



Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu 96 unități de măsură pentru volum. Pe lungimea paralelipipedului dreptunghic au intrat 6 ($L = 6$) cubulețe, pe lățimea sa au intrat 4 ($l = 4$) cubulețe, iar pe înălțimea acestuia au intrat 4 ($h = 4$) cubulețe. Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu $6 \cdot 4 \cdot 4$ ($V = L \cdot l \cdot h$). Cum laturile paralelipipedului dreptunghic sunt lungimi, unitatea de măsură pentru volum este cubul unității de măsură pentru lungime.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

✓ Volumul cubului: $V_{cub} = l^3$.
✓ Volumul paralelipipedului dreptunghic: $V_{paralelipiped} = L \cdot l \cdot h$.
✓ Unitatea de măsură pentru volum este: m^3.

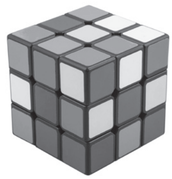
Multiplii și submultiplii metrului cub sunt:

$$1\ mm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ cm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ dm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ m^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ dam^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ hm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ km^3$$

Transformarea unităților de măsură pentru volum se realizează astfel:

- din unități mari în unități mici, prin înmulțire (cu 1000, 1000000, 1000000000);
- din unități mici în unități mari, prin împărțire (la 1000, 1000000, 1000000000).

Să exersăm:



➢ Dacă un cubuleț mic al cubului Rubik are latura de 2 cm, cât este volumul cubului Rubik?

Rezolvare: Latura cubului Rubik este l = 6 cm, V = 216 cm^3.

➢ Astăzi este ziua lui Rareș și fiecare elev a primit o ciocolată în formă de paralelipiped dreptunghic cu laturile de 7 cm, 5 cm și 1 cm. Care este volumul ciocolatei?

Rezolvare: V = 35 cm^3.

➢ Transformați: 1,03127 dm^3 = 1031,27 cm^3; 11,07 dam^3 = 11070 m^3; 0,001 m^3 = 1 dm^3; 0,2 km^3 = 200 hm^3; 1230,05 mm^3 = 1,23005 cm^3 = 0,00123005 dm^3.

➢ Calculați în m^3 :

a) 3,8142 dam^3 + 2117,41 dm^3 = 3814,2 m^3 + 2,11741 m^3 = 3816,31741 m^3;

b) 0,01 hm^3 + 2,1 dam^3 – 12,005 dm^3 = 10000 m^3 + 2100 m^3 – 0,012005 m^3 = =12100 m^3 – 0,012005 m^3 = 12009,987995 m^3;

c) 82195,01 cm^3 + 521,3 dm^3 – 0,00021 dam^3 = 0,08219501 m^3 + 0,5213 m^3 – – 0,21 m^3 = 0,60349501 m^3 – 0,21 m^3 = 0,39349501 m^3.

ACTIVITATE PRACTICĂ

➢ Construiți din carton un cub cu latura de 10 cm. Umpleți cubul cu apă și turnați apa într-o sticlă de 1 litru. Ce observați?

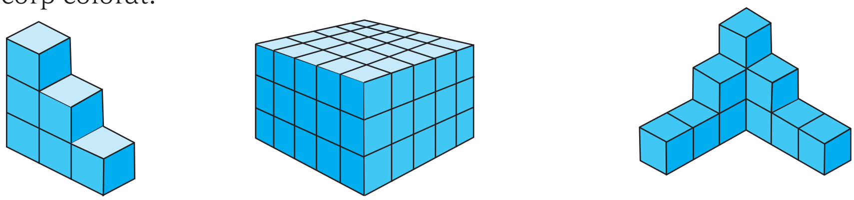
Rezolvare: Volumul cubului V = 10^3 cm^3 = 1000 cm^3 = 1 dm^3 (1 dm^3 = 1 l).

➢ Într-un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu L =25 cm, l = 15 cm și h = 18 cm avem 3,75 l de apă. Vasul este plin?

Rezolvare: 3,75 l = 3,75 dm^3 =3750 cm^3. Apa are forma unui paralelipiped dreptunghic cu L = 25 cm, l = 15 cm. Trebuie să aflăm înălțimea apei. $V_{paralelipiped}$ = $= L \cdot l \cdot h$. Obținem că înălțimea apei este de 10 cm. Vasul nu este plin cu apă.

PROBLEME PROPUSE:

1. Știind că fiecare cub mic are latura de 1 cm, precizați cât este volumul pentru fiecare corp colorat:



2. Transformați în metri cubi:

a) 5 dam^3;	b) 201 dam^3;	c) 4,03 dam^3;	d) 2,4132 dam^3;
e) 21 hm^3;	f) 2,1058 hm^3;	g) 0,00211 hm^3;	h) 0,1 hm^3;
i) 4 km^3;	j) 3,0508 km^3;	k) 0,0000027 km^3;	l) 0,005 km^3.

3. Transformați în decametri cubi:

a) 1 hm^3;	b) 1,1 hm^3;	c) 3 km^3;	d) 7,022 km^3;
e) 301,2 m^3;	f) 20 m^3;	g) 102000 dm^3;	h) 12,1507 dm^3.

4. Transformați în centimetri cubi:

a) 241 dm^3;	b) 0,03 dm^3;	c) 14,3 m^3;	d) 1,27 m^3;
e) 0,00035 dam^3;		f) 0,07 dam^3.	

5. Stabiliți unitatea de măsură:

a) 41,3 dam^3 = 41300000...; b) 0,00137 km^3 = 1370...;

c) 7,301 cm^3 = 7301...; d) 405,32 m^3 = 405320000...;

e) 971000 mm^3 = 0,971...; f) 0,00394 hm^3 = 3940000... .

6. Calculați:

a) 0,3 m^3 + 0,315 hm^3 + 211000 km^3 = ... dam^3;

b) 0,0123 dm^3 + 0,00047 dam^3 + 181000cm^3 = ... m^3;

c) 2010 mm^3 + 0,0071 m^3 + 0,0125 dm^3 = ... cm^3;

d) 12000 m^3 + 1500 dam^3 + 0,0137 km^3 = ... hm^3;

e) 0,5971 m^3 + 12130 cm^3 + 521000 mm^3 = ... dm^3;

f) 7125 dam^3 + 0,02711 km^3 + 352600000 m^3 = ... hm^3.

7. O piesă în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 0,02 dam, 5 cm, respectiv 0,6 dm. Determinați volumul vasului în cm^3.

8. Dulapul de materiale din clasa noastră are dimensiunile de 2 m, 12 dm și 50 cm. Calculați volumul dulapului în m^3.

9. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 20 dam, 0,6 km și 125 m. Aflați volumul în hm^3.

10. O cutie cu lungimea de 80 cm, lățimea de 5 dm și înălțimea de 450 mm este plină cu săpunuri cubice cu muchia de 10 cm. Care este numărul total de săpunuri din cutie?

11. Calculați lungimea paralelipipedului dreptunghic cu l = 4 dm, h = 11 dm și volumul de 220 dm^3.

12. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 18 cm, lățimea de 10 cm și înălțimea de 6 cm. Câte cuburi cu latura de 2 cm vor putea fi aranjate în cutia respectivă?

13. O sală de clasă are lungimea de 13 m, lățimea de 8 m și înălțimea de 2,5 m. Dacă în clasă sunt 30 de elevi, câți m^3 din spațiul clasei revin fiecărui elev?

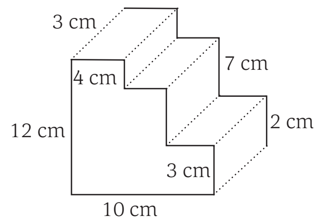
14. Lungimea laturii unui cub este un număr prim, par. Aflați volumul cubului.

15. Aflați volumul unui paralelipiped dreptunghic, dacă dimensiunile lui sunt trei numere naturale consecutive și media lor aritmetică este 15 cm.

16. Un perete cu dimensiunile egale cu L = 3 m, h = 2,1 m și l = 30 cm este construit din cărămizi cu dimensiunile de 20 cm, 10 cm și 7 cm. Câte cărămizi sunt necesare?

17. Aflați volumul unui paralelipiped dreptunghic, dacă media aritmetică a dimensiunilor sale este de 20 cm, media aritmetică dintre lungime și lățime este de 25 cm, iar înălțimea este jumătate din lățime.

18. Aflati volumul corpului din imagine:



19. Câți litri de suc avem într-o cutie cu dimensiunile de 70 cm, 60 cm și 2,5 cm?

20. Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 m, 2 m, 7 m este plin cu apă. Pentru câte zile ajunge apa din rezervor, dacă se consumă zilnic 28 litri?

PROBLEME PENTRU MICII CAMPIONI

1. Într-un vas cu apă în formă de paralelipiped dreptunghic cu L = 40 cm și l = 20 cm se scufundă un cub. Nivelul apei se ridică cu 10 cm. Aflați volumul cubului.

2. Latura unui cub este de 15 cm. Cu câți cm^3 se mărește volumul cubului, dacă latura sa se mărește cu 10%?

3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile L = 2,5 dm, l = 18 cm și h = 0,48 mm. Cu cât va fi mai mic volumul unui alt paralelipiped, dacă acesta are dimensiunile mai mici cu 40% decât cel inițial?

4. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile L = 0,66 dam, l = 5,5 m și h = 48 dm. Un alt paralelipiped se obține micșorând lungimea cu 15% din ea și mărind lățimea cu 11% din valoarea ei. Comparați volumele celor două corpuri.

5. Un paralelipiped dreptunghic are lungimea L, lățimea l și înălțimea h. Aflați volumul dacă $L + l$ = 19 m, $L + h$ = 18 m și $l + h$ = 17 m.

6. Un paralelipiped dreptunghic are suma tuturor muchiilor de 64 m. Aflați volumul paralelipipedului, dacă lățimea este jumătate din lungime și cu 4 mai mare decât înălțimea.

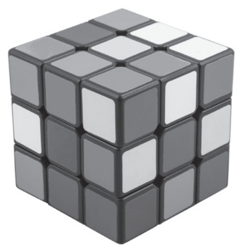
7. Calculați latura cubului cu volumul de 27 dm^3. Câți litri de apă sunt necesari pentru umplerea cubului, dacă pe fundul lui s-au pus 7000 cm^3 nisip?

8. Un șanț în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile L = 5 m, l = 50 cm, h = 75 cm. El trebuie umplut cu pământ, cu ajutorul unei roabe în care intră 60 dm^3 de pământ. Câte roabe de pământ sunt necesare pentru a umple șanțul?

9. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, exprimate în cm, sunt trei numere naturale distincte mai mici ca 30, divizibile cu 5. Dacă lungimea este cu 10 cm mai mare ca lățimea și înălțimea este 5/3 din lungime, aflați volumul paralelipipedului.

10. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin 3 numere naturale impare consecutive a căror medie aritmetică este cel mai mic număr prim de două cifre distincte. Aflați volumul paralelipipedului.

SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!



Cubul lui Rubik este un joc problemă de tip puzzle inventat în 1974 de către sculptorul și profesorul de arhitectură maghiar Ernő Rubik.

Numit inițial „Cubul Magic” de către inventatorul său, Ernő Rubik, a fost redenumit „Cubul lui Rubik” în 1980 și a câștigat premiul special „Cel mai bun joc problemă” la Jocul Anului în Germania. Este cea mai bine vândută jucărie din lume, cu peste 300000000 de cuburi vândute în lume până în 2005.

Pe un cub Rubik fiecare dintre cele șase fețe este colorată într-una din șase culori (în mod tradițional alb, galben, portocaliu, roșu, albastru și verde). Un mecanism permite rotirea independentă a fiecărei fețe, astfel încât culorile să se poată amesteca. Pentru rezolvarea jucăriei, fiecare față trebuie adusă la o singură culoare.

Există foarte multe variații ale cubului, produse pe scară largă, printre cele mai răspândite fiind: puzzle-urile cubice de la 2 × 2 × 2 până la 11 × × 11 × 11 (11 straturi), puzzle-urile cu forme geometrice diferite, cum ar fi: tetraedrul, piramida (Pyraminx), octaedrul, dodecaedrul sau icosaedrul.

Căutați pe internet metode de rezolvare rapidă a cubului Rubik!

PROBLEME RECAPITULATIVE

ACTIVITĂȚI PRACTICE

• Pentru o persoană care stă într-o cameră sunt necesari 5 m^3 de aer. Măsoară dimensiunile sălii de clasă și verifică dacă fiecare elev are la dispoziție cantitatea de aer necesară.

• Părinții voștri s-au hotărât ca, în vacanța care urmează, să facă renovări în locuință. Pentru a-i ajuta, faceți schița locuinței voastre. Folosind schița, calculați câtă gresie trebuie cumpărată pentru a putea acoperi suprafețele bucătăriei și a băii și cât parchet trebuie pentru holuri și camere. Pereții din bucătărie și baie se acoperă cu faianță, toți ceilalți pereți și tavanele se văruiesc. Calculează câtă faianță este necesară și cât var (la 10 metri pătrați de perete se consumă aproximativ 1 litru de var pe strat). Câți bani sunt necesari pentru renovare? (Căutați prețurile pentru materiale pe internet sau în magazine).

1. Copiați tabelele în caiete și completați-le după model:

15,5 cm	155 mm	0,000155 km	1,55 dm	0,155 m	0,0155 dam
0,34 km	...m	...mm	...cm	...dam	...dm
10250 dm	...cm	...m	...dam	...hm	...km

5,005 cm^2	500,5 mm^2	0,05005 dm^2	0,0005005 m^2	0,00000155 dam^2
0,12 km^2	...m^2	...cm^2	...dam^2	...dm^2
110230 ^{2}m	...cm^2	...dam^2	...hm^2	...km^2

21231,001 cm^3	21231001 mm^3	0,021231001 m^3	0,000021231001 dam^3
0,4 km^3	...m^3	...dam^3	...hm^3
10410250 dm^3	...cm^3	...m^3	...dam^3

2. Cu cât se mărește perimetrul unui pătrat, dacă mărim latura sa cu 4 cm?

3. Curtea bunicului are lungimea de 75 m și lățimea egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime. Bunicul vrea să facă gard din 5 rânduri de sârmă susținută de stâlpi de lemn situați la distanță de 2,5 m unul de altul. Gardul va avea și două porți din lemn de 1,5 m fiecare, susținute de stâlpi. Câtă sârmă și câți stâlpi de susținere sunt necesari?

4. Perimetrul unui pătrat este de 64 cm. Aflați perimetrul unui dreptunghi care are lungimea de 2 ori mai mare decât latura pătratului, iar lățimea de 4 ori mai mică decât latura pătratului.

5. Mama a făcut o față de masă dreptunghiulară cu lungimea de 2,2 m și lățimea cu 0,6 m mai mică și vrea să pună pe margine dantelă. Câtă dantelă îi trebuie?

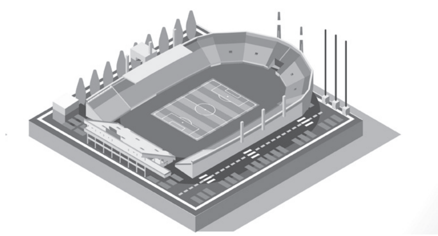
6. Dimensiunile unui dreptunghi sunt de 10,5 dm și 62 cm. Calculați aria unui pătrat care are același perimetru cu dreptunghiul.

7. Un pătrat are aria egală cu 16 m^2. Un dreptunghi are lungimea egală cu latura pătratului și lățimea egală cu $\frac{3}{4}$ din lungime sa. Calculați perimetrul dreptunghiului.

8. Un dreptunghi are perimetrul egal cu 180 m și lungimea de 5 ori mai mare decât lățimea. Aflați aria dreptunghiului.

9. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 0,5 m, 4 dm, 30 cm este plină cu apă. Transferăm apa, printr-un robinet, în sticle de 2 litri. De câte astfel de sticle este nevoie pentru a goli în întregime cutia?

10. Un teren de fotbal utilizat în meciurile internaționale are formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 100 m și 64 m și este acoperit cu gazon sintetic. Terenul este înconjurat de o pistă de 5,5 m lățime, după care urmează tribuna care are lățimea de 35,5 m. Întreg stadionul este împrejmuit cu un gard.



a) Care este suprafața gazonului? Dar suprafața întregului stadion?

b) Care este lungimea gardului care înconjoară stadionul?

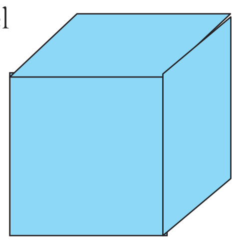
11. Aflați volumul unui paralelipiped dreptunghic ale cărui dimensiuni verifică relațiile: $L + l = 17{,}1$ cm, $L + h = 18$ cm și $l + h = 13{,}9$ cm.

12. Un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 30 cm, 3,5 dm și 0,65 m. Câți *l* de apă sunt necesari pentru a umple 85% din acvariu?

13. Perimetrul unui dreptunghi este de 24 m, iar aria unui pătrat, cu latura egală cu lățimea dreptunghiului, este un sfert din aria dreptunghiului. Aflați aria dreptunghiului.

14. Un dreptunghi are perimetrul de 34 m. Dacă se mărește lungimea sa cu 50 dm și lățimea cu 300 cm, atunci aria dreptunghiului se mărește cu 80 m^2. Aflați aria dreptunghiului inițial.

15. Un cub vopsit are latura de 4 cm. Se taie cubul astfel încât să obținem cuburi cu latura de 1 cm.



a) Câte cuburi au trei fețe vopsite?

b) Câte cuburi au două fețe vopsite?

c) Câte cuburi au o față vopsită?

d) Câte cuburi nu au fețe vopsite?

16. Se consideră un pătrat ce are în fiecare colț numărul 1, iar în centru suma numerelor din colțuri. Se numește „ modificare” mărirea cu o unitate a numerelor din trei colțuri. Nu se pot face două „modificări” consecutive pe aceleași trei colțuri.

a) Găsiți numărul de „modificări” ce s-au făcut dacă în centrul pătratului avem numărul 22.

b) Determinați numărul de „modificări” ce trebuie făcute astfel încât să obținem în colțuri numere egale (primul caz posibil de numere egale).

c) Arătați că, dacă numărul de „modificări” este impar, atunci cel puțin unul dintre colțuri este par și cel puțin unul dintre colțuri este impar.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. 145,0231 m^2 sunt egali cu:

a) 1450231 mm^2; b) 14,50231 dam^2;
c) 145023,1 dm^2; d) 0,01450231 hm^2.

2. Curtea școlii are forma de dreptunghi cu lungimea de 95,1 m și lățimea de 3 ori mai mică. Gardul școlii are lungimea de:

a) 126,8 m; b) 380,4 m; c) 374,4 m; d) 253,6 m.

3. Aria unei fețe a unui cub este egală cu 0,16 cm^2. Suma muchiilor cubului, exprimată în cm, este egală cu:

a) 0,4 cm; b) 1,6 cm; c) 4,8 cm; d) 3,2 cm.

4. Un paralelipiped dreptunghic are laturile exprimate prin numere naturale prime distincte impare de o cifră (unitatea de măsură este cm). Volumul paralelipipedului este egal cu:

a) 135 cm^3; b) 15 cm^3; c) 315 cm^3; d) 105 cm^3.

5. Un pătrat și un dreptunghi au perimetrele egale. Dacă aria pătratului este 81 cm^2 și lungimea dreptunghiului este de 4 ori mai mare decât lățimea acestuia, atunci aria dreptunghiului este egală cu:

a) 55 cm^2; b) 42 cm^2; c) 51,84 cm^2; d) 49,36 cm^2.

Punctaj: 1p, 2p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

Testul 2

1. 54,0021 m^3 sunt egali cu:

a) 54002100 cm^3; b) 0,540021 dam^3;
c) 540021 dm^3; d) 0,000540021 hm^3.

2. Se consideră toate dreptunghiurile care au perimetrul egal cu 12 m și laturile exprimate prin numere naturale. Cea mai mare arie a unui astfel de dreptunghi este egală cu:

a) 9 m^2; b) 8 m^2; c) 5 m^2; d) 10 m^2.

3. Un cub are latura de 5 m. Cubul se împarte în cubulețe cu latura de 1 m. Suma volumelor cubulețelor mici este egală cu:

a) 5m^3; b) 125 m^3; c) 100 m^3; d) 25 m^3.

4. Pentru împrejmuirea unui teren dreptunghiular, având lățimea de 425 dm și lungimea cu 11,1 m mai mare, cu trei rânduri de sârmă, s-au cumpărat 6 role de sârmă de 0,1 km fiecare. Lungimea sârmei rămase după împrejmuire este egală cu:

a) 407,8 m; b) 124 m; c) 50 m; d) 23,4 m.

5. Un pătrat și un dreptunghi au ariile egale. Dacă latura pătratului este 10 cm și lățimea dreptunghiului este 4 cm, atunci perimetrul dreptunghiului este de:

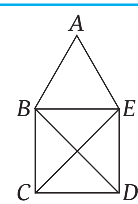
a) 56 cm; b) 58 cm; c) 60 cm; d) 40 cm.

Punctaj: 1p, 2p, 2p, 2p, 2p; 1p din oficiu.

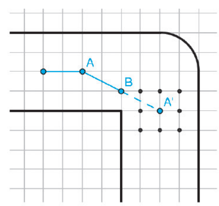
SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM! • SĂ NE JUCĂM!

• Încercați să desenați căsuța de mai jos pornind de la unul dintre vârfuri, fără a ridica vârful creionului de pe foaia de hârtie și fără a trece de două ori peste aceeași linie. Ce traseu veți urma? Găsiți mai multe soluții!

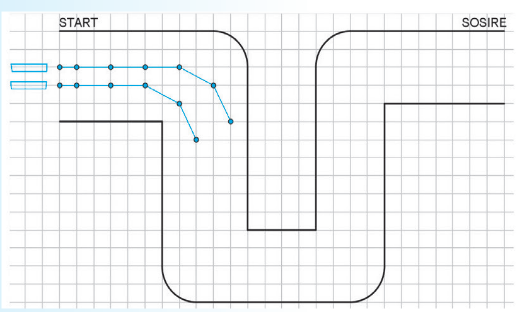
Soluție: CBAEDBECD; CDEBAECBD; DCBEABDEC.



KARTING PE HÂRTIE



Regulile jocului: Concurenții avansează pe rând, iar deplasarea se face dintr-un nod în altul astfel: căutăm simetricul penultimei poziții (A) față de ultima poziție (B). Găsim astfel punctul A' și putem să rămânem acolo sau putem alege oricare dintre cele 8 puncte care îl înconjoară (punctele negre de pe desenul alăturat). Nu putem să ne plasăm pe o poziție ocupată de un concurent. Dacă ieșim din traseu, trebuie reluată *cursa*. Câștigă primul care termină traseul. Putem începe cursa cu o pătrățică, două sau trei (depinde de mărimea traseului, dar aveți grijă să ***nu ieșiți în decor***). Alături este un exemplu cu două ***kartinguri*** și cu modul în care au început ele cursa. Desenați și voi un traseu pe o foaie de matematică și ... *cel mai bun să câștige!*



INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL 1

Pag. 12. **1.** 31-33, 800-802, 12344-12346, 2004-2006, 1698419-1698421. **2.** 482, 7001, 2384000. **3.** 17, 27, 37, 47, 57, 67. **4.** 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. **5.** *O* de coordonată 0, *N* de coordonată 2, etc. **6.** Numărăm, începând de la 0, câte unități sunt până la punctul pe care vrem să îl reprezentăm. **8.** De exemplu, unitatea de două pătrățele din caietul de matematică reprezintă 10. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** a) 1234567; b) 9876543210. **2.** 203, 213, 223, 233, 243, 253, 263, 273, 283, 293 și 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95. **3.** 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999. **4.** 3000, 2100, 1200. **5.** 5 unități. **6.** Diferența dintre coordonata mai mare și cea mai mică. **7.** 15 numere; 99 de numere. **8.** 90 – 4 = 86 de numere.

Pag. 15. **1.** Cel cu mai multe cifre este mai mare. **2.** 16 și 18. **3.** 99 > 88 > ... > 22 > 11. **4.** 60, 80, 230, 1000, 569500. **5.** 6900, 71900, 563200. **6.** 4 bancnote. **7.** Cele mai ieftine 7 obiecte. Total: 704. Sau: cele mai scumpe patru obiecte și pachetul de cafea. Total: 983 lei. **8.** 16 corecte și 4 greșite.

Pag. 17-18. **1.** a) 40; b) 64; c) 69; d) 111; e) 666; f) 40. **2.** 11459 + 308 = 11767. **3.** a) 1652; b) 3728; c) 100; d) 6837. **4.** a) 608 – comutativitate; b) 0 este element neutru la adunare; c) 624 – asociativitate; d) 200 – comutativitate și asociativitate. **5.** 63 de cărți. **6.** 1943. **7.** 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 149. **2.** 7 = 0 + 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4. Sunt patru soluții. **3.** 441 + + 26 = 467; 3612 + 832 = 4444 sau 3617 + 827 = 4444; 45598 + 8723 = 54321.

Pag. 20. **1.** 9808. **2.** a) 834; b) 94333; c) 180797; d) 90064; e) 2002; f) 90925. **3.** 4209; 2261. **4.** 200 – – 150 = 50 lei. **5.** 295 în a doua școală, 570 în a treia. Total: 1209. **6.** 380. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** Grupăm câte două și efectuăm. Obținem 1000. **2.** 10 și 19. **3.** 64 lei.

Pag. 23-24. **1.** a) 216; b) 3400; c) 17376; d) 32000; e) 1584312; f) 136500; g) 920805; h) 103400; i) 0; j) 1081; k) 2310. **2.** a) 1; b) $27\cdot13+27\cdot591$. **3.** 61712. **4.** 48; $2\cdot48=96$; $3\cdot48=144$. **5.** $26\cdot161+13\cdot23=4485$ **6.** 99 : 3 = 33. **7.** $2\cdot5\cdot x=90\Rightarrow x=9$. **8.** $a\cdot b=10$. Numerele sunt 2235, 2532. **9.** a) 50; b) 80; c) 60; d) 87600; e) 17800; f) 7(x + y – z); g) 2(5 + a). **10.** a) $3\cdot7+2\cdot11=43$; b) $7+13\cdot11=150$; c) 77. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** De 6 ori. **2.** $5=1\cdot5$; $5=1\cdot5\cdot1$; Nu. **3.** 234, 345. **4.** 5060, $\overline{506y}$ cu y de la 0 la 9 și $\overline{5x60}$ cu x de la 0 la 9. Sunt 21 de numere. **5.** a) 4; b) 28; c) 73. **6.** a) $2(3a-4b)$; b) $=9\cdot7-7\cdot2=7(9-2)=49$. **7.** a) $x=11+2(a-b)\Rightarrow x=45$; b) $x=45+2(a-b)\Rightarrow x=79$.

Pag. 26. **2.** 235. **3.** 156. **4.** 1556 bancnote. **5.** 2 lei.

Pag. 28. **2.** $322=30\cdot10+22$ deci 10 cartoane pline și unul cu 22 de ouă. **3.** $n=6\cdot5+r,\ r<6$. *Răspuns* 30, 31, 32, 33, 34, 35. **4.** $n=10q+9$; q = 1. **5.** $n=7q+6$. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 5, 10, 15. **2.** Un număr este de 7 ori mai mare decât celălalt și încă 5. Numerele sunt 89 și 12. **3.** 162 și 37.

Pag. 29-30. **2.** 51111, 15111, 11511, 11151, 11115. **3.** 10 numere de forma $\overline{9x1}$, 10 numere de forma $\overline{8x2}$, ..., 10 de forma $\overline{1x9}$. În total sunt 90 de numere. **4.** Alegem unitatea astfel încât o unitate corespunde lui 10. **5.** 110, 101, 200. **6.** 17 numere. **7.** 10 (de la 0 la 99). **8.** 6 + 6 + + 6 + 6 + 6. **10.** 1596 < 2805. **11.** 732 lei. **12.** Orice număr natural. **13.** 111111 > 99999. Diferența este 11112. **14.** a) 0; b) $124\cdot x$; c) $(x+3)\cdot100$. **15.** 431 – 389 = 42; 4832 + 566 = 5398; Primul factor este 563, iar al doilea este orice număr natural de forma $\overline{x3}$, cu x > 1. **17.** Numărăm numerele de o cifră și pe cele de două cifre. Total: 37. **18.** 17 cofraje. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** De 20 de ori. **2.** 83 de cifre. **3.** 48. **4.** 90 de numere. **5.** a) 13, 16, 19; b) 42, 49, 56; c) 56, 67, 78; d) 25, 36, 49. **6.** a) 0, 1, 2; b) 9; c) 7, 8, 9; d) 6, 7, 8, 9. **7.** $(458+459+460+461+462)+1001=3301$. **8.** Cu ordinea operațiilor sau cu factor comun. **9.** b) 114 m. **10.** $5(1+2+3+...+51)=6630$. **11.** $a\cdot b=345$; $(a+7)\cdot b=450\Rightarrow ab+7b=450$, de unde b = 15 și a = 23. **12.** a > b. **13.** Lui 567 îi mai adăugăm două numere în față și două după: 565, 566, 567, 568, 569. **14.** x poate fi 0, 1, 2, 3, 4, iar y poate fi 3, 4, 5,6, 7, 8, 9; când x = 4, y nu poate fi nici 3, nici 4.

Testul 1. **1.** c. **2.** d. **3.** c. **4.** b. **5.** d. **6.** a. **7.** b. **8.** b. **9.** c. Testul 2. **1.** a = 100, b = 106, a < b; **2.** 56 : 12 = 4 (rest8), 12 · 4 + 8 = 56. **3.** 224. **4.** 50. **5.** 1·2·5·10. **6.** 50 bănci, 123 oameni. **7.** $17-5\cdot(2+125:5):27+8$. Testul 3. **1.** a = 118, b = 120, a < b. **2.** 129 : 9 = 14 (rest3), 14 · 9 + 3 = 129. **3.** 136. **4.** 250. **5.** 1·2·7·14. **6.** 9930 lei. **7.** $(9-3)\cdot6+11-(16-8)=39$.

Pag. 34. **1.** 1, 1, 9, 25, 1000000. **3.** a) 7^2; b) 11^3; c) 32^2; d) 17^1; e) 2^6. **4.** a) $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$. **5.** 25 + 8 = 33; b) 108; c) 10; d) 111; e) 79; f) 19; g) 1; h) 1; i) 36; j) 0. **6.** $2^2 + 3^2$. **7.** $2^2 + 2^3$ sau $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 3792 și 850371. **2.** a) 2; b) 224; c) 70; d) 1; e) 270000.

Pag. 37. **1.** a) 2^{12}; b) 5^6; e) 2^7; f) 5^9; g) 2^9; h) 2^6; s) $2^{5\cdot3\cdot4}$; u) $2^{4\cdot7\cdot5\cdot2}$. **2.** $2^1, 2^4, 2^3, 2^5, 2^{12}, 2^{20}, 2^{60}$. **3.** a) $2^4(9-1)=2^4\cdot2^3=2^7$; b) 0; c) 5^1; e) 1. **4.** $5^{12}, 5^{38}, 5^{32}$.

Pag. 39-40. **1.** a) 56^{10}; b) 55^8; m) 3^{46}. **3.** a) 567; c) 6^{625}; d) 1125^{269}; e) 6^{115}; f) 1; g) 12^{657}. **4.** 48 de cifre, 47 de zerouri. **5.** a) 0; b) 0. **6.** a = 9990, b = 100, c = 19180. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** X = 1, Y = 181 și $1^{181}+181^1=182$. **2.** 49. **3.** 26. **4.** 0. **5.** 100. **6.** 351. **7.** 352.
8. $A=13(1+12)+12\cdot13^2+12\cdot13^3....=13^2(1+12)+12\cdot13^3+...=13^3(1+12)+...=13^{2004}$.
9. $a^2+2a(b-c)+d^2=3^2+2\cdot3\cdot5+4^2=55$.
Pag. 42. **1.** 49 = 7^2. **2.** 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361. **3.** 12^2 = 144, 19^2 = 361. **4.** Niciun număr natural la pătrat nu dă 56. În plus, 49 < 56 < 64, 49 și 64 fiind pătrate perfecte consecutive. **5.** 136. 6. 225. **7.** 16, 36. **8.** 639 este între 625 și 676. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** Calculăm $n=[1+2+3+...+(2n+1)]-2(1+2+3+...+n)$. **2.** $2^{6n+2}(10+3\cdot2)=2^{6n+2}\cdot2^4=\left(2^{3n+3}\right)^2$, indiferent de valorile lui n. **3.** Rescriem doar cu bazele 2 și 3 și, apoi, factor comun.
Pag. 44. **2.** Scriem întâi puterile cu aceeași bază și apoi le punem în ordinea crescătoare a exponenților. **3.** c) $3^{404}=\left(3^4\right)^{101}=81^{101}$, $2^{707}=128^{101}$, $5^{303}=125^{101}$; d) $5^{34}<5^{36}=125^{12}<128^{12}=2^{84}$. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** a) $2^{512}-2^{510}=2^{510}\left(2^2-1\right)=3\cdot2^{510}=3\cdot\left(2^3\right)^{170}=3\cdot8^{170}$ și $3^{341}=3\cdot9^{170}$; b) $2\cdot8^{19}<2\cdot9^{19}$; c) $8\cdot243^8<8\cdot256^8$; f) scriem puterile doar cu bazele 2, 3 și 5; h) $8\cdot3^{n+1}\cdot3\cdot5^{2n+2}=24\cdot3^{n+1}\cdot5^{2n+2}$, $7\cdot5\cdot5^{2n+2}\cdot3^{n+1}=35\cdot3^{n+1}\cdot5^{2n+2}$
Pag. 47. **1.** $42=4\cdot10+2$, $897=8\cdot10^2+9\cdot10+7$, $\overline{abc}=a\cdot10^2+b\cdot10+c$. **3.** Cifra este pentru număr cum este litera pentru cuvânt. **4.** $2_{(10)}=10_{(2)}$, $13_{(10)}=1101_{(2)}$, $55_{(10)}=110111_{(2)}$. **5.** $11_{(2)}=1\cdot2+1=3_{(10)}$, $10101_{(2)}=1\cdot2^4+1\cdot2^2+1=21_{(10)}$, $10111_{(2)}=1\cdot2^4+1\cdot2^2+1\cdot2+1=23_{(10)}$.
Pag. 48. **2.** a) 24; b) 120; c) 1048; d) 294; e) 473; f) 1; g) 70. **3.** a) 63; b) 3240; c) 187; d) 4; e) 384. **4.** a) 11392; b) 1022; c) 1585; d) 16678.
Pag. 49-50. **4.** $144-64=80$. **5.** $324-125=199$. **6.** $105:32=3$ rest 9. **7.** e) $2^{1+2+3+...+100}=2^{5050}$; h) 2^{57}; j) 1; l) 1985. **8.** 1 + 4 + 9 + 36 = 50. **9.** 15^2. **10.** $2017(2017-1)-2016=2017\cdot2016-2016=2016(2017-1)=2016^2$. **11.** a) Numărul este 99(a – c) care este maxim când a = 9 și c = 1. Deci, numărul este 792. b) $\overline{abc}-\overline{cba}=99(a-c)=9\cdot11\cdot(a-c)$ care nu poate fi pătrat perfect decât dacă a – c este de forma $11\cdot x^2$ ceea ce este imposibil pentru că a și c sunt cifre. **12.** 5 cifre. **13.** 11, 13, 14. **14.** 625. **15.** n poate să fie 0, 1, 2, 3. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** n = 200^2. **2.** De 366 de ori. **3.** Efectuăm împărțirile și obținem $4\cdot3^{x+1}=4\cdot3^2$ de unde x = 1. **4.** d) 0; e) 1; f) $11\cdot6^n$.
5. $2011^{2011}=2011\cdot2011^{2010}=\left(25^2+25^2+25^2+10^2+6^2\right)\cdot2011^{2010}=$
$=\left(25\cdot2011^{1005}\right)^2+\left(25\cdot2011^{1005}\right)^2+\left(25\cdot2011^{1005}\right)^2+\left(10\cdot2011^{1005}\right)^2+\left(6\cdot2011^{1005}\right)^2$. **6.** Ultima cifră a numărului este 2, deci nu poate fi pătrat perfect.
Testul 1. **1.** c. **2.** b. **3.** c. **4.** a. **5.** b. **6.** d. **7.** c. **8.** d. **9.** a. Testul 2. **1.** a) 4; b) 48; c) 40. **2.** b) $2^{100}>2^{99}$; c) $64^{19}<81^{19}$. **3.** a) $\left(17^{14}\right)^2$; b) $\left(5^{19}\right)^2$; c) 28^2. **4.** a) 7^6; b) 125; c) 3^7. **5.** x = 20.

Pag. 53. **1.** 10 piese, 80 de piese. **2.** 30 de lei. **3.** Fiecare culege în 5 ore câte 25 kg de mere. **4.** 25 de ore. **5.** 14 lei. **6.** 15 zile. *Probleme pentru micii campioni.* **2.** 2592 kg. **3.** 225 de lei, 75 de lei. **4.** 4100 de lei.
Pag. 55. **1.** 50 kg un sac cu făină și 30 kg un sac cu cartofi. **2.** 20 de lei un metru de mătase și 15 lei un metru de stofă. **3.** Prețul unei gâște este 50 de lei și al unei rațe este 65 lei. **4.** O bilă mare cântărește 5 grame și o bilă mică 3 grame. **5.** 35, 100. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** După ce scriem datele problemei, înmulțim prima relație cu 5 și scădem din ea a doua relație. Obținem că 1 creion și 2 reviste costă 24 de lei. Dublăm această relație, scădem din prima și obținem că un caiet, un creion și o revistă costă 16 lei; 3 lei, 2 lei, 11 lei.

Pag 59. **1.** 11; 14. **2.** 5, 50. **3.** 5 ani și 25 ani. **4.** 30, 50. **5.** 133, 134, 135. **6.** 30, 10. **7.** 5, 30. **8.** 20 de cutii cu unt, 60 de cutii cu lapte, 58 cutii cu iaurt. **9.** O ciocolată costă 6 lei, iar o pâine 1 leu. **10.** 40 de bănci și 210 persoane. **11.** 19200 kg de grâu și 250 de saci. **12.** 33 de elevi și 58 de pomi.

Pag. 61. **1.** Din datele problemei scriem $[(x + 27) : 4 + 6] : 7 - 7 = 1$. Cu ajutorul metodei mersului invers se obține numărul inițial: 173. **2.** Reprezentăm grafic prin segmente și cu ajutorul metodei mersului invers se obține: 108 pinguini. **3.** 165 $. **4.** Cu ajutorul metodei mersului invers deducem că, dacă a treia oară se vinde o cantitate de două treimi din rest și încă 60 kg și nu mai rămâne nimic, 60 kg reprezintă o treime din rest. Deci, după a doua zi mai avem în magazin 180 kg de marfă. A doua oară vindem două treimi din rest, mai puțin 60 kg și rămânem cu 180 kg, adică o treime din rest reprezintă 240 kg, deci restul după prima vânzare este de 720 kg. Prima dată vindem o treime din cantitate și încă 80 kg și rămânem cu 720 kg, adică două treimi din total reprezintă 900 kg. Totalul este de 1350 kg marfă. **5.** 100 km. **6.** 190 prăjituri. **7.** 150000 lei.

Pag. 63. **1.** Presupunem că elevul dă toate răspunsurile bune și trebuia să obțină 200 de puncte. Diferența de $200 - 130 = 70$ (puncte) apare din faptul că la o problemă greșită nu primește 10 puncte și i se scad 4 puncte, deci pierde 14 puncte; $70 : 15 = 5$ (probleme greșite). 15 răspunsuri sunt corecte. **2.** Presupunem că toate camerele au 2 paturi; am avea în total $32 \times 2 = 64$ paturi. Diferența $100 - 64 = 36$ paturi apare din faptul că avem camere cu 5 paturi, adică cu 3 paturi mai mult; $36 : 3 = 12$ camere cu 5 paturi și 20 de camere cu 2 paturi. **3.** 23 de apartamente de 4 camere, 19 apartamente de 2 camere. **4.** În cel mai nefavorabil caz, la fiecare extragere vom scoate din cutie bile negre. După 11 extrageri am terminat bilele negre și la a 12-a extragere sigur scoatem o bilă albă. Cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl extragem din cutie în condițiile problemei este 12.

Pag 64. **1.** 8 ore. **2.** După plecarea celor 4 muncitori mai sunt necesare 5 zile. **3.** Cei 4 muncitori lucrează în total 38 de zile. Plata pentru o zi este $1330 : 38 = 35$ (lei). Rezultat: 175 lei, 280 lei, 455 lei, 420 lei. **4.** Dacă 5 găini fac 15 ouă în 6 zile, atunci 1 găină face 3 ouă în 6 zile, deci 1 ou la 2 zile. O găină face în 10 zile 5 ouă, iar 8 găini fac în 10 zile 40 de ouă. **5.** Dacă o gâscă consumă cât două găini, atunci 5 gâște consumă cât 10 găini. Cele 40 kg de grăunțe sunt consumate de 10 găini și 5 gâște, ceea ce e echivalent cu 10 gâște. Înseamnă că o găină consumă 2 kg de grăunțe și o gâscă, 4 kg de grăunțe. **6.** Înmulțim prima relație cu 5 și pe a doua cu 4 și obținem că 1 caiet costă 2 lei și o carte costă 15 lei. **7.** Aflăm că 1 caiet costă 3 lei și o carte 10 lei. **8.** 18 lei. **9.** Dacă 1 m de dantelă este de 3 ori mai scump decât 1 m de stofă, iar 1 m de voal este de 2 ori mai scump decât 1 m de stofă, atunci 3 m de stofă, 1 m de dantelă și 2 m de voal costă cât 10 m de stofă. Obținem că 1 m de stofă costă 34 de lei, 1 m de dantelă costă 102 lei și 1 m de voal, 68 de lei. **10.** Dacă perimetrele sunt egale, obținem că 6 lățimi ale dreptunghiului sunt egale cu 300 m. Dimensiunile dreptunghiului sunt 100 m și 50 m. Fiecare are nevoie de 75 de stâlpi. **11.** Reprezentăm numărul de mere al fiecărui copil cu un segment și încă 9 mere. La final ei rămân, împreună, cu 4 segmente, care este egal cu un segment plus 9 mere. Un segment reprezintă 3 mere. Fiecare copil a avut la început 12 mere. **12.** Dacă peste 6 ani cei trei au împreună 103 ani, atunci în prezent au împreună 85 de ani. Reprezentăm prin segmente faptul că tatăl are cu 3 ani mai puțin decât mama și fiul la un loc și obținem că, în prezent, tatăl are 41 de ani și mama și fiul împreună au 44 de ani. Peste 6 ani, mama și fiul la un loc vor avea 56 de ani, iar mama are de 3 ori mai mult decât fiul. Răspuns: 9 ani, 39 ani și 41 de ani. **13.** Reprezentăm numerele prin segmente. Dacă se împarte al treilea număr la 3, se înmulțește al patrulea număr cu 3 și se obțin numere egale, atunci al patrulea număr va fi reprezentat printr-un segment și al treilea prin 9 segmente. Primul număr va fi format din 3 segmente minus numărul 3 și al doilea număr va fi format din 3 segmente plus numărul 3. În total, cele 16 segmente sunt egale cu 48. Numerele sunt: 6, 12, 27, 3.

Testul 1. **1.** c. **2.** a. **3.** a. **4.** d. **5.** b. Testul 2. **1.** b. **2.** a. **3.** c. **4.** a. **5.** d. Testul 3. **1.** 4 ani, 24 ani, 27 ani. **2.** Vom folosi metoda mersului invers. Dacă în a treia zi s-a vândut jumătate din restul de marfă și încă 30 kg și nu a mai rămas nimic, atunci după a doua zi restul de marfă era de 60 kg. Aceasta reprezintă jumătate din marfa rămasă după prima zi minus 20 kg. După prima zi au rămas 160 kg de marfă. În total au fost 340 kg de marfă. **3.** Mai sunt necesare 10 zile.

Pag 68. **1.** 1, 2, 3, 4, 6, 12; 1, 2, 3, 6, 9, 18; 1, 2, 4, 7, 14, 28; 1, 2, 4, 8, 16, 32; 1, 3, 9, 27, 81; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120. **2.** $S = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18$. **3.** 1990, 2000, 2010.

Pag 70. **2.** 1, 2, 5, 10; 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; 1, 3, 5, 9, 15, 45. **3.** 1, 2, 3, 4, 6, 12; 1; 1, 2, 4, 5, 10, 20; 1, 2, 4. **4.** 144, 288, 432; 5184, 10368, 15552; 600, 1200, 1800; 1584, 3168, 4752. **5.** 7 autocare. **6.** 30, 40, 50.

Probleme pentru micii campioni! **1.** 1089, 1210, 1331, 1452, 1573, 1694, 1815, 1936. **2.** 4, 9; 2, 3, 5, 7; 6, 8. **3.** Numerele cerute sunt 100, 125, ...975; S = 25(4 + 5 + 6 + ... + 39).

Pag 72. **1.** 16, 18, 20, 22, 24. **2.** 25, 27, 29, 31, 33, 35. **3.** 896. **4.** 2(2*n* + 3) este număr par. **5.** Numărul este 102 și apoi din 51 în 51 până la 969. **6.** 2905, 4905, 6905, 8905. **7.** Suma a trei numere naturale consecutive este număr par dacă 2 dintre numere sunt pare, deci primul este par. **10.** Cei *n* elevi din clasă au primit, fiecare, câte *n* – 1 fotografii, în total *n*(*n* – 1) fotografii. Produsul a două numere consecutive este număr par. **11.** 40 de dale.

Pag 75. **2.** 12100, 10000, 412000, 1500. **3.** 9876; 9875; 9870. **4.** 104; 105; 120. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 120, 122, 124, 126, 128; nu există numere, deoarece ultima cifră (3) este impară; *x* poate fi orice cifră diferită de 0 și *y* cifră pară. **2.** Ultima cifră trebuie să fie 0 sau 5. **3.** *x* poate fi orice cifră diferită de 0, *y* poate fi orice cifră, iar *z* trebuie să fie cifră pară în primul caz și 0 sau 5 în al doilea caz.

Pag 78. **1.** 24, 687, 306, 15, 126, 72, 3012. **2.** 450, 126. **3.** 24, 300, 126. **4.** 5004, 12150, 90000, 99. **5.** 9876, 9873, 9864. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** N = 657 are suma cifrelor 18. **2.** 120, 123, 126, 129; 513, 543, 573; 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99. **3.** 3627; 1710; 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99; 279. **4.** 354; cifra y trebuie să fie pară și *x* + *y* + 1 să fie divizibil cu 3. **5.** 8 + *x* + *y* trebuie să se dividă cu 9. **6.** Numărul trebuie să se dividă cu 5 și cu 3. **7.** Suma cifrelor numerelor trebuie să fie multiplu de 3, dar nu și multiplu de 9.

Pag. 81. **1.** 24, 680, 72, 3012. **2.** 450, 125, 1100. **3.** 2400, 450, 300. **4.** 9876, 9875, nu există. **5.** 120, 124, 128; $\overline{5x3}$ este impar; de la 12, din 4 în 4 până la 96. **6.** 3625; toate numerele de forma $\overline{1x100}$; 25, 50, 75; $\overline{2x9}$ nu se divide cu 25. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** Cifra x este 2 sau 6, iar *y* poate fi orice cifră; 18 numere. **2.** Raționament asemănător.

Pag. 84. **2.** Alegem numerele prime de două cifre distincte și calculăm al doilea termen. **3.** 2 și 127. **4.** Ultima cifră a numerelor prime mai mari ca 5 este 1, 3, 7 sau 9. Dintre 5 astfel de numere, există 2 cu ultima cifră egală. **5.** $\overline{abba} = 1001a + 110b$. Se scoate factor comun 11. **6.** *a* este număr par și nu este 2, deci nu este prim. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 2 și 13. **2.** 3 și 17.

Pag 85-86. **1.** 2, 10, 12, 20, 130, 450, 2010. **2.** Divizorii lui 14: 1, 2, 7, 14. Divizorii lui 22: 1, 2, 11, 22. Divizorii lui 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28. Divizorii lui 34: 1, 2, 17, 34. Divizorii lui 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45. 3. 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114. **4.** 15, 20, 25, 30, 35. **5.** 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99. **6.** 1040, 9945. **7.** 147, 196, 1568, 3528. **8.** 935. **9.** 1020, 1222, 1424, 1626, 1828. **10.** a) 2, 12, 32, 132, 312; b) 3, 12, 21, 123, 132, 213, 231, 312, 321; c) 12, 132, 312. **11.** 100, 100, 100, 100, 100, 100. **12.** 15. **13.** 90. **14.** a) 0, 2, 20, 50, 52, 250, 520, 502; b) 0, 5, 20, 25, 50, 205, 250, 520; c) 0, 20, 50, 250, 520. **15.** a) Cele două numere sunt divizibile cu 5, o echipă va conține 20 de fete și 7 băieți; sunt 5 echipe; b) Dacă toate echipele au același număr de copii și același număr de fete, atunci au și același număr de băieți. Nu se pot forma 10 echipe pentru că numărul de băieți nu se divide cu 10. **16.** 20, 24, 28. **17.** 66. **18.** $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 11 \cdot 91 \cdot \overline{abc}$. Orice număr de această formă se divide cu 11. **19.** Vezi rezolvarea de la problema 15. **20.** 12, 15, 18. **21.** 1431, 7437. **22.** 162, 963. **23.** Numărul este 50001 și se divide cu 3, deci nu este număr prim. **24.** Latura cubului trebuie să se dividă cu cele 3 numere, deci va fi 30 cm. **25.** 2, 7. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 5785. **2.** $x + (x+1) + (x+2) = 3(x+1)$. **3.** 9*n*, 9*n* + 9, există valori ale lui *n* pentru care 10*n* – 1 se divide cu 9. **4.** 3*n*, 3*n* + 3, 6*n* + 3, 3(*n* + 1) + 6*n*, există valori ale lui *n* pentru care 2*n* + 3 și 2*n* + 1 se divid cu 3. **5.** Trebuie ca *y* să fie cifră pară și *x* cifră impară. **6.** Primul număr este 35025 și mergem din 75 în 75 până la 35925. Nu există numere de forma $\overline{x1y}$ divizibile cu 75, pentru că nu respectă condițiile de divizibilitate cu 25. **7.** 5555. **8.** 280280, 460460, 235235. **9.** *a* = *b* = *c* = 3. **10.** *a* = *b* = 2, *c* = 5. **11.** Grupăm numerele câte 3 și arătăm că fiecare grupă de divide cu 19. **12.** Grupăm numerele câte 2 și arătăm că fiecare grupă de divide cu 42. **13.** Scoatem factor comun. **14.** Numărul este 3999... 9 și se divide cu 3, dar nu se divide cu 9. **15.** 211.

Testul 1. **1.** c. **2.** d. **3.** c. **4.** b. **5.** a. **6.** a. Testul 2. **1.** a, a, f, a, a, f, a, a. **2.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. **3.** 12, 96. **4.** a) 2, 12, 32, 132, 312; b) nu există; c) 3, 12, 21, 123, 132, 213, 231, 312, 321. **5.** 2, 262. **6.** 2, 4, 18. **7.** 30 cm.

Testul 3. **1.** Se aleg numerele. **2.** 0, 24, 48, 72, 96. **3.** 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60. **5.** 230, 232, 234, 236, 238. **6.** $4^n(1+4+16) = 4^n \cdot 21$. **7.** 88 cm.

CAPITOLUL II

Pag. 93. **5.** $\frac{5}{7},\frac{5}{9},\frac{7}{9},\frac{7}{5},\frac{9}{5},\frac{9}{7}$. **6.** subunitare: $\frac{21}{31},\frac{7}{15},\frac{11}{43},\frac{121}{212}$; echiunitare: $\frac{51}{51},\frac{101}{101}$; supraunitare: $\frac{12}{7},\frac{29}{17}$. **7.** $\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{3}{3},\frac{3}{4},\frac{3}{5}$. **9.** $1 \cdot 15 = 5 \cdot 3$; $2 \cdot 35 = 10 \cdot 7$; $14 \cdot 3 = 21 \cdot 2$. **10.** $\frac{50}{70}$. **11.** $n \cdot 21 = 42, n = 2$. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** subunitare: $\frac{3}{5},\frac{3}{7},\frac{6}{7}$; echiunitară $\frac{3}{3}$; supraunitare: $\frac{3}{2},\frac{6}{2},\frac{6}{5},\frac{9}{2},\frac{9}{3},\frac{9}{5},\frac{9}{7}$. **2.** $\frac{10}{12},\frac{11}{12},\frac{10}{13},\frac{11}{13},\frac{12}{13},\frac{10}{14},\frac{11}{14},\frac{12}{14},\frac{13}{14}$. **3.** Oana $\frac{1}{6}$ din măr, Raluca $\frac{2}{12}$ din măr, $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$ deci părți egale.

Pag. 96. **1.** $\frac{23}{51}>\frac{16}{51}$; $\frac{19}{117}<\frac{55}{117}$; $\frac{7}{11}>\frac{7}{15}$; $\frac{17}{56}>\frac{17}{65}$; $\frac{7}{97}<\frac{9}{97}$; $\frac{97}{7}>\frac{97}{9}$. **2.** a) $\frac{7}{37}<\frac{9}{37}<\frac{11}{37}<\frac{15}{37}<\frac{19}{37}<\frac{23}{37}$; b) $\frac{29}{21}<\frac{29}{20}<\frac{29}{17}<\frac{29}{11}<\frac{29}{9}<\frac{29}{7}$. **3.** a) 18, 19, 20; b) 49,50,51; c) 42, 43, 44. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** a) cea mai mică $\frac{12}{23}$, cea mai mare $\frac{99}{23}$; b) cea mai mică $\frac{23}{95}$, cea mai mare $\frac{23}{10}$. **2.** $\frac{5}{8}$ este între 0 și 1, iar $\frac{5}{3}$ este între 1 și 2; $\frac{5}{8}$ este mai aproape de 1 pentru că de la ea până la 1 este mai punțin de jumătate de unitate.

Pag. 98. **1.** $3\frac{7}{8}$, $4\frac{3}{11}$, $4\frac{12}{15}$, $6\frac{13}{19}$, $269\frac{5}{8}$, $84\frac{17}{37}$, $2956\frac{36}{41}$. **2.** $\frac{29}{11},\frac{32}{7},\frac{71}{6},\frac{176}{23},\frac{829}{8},\frac{12023}{12}$. **3.** $\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$, este între 6 și 7; $\frac{37}{5}$ este între 7 și 8; $\frac{39}{7}$ este între 5 și 6; $\frac{56}{11}$ este între 5 și 6. **4.** $\frac{117}{7}$, Barbu.

Pag. 100. **1.** $\frac{3}{6},\frac{9}{15},\frac{21}{12},\frac{39}{63},\frac{225}{150},\frac{333}{240}$. **2.** $\frac{10}{14},\frac{15}{21},\frac{20}{28},\frac{25}{35},\frac{35}{49},\frac{50}{70},\frac{75}{105}$. **3.** $\frac{350}{100},\frac{60}{100},\frac{110}{100},\frac{85}{100},\frac{148}{100},\frac{58}{100}$.

Pag. 103. **1.** 8, 9, 15, 25. **2.** a) $\frac{2}{5},\frac{6}{4},\frac{12}{19},\frac{18}{22},\frac{100}{200}$; b) $\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{7}{6},\frac{10}{14},\frac{40}{100}$; c) $\frac{3}{4},\frac{6}{9},\frac{7}{2},\frac{10}{15},\frac{20}{40}$. **3.** $\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{3},4\frac{2}{3},2\frac{2}{3},1\frac{2}{3}$. **4.** 4 fracții: $\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{12},\frac{16}{24}$. **5.** a) $\frac{50}{14},\frac{52}{14},\frac{54}{14},\frac{56}{14},\frac{58}{14}$ simplificate: $\frac{25}{7},\frac{26}{7},\frac{27}{7},\frac{28}{7},\frac{29}{7}$; b) $\frac{20^{(5}}{45}=\frac{4}{9}, \frac{25^{(5}}{45}=\frac{5}{9}$; c) simplificarea se poate face prin divizori comuni ai numerelor $\overline{2c}$ și 30, deci $\overline{2c}$ trebuie să se dividă cu 2, 3 sau 5; obținem fracțiile $\frac{20}{30},\frac{22}{30},\frac{24}{30},\frac{26}{30},\frac{28}{30}$ pentru 2, $\frac{21}{30},\frac{24}{30},\frac{27}{30}$ pentru 3 și $\frac{20}{30},\frac{25}{30}$ pentru 5; se elimină fracțiile care se repetă și simplificăm.

Pag. 106. **1.** a) 4 și 12; 8 și 16; 9 și 18; 15 și 30; 25 și 75; b) 5 și 30; 3 și 18; 7 și 42; 11 și 66; 3 și 45; c) 1 și 30; 1 și 88; 1 și 84; 1 și 36; 1 și 150. **2.** cel mai mic numitor comun: a) 42, 20, 15, 18, 99; c) 18, 60, 40, 100, 245; d) 7, 10, 6, 4, 8. **3.** ${}^{4)}\frac{1}{12}=\frac{4}{48}$, ${}^{3)}\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$, $\frac{1}{12}<\frac{5}{16}$; ${}^{3)}\frac{5}{8}=\frac{15}{24}>\frac{12}{24}={}^{2)}\frac{6}{12}$; $\frac{35}{60}<\frac{45}{60}$; $\frac{11}{12}>\frac{4}{12}$; $\frac{9}{60}>\frac{4}{60}$. **4.** În prima zi a citit mai mult $\left(\frac{4}{9}>\frac{3}{9}\right)$. **5.** ${}^{7)}\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$, ${}^{5)}\frac{5}{7}=\frac{25}{35}$, Andreea.

Pag. 109-110. **1.** $\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{22}{15},\frac{10}{17},\frac{23}{35}$. **2.** $\frac{4}{5},\frac{7}{11},\frac{12}{25},\frac{17}{43},\frac{2}{17}$. **3.** $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$, 1,1. **5.** a) $\frac{13}{8},\frac{23}{9},\frac{4}{3},\frac{10}{3},1$; b) $\frac{1}{3},\frac{9}{10},\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{2}$; c) $\frac{41}{35},\frac{275}{156},\frac{1}{36},\frac{1}{30},\frac{61}{30}$; d) $\frac{11}{18},\frac{31}{36},\frac{37}{40},\frac{13}{15},\frac{23}{16}$; e) $\frac{5}{24},\frac{7}{40},\frac{29}{60},\frac{1}{6},\frac{29}{18}$. **6.** a) $8\frac{7}{10}$, $6\frac{5}{8}$, $11\frac{2}{9}$, $16\frac{7}{8}$; b) $\frac{14}{15}$, $1\frac{11}{12}$, $2\frac{3}{5}$, 3. **7.** $\frac{2}{9}$ a doua zi, $\frac{7}{9}$ în primele două zile, $\frac{2}{9}$ a treia zi.

Pag. 112-113. **2.** $\frac{5}{24}, \frac{21}{20}, \frac{14}{3}, \frac{2}{9}, \frac{5}{6}$. **4.** $\frac{4}{5}; \frac{5}{4}; 3; 2; \frac{1}{5}; \frac{29}{30}$. **5.** 150 litri și $\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$ kg de sare (5 kg și un sfert); saramura pentru 5 butoaie $155\frac{1}{4}$ kg. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** $\frac{1}{8}$; 1; $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$; $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{50}{49}=\frac{50}{2}=25$.

Pag. 115. **2.** $\frac{1}{3}; \frac{9}{16}; \frac{1}{30}; \frac{1}{14}; \frac{441}{80}; \frac{24}{15}; 1\frac{11}{30}; 2\frac{1}{10}$. **3.** $\frac{5}{4} > \frac{5}{9}$, Nadia. Prin înmulțire/împărțire cu o fracție subunitară se obține o fracție mai mică/mare decât cea inițială.

Pag. 118. **1.** a) $\frac{9}{49}$; b) $\frac{1}{125}$; c) $\frac{8}{9}$; d) 1; e) $\frac{11}{12}$; f) $\frac{3}{500}$; g) $\frac{17}{15}$; h) $\frac{1111}{1000}$. **2.** $\left(\frac{5}{3}\right)^{12}$, $\left(\frac{7}{11}\right)^{8}$, $\left(\frac{11}{13}\right)^{12}$, $\left(\frac{5}{12}\right)^{64}$. **3.** $\left(\frac{5}{8}\right)^{5}$; $\left(\frac{8}{7}\right)^{10}$; $\left(\frac{11}{9}\right)^{11}$; 0.

Pag. 121. **1.** 25 m, 20 kg, 59 cm, 35 km, 480 lei. **2.** 9 m; 12 litri; 30 lei; 105 km; 60. **3.** 14; 350; 918; 88. **4.** 31. **5.** $\frac{3}{2}$ m; 2h; $\frac{5}{2}$ km; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{5}$; 1. **7.** 20; 60; 120. **8.** 300. **9.** 40 km, 20 km. **10.** 96 lei. **11.** 3990 kg/ha.

Pag. 122-123: **3.** 7; 24; 11; 7; 8. **5.** subunitare: $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$; echiunitare: $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}$; supraunitare: $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{5}$. **6.** $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21}, \frac{3}{1}, \frac{3}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{21}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}, \frac{5}{7}, \frac{5}{21}, \frac{15}{1}, \frac{15}{3}, \frac{15}{7}, \frac{1}{21}$; $\frac{1}{1}=\frac{3}{3}$, $\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$, $\frac{5}{1}=\frac{15}{3}$, $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$. **7.** $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$; $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$; $4 \cdot 21 = 12 \cdot 7$. **8.** numerele care lipsesc: 21, 6, 30, 12, 6, 30, 20, 8, 25, 6. **9.** a) $\frac{7}{15}<\frac{9}{15}$, $\frac{16}{23}>\frac{11}{23}$, $\frac{9}{5}>\frac{9}{7}$, $\frac{17}{25}<\frac{17}{11}$; b) $\frac{5}{8}>\frac{9}{16}$, $\frac{23}{24}>\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}<\frac{17}{36}$, $\frac{19}{42}<\frac{4}{7}$; c) $\frac{10}{11}>\frac{5}{6}$, $\frac{18}{17}<\frac{9}{8}$, $\frac{30}{32}>\frac{10}{11}$, $\frac{18}{23}<\frac{27}{31}$; d) $\frac{15}{4}>3$, $7<\frac{53}{7}$, $3\frac{3}{5}<4\frac{2}{3}$, $5\frac{4}{9}>\frac{30}{7}$. **10.** $\frac{4}{25}<\frac{8}{25}<\frac{14}{25}<\frac{17}{25}<\frac{21}{25}<\frac{37}{25}$; $\frac{43}{53}<\frac{43}{23}<\frac{43}{21}<\frac{43}{17}<\frac{43}{13}<\frac{43}{8}$; $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{26}{32}<\frac{14}{16}<1<\frac{34}{32}$; $\frac{2}{5}<\frac{4}{9}<\frac{5}{11}<\frac{1}{2}<\frac{10}{17}<\frac{20}{18}$. **11.** a) $\frac{7}{10}=\frac{14}{20}$, $\frac{14}{20}<\frac{14}{19}<\ldots<\frac{14}{15}$ sau $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$, $\frac{14}{15}=\frac{28}{30}$, $\frac{21}{30}<\frac{22}{30}<\ldots<\frac{28}{30}$; b) Se aduc la numitor comun 28 și se aleg trei fracții; c) Se aduc la numitor comun 10. **12.** Se aduc fracțiile la numitor comun 100 și se ordonează crescător. **13.** $\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$, fracția este între 8 și 9 deci numărul căutat este 8; 10; 9. **14.** $\frac{47}{6}=7\frac{5}{6}$, răspuns 8; 13; 10. **15.** $4\frac{m}{7}$, cu $0<m<7$. **16.** $6\frac{33}{n}$, cu $n > 33$. **17.** $\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}, 7<\frac{23}{3}<8$; 6 și 7; 5 și 6; 8 și 9; 9 și 10. **18.** a) 6; 1; 2; b) 1; 1; 1; c) $1\frac{1}{6}$; $\frac{7}{10}$; $1\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$; 1; e) $\frac{1}{8}$; 4; $\frac{1}{4}$. **19.** 1280 lei. **20.** În depozit rămâne $\frac{4}{9}$ din cantitate, iar $\frac{4}{9}<\frac{5}{9}$; 13 tone. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** $\frac{51}{14}, \frac{53}{34}, \frac{55}{54}, \frac{57}{74}, \frac{59}{94}$; 3 (fracții supraunitare) > 2 (fracții subunitare). **2.** $\overline{ab}+3=\overline{ba}+12 \Leftrightarrow a=b+1$, 8 fracții. **3.** $2a+3b=13$, b impar și mai mic decât 4, soluții: $a = 5$, $b = 1$ și $a = 2$, $b = 3$. **4.** Se simplifică fracțiile și se identifică fracțiile echivalente. **5.** $\frac{2}{14}$; $\frac{6}{4}$. **6.** $\frac{1+2+3+\ldots+35}{63}=10$; $\frac{5(1+2+3+\ldots+15)}{24}=25$; 10; $\frac{70}{71}$ (se grupează scăderile și se obțin 70 de perechi).

Testul 1. **1.** d. **2.** d. **3.** a. **4.** b. **5.** c. **6.** b. Testul 2. **1.** $a = 9$, $b = 1$. **2.** $\frac{21}{36}<\frac{22}{36}$. **3.** $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $\frac{13}{10}$; $\frac{6}{7}$; 1; 1. **5.** a) $600 - 10\% \cdot 600 = 540$ lei; b) 594 lei.

Pag. 128. **4.** $\frac{6}{5};\frac{9}{2};\frac{121}{50};\frac{5008}{25}$. **5.** 10,475,2,40.

Pag. 131. **1.** $1,12 > 0,859$ sau $\frac{1120}{1000} > \frac{859}{1000}$. **2.** $0,2568 < 0,3$; $456,3 > 456$; $5,879 < 5,897$; $6789,3 > 6788,9$. **3.** 0,005897 < 0,89 < 1,04 < 1,997 < 2,05 < 2,1. **4.** 5,71; 5,75; 5,77. **5.** a) 0,8; 49,3; 7218,5; b) 1,24; 0,89; 152,83; c) 29; 1; 15. **7.** 2,8; 2,87; 2,9.

Pag. 133-134. **1.** 94,4; 62,31; 124,241; 0,111. **2.** 25,538; 536,2089; 121,836. **3.** 0,261 kg. **4.** 41,679; 485,195; 283,3078; 7868,8102. **5.** 79,75 kg. **6.** 25,8 kg. **7.** 8,123; 2,25; 704,019; 1,967; 127,7903; 85,35327; 3,65; 96,024; 1,23; 588,198; 16,4362. **8.** 797,71. **9.** 336,038. **10.** 126,906. **11.** 53,75 kg. **12.** 23,15 kg. **13.** 37,05. **14.** 0,156; 30,34; 23,11; 2,89; 16,92; 0,68; 59,35. **15.** 14,675. **16.** 400,35. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 40,4289. **2.** 61,25 km. **3.** 0,81m. **4.** 7,29; 4,31. **5.** 2300,97 kg. **7.** a = 163,92, b = 3,448; 167,368; 160,472.

Pag. 137. **2.** 125; 129; 17230; 120; 75; 14000. **3.** 12,5 lei; 125 lei. **4.** 2,925 lei. **5.** 1462,5 kg. **6.** 11,43; 161,29; 63,5. **7.** 124,432; 10,5; 20,98; 5. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 1349. **2.** 98,125 lei. **3.** 1,57194. **4.** 420 lei. **5.** 147,95 km. **6.** 13,9.

Pag. 140. **2.** 3,75 lei. **3.** 112,75. **4.** 3,88. **5.** 0,0625. **6.** 0; 6; 2.7. 28 : 5 = 5,6 lei, 26 : 4 = 6,5 lei, mai convenabilă prima ofertă.

Pag. 141. **1.** 6; 26,25; 415,8. **3.** 8,8, rotunjit 9. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 8,375. **2.** 40,5.

Pag. 142. 1. a) 0,4; 0,65; 0,875; 0,98; 0,67; b) 0,(3); 0,(72); 0,(923076); 3,(3529411764705882); 1,(047619); c) 0,1(6); 0,4(6); 0,2(142857); 0,708(3); 1,1(285714).

Pag. 144. **1.** 5,12; 0,45612; 0,0125; 0,0001235. **2.** 2,3; 1,2; 8,5135; 2,8; 52,35. **3.** 692,12. **4.** 0,4(571428); 0,76646875; 7,4(259); 1,636(81). **5.** 1,25 lei; **6.** 685,76 kg; **7.** 119,07 tone. **8.** 15,24 km.

Pag. 146. **2.** 9 : 6 = 1,5 lei cornul, 7 cornuri 10,5 lei, deci nu îi ajungeau banii. **3.** 4,2 lei un kg, 21 lei 5 kg. **4.** 13155. 5. 3,2 lei.

Pag. 148. **1.** $\frac{1}{3}$, $\frac{14}{99}$, $3\frac{5}{9}$, $15\frac{4}{33}$, $21\frac{4}{11}$, $6\frac{47}{99}$, $7\frac{7}{33}$, $11\frac{19}{33}$; $\frac{2}{45}$, $\frac{13}{99}$, $\frac{2}{15}$, $1\frac{2}{15}$, $22\frac{23}{45}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{137}{330}$, $1\frac{7}{30}$.
2. $\frac{73}{37} = 1,(972)$, 1994:3=664 rest 2, deci până la zecimala 1994 avem 664 de grupe de trei cifre și încă două; răspuns 7. **3.** 0,(25) < 0,(43) < 0,45 < 0,4(5) < 0,5(2) < 0,54(2).

Pag. 151. **1.** 0,1; 0,11; 0,7; 2,28; 0,015. **2.** 404,01; 1,6; 1146,2. **3.** 0; 1,6; 5,5; 1. **4.** $\frac{5}{6}$, $\frac{59}{75}$, $\frac{29}{18}$, $\frac{63}{100} = 0,63$.
5. $\frac{2}{5} = 0,4$; $8\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$, $1\frac{41}{60}$. **6.** 16,46; 159,5; 69,32; 20,041; 51,375; 104,974. *Probleme pentru micii campioni!* **1.** 1,57; 3,988692; 1,35625; $\frac{173}{60}$. **2.** 587,25 lei.

Pag. 152-154. **3.** a) 0,1; 0,07; 7,7; 0,2; 1,877; 0,0019; 13,071; b) 0,25; 3,5; 0,98; 2,02; 0,075; 0,992. **4.** $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{125}{2}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{411}{50}$, $\frac{61}{4}$, $\frac{16253}{25}$. **5.** 10; 124; 4; 40. **6.** 0,00421 < 0,97 < 1,005 < 1,987 < 2,099 < < 2,23. **8.** 4,309 kg. **9.** 100; 130,382; 15,246; 0,80235; 14,923; 3012,2121; 1478,434001. **10.** 3,43; 139,397; 10; 256,353; 11332,11422. **11.** Ana; Sorin nu a așezat virgulă sub virgulă, iar Bianca le-a adunat. **12.** 4,01; 30; 3,81; 0,2662; 3,1766. **13.** 0,257; 0,457; 18,7955; 1233,995679. **14.** 7,646; 1,486. **15.** 24,791. **16.** 11,5 kg. **17.** 48,103; 12,13; 4,1419. **18.** 254000; 833200; 1; 253; 2,0604; 0,253; 1. **19.** 0,5; 3,5; 0,05; 0,1; 0,2; 0,42; 4,325; 480,048; 562,5775; 0,016. **20.** 86,9. **21.** a) 0,6; 0,85; 1,375; 1,325; 0,97; b) 0,1(6); 0,(90); 1,2(142857); 1,(095238); 0,(987654320). **23.** 2,15; 0,88075; 0,5(6); 2,59; 80; 646,(6). **24.** 100; 1,175; 0,33; 17,31. **25.** 49,32; 0,7822; 5,08243; 200,97; 216,493993. *Probleme pentru micii campioni!* **4.** după 4 dublări se obține 33; numărul 1,8 nu se poate transforma prin dublări în număr natural; o fracție zecimală se transformă în număr natural prin dublări, dacă numărul care reprezintă partea zecimală este o putere a lui 5. 5. 47,98. 6. 24,15.

Testul 1. **1.** d, **2.** a, **3.** b, **4.** b, **5.** c, **6.** a. Testul 2. **1.** d. **2.** a. **3.** b. **4.** b. **5.** c. **6.** a. Testul 3. **2.** $\frac{13}{99}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{37}{300}$, $\frac{61}{4}$. **3.** 15,6. **4.** ceapă: 6,3 lei, cartofi: 7,1875 lei, roșii: 11,375 lei, total: 24,8625 lei.

Pag. 159-161. **1.** oi: 37, capre: 35, vaci: 39. **2.** 9 lei. **3.** 31 de timbre. **4.** 30%. **5.** 31. **6.** 280 kg (ionatane), 140 kg (delicios), 140 kg (golden). **7.** 60%, 198 băieți. **8.** 55 de piese. **9.** 129 lei. **10.** 90 lei. **11.** 24 lei. **12.** 20 lei. **13.** Arborii sunt puși pe perimetrul dreptunghiului, care are 54 m, din 3 în 3 metri, deci 18 arbori, preț 585 lei. **14.** Mărim de 8 ori fiecare dintre cantități. **15.** 307200 km. **16.** 1,45 lei. **17.** Jumătate din cele două treimi rămase după prima zi reprezintă o treime din carte, deci cartea are 35 · 3 = 105 pagini. **18.** 1 km. **19.** 20 de pagini. **20.** 800 kg la hectar se distribuie la asociați, 800 · 648 = 518400 kg, deci 2073,6 kg primește fiecare asociat. **21.** lalea: 3 lei, frezia: 5 lei. **22.** 25 de caiete care costă 4 lei și 20 de caiete care costă 5 lei. **23.** 60 metri de gard; 116 dale folosite la alei, 2934,8 lei; câte 40 de panseluțe la fiecare strat, 160 de panseluțe, 160 lei, 40 de trandafiri, 450 lei trandafirii, 610 lei florile. 450 grame sămânță gazon, 6,525 lei. **24.** 45 de cifre 7, 636 de cifre în total. **26.** Latura cubului trebui să fie un multiplu comun al celor 3 dimensiuni, cel mai mic fiind 30 cm. **27.** 121 caiși, 242 meri și 257 peri. **28.** 2 litri de apă. **29.** 1750 litri, 750 litri.
Testul 1. **1.** d. **2.** a. **3.** c. **4.** d. **5.** b. Testul 2. **1.** a. **2.** a. **3.** c. **4.** d. **5.** a

CAPITOLUL III

Pag 192. **1.** 90^0; 180^0; 60^0; 130^0; $41^056'$; $60^050'$; 100^0; $111^030'$; $32^025'$; $50^040'$; $44^040'$; $57^030'$; 100^0; 91^0; 30^0; $22^030'$.
Pag 196-197. **6.** 5 cm, 7 cm, 8 cm. **20.** 24^0, 40^0, $24^012'$.
Pag. 201-203. **2.** 11 km; **3.** 3,8 dm; 12300 cm; 0,2 dam; 80,3 dm; 471 dm; 3,5 dam; 70 dm; 1,5 hm; 720 dam; 0,7 dm; 12,5 dm; 0,043 m. **4.** 450 dam; 0; 49 dm; 105800 cm; 6650 m; 0,1513 dam; 1 dm; 31,9 dm; 1410 dam; 0,00455 hm; 490 mm; 1060 mm. **5.** 50 pomi. **6.** 90 m; 54,6 cm. **10.** 96 dam. **11.** 3,225 m; 1,075 m. **12.** 50 m; 51 m; 52 m. **13.** 31 m; 33 m; 35 m. **14.** 32 cm. **15.** 20 cm. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** După 7 zile melcul a urcat 7 m, iar în a opta zi urcă ultimii 3 m și nu mai coboară căci a ajuns în vârf. **2.** 27 m; 32 m; 34 m. **3.** 7719,40 lei. **4.** 28,776 dm. **5.** 107,92 cm. **6.** 6 m.
Pag 206-207. **2.** 1200 dm^2; 1,5207 hm^2; 0,347 ari; 0,5003 m^2; 50320 cm^2; 24,532 cm^2; 110000 m^2; 52000 cm^2; 101,2 hm^2; 5250 cm^2; 12,5 m^2; 220010 mm^2; 0,75 ha; 320 m^2. **3.** 13198,765 m^2; 1250140000 cm^2; 364927,6325 m^2; 169803,2 dm^2; 4437,57 dm^2. **4.** 32 cm. **5.** 73,5 dm^2. **6.** 73 plăci de gresie. **7.** 225,4 m. **8.** 8918 m^2. **9.** 1788,40 lei. **10.** 7,776 m^2. **11.** 100 cm^2. **12.** 24 m^2. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 1500 de țigle. **2.** 3000 kg de sulfat. **3.** 7920 kg. **4.** 5184 de plăci. **5.** 2416,5 m^2. **6.** 60 cm; 50; 120 pătrate. **7.** 39 m; 1000 dale. **8.** Dacă lungimea este cu 24 mai mare decât lățimea, atunci perimetrul este format din 4 lățimi și încă 48 cm. Dar perimetrul este de 6 ori mai mare decât lățimea, adică 2 lățimi reprezintă 48 cm. Atunci lățimea este de 24 cm și lungimea de 48 cm. Aria are 1152 cm^2.
Pag 210-212. **2.** 5000; 201000; 4030; 2413,2; 21000000; 2105800; 2110; 100000; 4000000000; 3050800000; 2700; 5000000. **3.** 100; 1100; 3000; 7022; 0,3012; 0,02; 0,102; 0,0000121507. **4.** 241000; 30; 14300000; 1270000; 350000; 70000000. **5.** dm^3; dam^3; dm^3; cm^3; dm^3; dm^3. **6.** 211000000315,0003 dam^3; 12,951 m^3; 7114,51 cm^3; 15,212 hm^3; 609,751 dm^3; 362,436 hm^3. **7.** 600 cm^3. **8.** 1,2 m^3. **9.** 15 hm^3. **10.** 180 săpunuri. **11.** 5 dm. **12.** 135 cuburi. **13.** 6,(6) m^3. **14.** 8 u^3. **15.** 3360 cm^3. **16.** 1350 cărămizi. **17.** 6000 cm^3. **18.** 243 cm^3. **19.** 10,5 *l*. **20.** 1500 zile. *Probleme pentru micii campioni.* **1.** 8000 cm^3. **2.** 1117,125 cm^3. **3.** 1505,28 cm^3. **4.** V_1 = 174,24 m^3, V_2 = 164,3954 m^3. **5.** 720 m^3. **6.** 50 m^3. **7.** 3 dm, 20 *l*. **8.** 32. **9.** 1875 cm^3. **10.** 2145 u^3.
Pag 213-216. **2.** 16 cm. **3.** 1247 m de sârmă, 104 stâlpi. **4.** 72 cm. **5.** 7,6 m. **6.** 6972,25 cm^2. **7.** 14 m. **8.** 1125 m^2. **9.** 30 de sticle. **10.** 6400 m^2, 26572 m^2, 656 m. **11.** 509,86 cm^3. **12.** 58,0125 *l*. **13.** Dacă aria pătratului, cu latura egală cu lățimea dreptunghiului este un sfert din aria dreptunghiului, atunci lungimea dreptunghiului este de 4 ori mai mare ca lățimea sa. L = 9,6 m și l = 2,4 m. Aria dreptunghiului este de 23,04 m^2. **14.** Desenăm dreptunghiul inițial și pe cel mărit și observăm că avem 3 dreptunghiuri noi adăugate. Obținem $5l + 3L = 65$ m. Aria dreptunghiului inițial este de 70 m^2. **15.** 8, 24, 24, 8. **16.** 6, 4, după $2k + 1$ modificări, numărul din mijloc este $6k + 7$, care este număr impar. Atunci nu toate numerele din colțuri sunt pare și nici impare.
Testul 1. **1.** d. **2.** d. **3.** c. **4.** d. **5.** c. Testul 2. **1.** a. **2.** a. **3.** b. **4.** d. **5.** b.

PACHETUL EDUCAȚIONAL
este compus din:

- **Manual** (carte + CD)
- **Caietul elevului**
- **Ghidul profesorului**

ISBN: 978-606-94044-9-2
www.edituracorint.ro